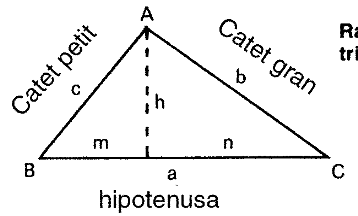
Resolució de triangles

TRIANGLES RECTANGLES: $\hat{A} = 90°$; $\hat{B} + \hat{C} = 90°$

La hipotenusa només existeix en els triangles rectangles



Raons trigonomètriques:

$$\sin = \frac{\text{costat oposat}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\cos = \frac{\text{costat adjacent}}{\text{hipotenusa}}$$

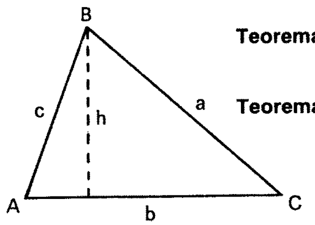
$$\text{tg} = \frac{\text{costat oposat}}{\text{costat adjacent}}$$

Teorema de Pitàgores: $\text{hip}^2 = C^2 + c^2$

Teorema de l'altura: $h^2 = m \cdot n$

Teorema del catet: $c^2 = a \cdot m$; $b^2 = a \cdot n$

TRIANGLES QUALSSEVOL: $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$



Teorema dels sinus: $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$

Teorema del cosinus:

$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C \end{cases}$$

Fórmules de l'àrea $S = \dfrac{1}{2} b \cdot h$; $S = \dfrac{1}{2} b \cdot a \cdot \sin C$

$S = \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)}$ essent $p = \dfrac{a+b+c}{2}$

Mitjana: recta que uneix un vèrtex amb el punt mitjà del costat oposat.
Baricentre: punt d'intersecció de les tres mitjanes d'un triangle.

Altura: recta que passa per un vèrtex i és perpendicular al costat oposat.
Ortocentre: punt d'intersecció de les tres altures d'un triangle.

Mediatriu: recta perpendicular a un costat i que passa per un punt mitjà.
Circumcentre: punt d'intersecció de les tres mediatrius d'un triangle.
És el centre de la circumferència circumscrita.

Bisectriu: recta que passa per un vèrtex i divideix l'angle en dues parts iguals.
Els seus punts equidisten dels dos costats.
Incentre: punt d'intersecció de les tres bisectrius interiors d'un triangle.
És el centre de la circumferència inscrita.

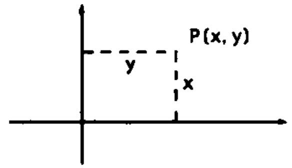
Altres relacions:

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\sin A + \sin B}{\sin A - \sin B};$$

$$\begin{cases} a = b \cdot \cos C + c \cdot \cos B \\ b = a \cdot \cos C + c \cdot \cos A \\ c = a \cdot \cos B + b \cdot \cos A \end{cases}$$

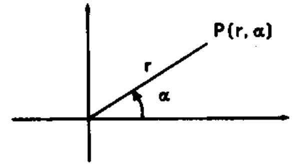
Sistemes de coordenades

Pla:



cartesianes

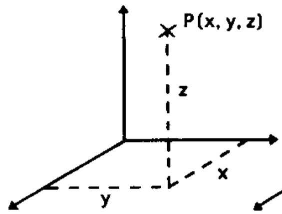
$$\begin{cases} x = r \cdot \cos \alpha \\ y = r \cdot \sin \alpha \end{cases}$$



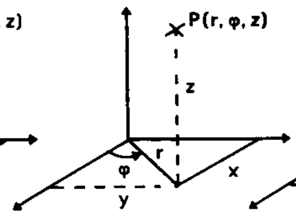
polars

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \alpha = \text{arc tg } y/x \end{cases}$$

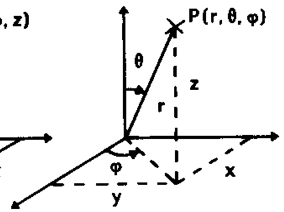
Espai:



cartesianes



cilíndriques



esfèriques

Canvi de coordenades:

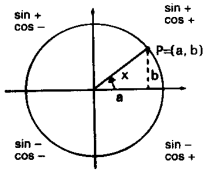
(1) ↔ (2)

(1)	(2)
$x = r \cdot \cos \varphi$	$r = \sqrt{x^2 + y^2}$
$y = r \cdot \sin \varphi$	$\varphi = \text{arctg } y/x$
$z = z$	$z = z$

(1) ↔ (3)

(1)	(3)
$x = r \cdot \sin\theta \cdot \cos\varphi$	$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
$y = r \cdot \sin\theta \cdot \sin\varphi$	$\theta = \text{arctg} \dfrac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}$
$z = r \cdot \cos\theta$	$\varphi = \text{arctg } y/x$

Funcions circulars (figs. 1 a 9)



	Definició	Recorregut	Període	Discontinuïtat
sinus (x)	b	$[-1, +1]$	2π	—
cosinus (x)	a	$[-1, +1]$	2π	—
tg (x)	b/a	R	π	$\frac{\pi}{2} + k\pi$

Propietat fonamental: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1;$

Relacions:

complementaris	$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x;$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$
suplementaris	$\sin(\pi - x) = \sin x;$	$\cos(\pi - x) = -\cos x$
difereixen en π	$\sin(\pi + x) = -\sin x;$	$\cos(\pi + x) = -\cos x$
difereixen en π/2	$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x;$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$
oposats	$\sin(-x) = -\sin x;$	$\cos(-x) = \cos x$

Conversió d'angles: $180° = \pi$ radiants

$$\text{radiants} = \frac{\text{graus}}{180} \times \pi; \qquad \text{graus} = \frac{\text{radiants}}{\pi} \times 180$$

Valors trigonomètrics usuals:

graus	0	30	45	60	90	120	135	150	180	210	225	240	270	300	315	330
radiants	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{-1}{2}$	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	−1	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{-1}{2}$
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	−1	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{-1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
tg	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—	$-\sqrt{3}$	−1	$\frac{-\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—	$-\sqrt{3}$	−1	$\frac{-\sqrt{3}}{3}$

FUNCIONS RECÍPROQUES:

Arc sinus: $[-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$; DEF. arc sin (a) = b ⇔ sin b = a

Arc cosinus: $[-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$; DEF. arc cos (a) = b ⇔ cos b = a

Arc tangent: $R \rightarrow \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$; DEF. arc tg (a) = b ⇔ tg b = a

FUNCIONS INVERSES:

$$\text{cosec}(x) = \frac{1}{\sin x}; \qquad \sec(x) = \frac{1}{\cos x}; \qquad \text{cotg}(x) = \frac{1}{\text{tg}\,x}$$

FÓRMULES TRIGONOMÈTRIQUES:

Addició: $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \cos\alpha \cdot \sin\beta;$
$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \mp \sin\alpha \cdot \sin\beta;$

$$\text{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\text{tg}\,\alpha \pm \text{tg}\,\beta}{1 \mp \text{tg}\,\alpha \cdot \text{tg}\,\beta}$$

Angle doble: $\sin 2\alpha = 2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha$
$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

$$\text{tg}\,2\alpha = \frac{2\,\text{tg}\,\alpha}{1 - \text{tg}^2\alpha}$$

Angle meitat:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}}$$

Transformacions:

$$\sin\alpha \pm \sin\beta = 2 \cdot \sin\frac{\alpha \pm \beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha \mp \beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2 \cdot \cos\frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2 \cdot \sin\frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin\frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\text{tg}\,\alpha \pm \text{tg}\,\beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos\alpha \cdot \cos\beta}$$

Gràfiques