1. En una final olímpica de 100 metres llisos participen 8 atletes.

a) Quantes possibles classificacions pot haver-hi?

b) De quantes formes diferents es poden repartir les medalles *or, plata* i *bronze*?

c) Si entre els 8 atletes hi ha dos que són espanyols, quina és la probabilitat que un d'ells aconsegueixi l'or? I la probabilitat que quedin els dos primers?

Sol.: a) 40320 classificacions, b) 336 maneres c) 2/8; $\frac{6!}{8!}\cdot 2 = \frac{1}{28}$

Solució

a) El mateix problema seria aquest: *De quantes maneres podem omplir 8 caselles (1ª, 2ª, 3ª, ..., 8ª), amb 8 elements possibles, de forma que en les vuit quedin elements diferents i l'ordre tingui importància?*

D'acord amb el principi bàsic de recompte de llistes ordenades, el total de classificacions serà:

$$8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 40320$$

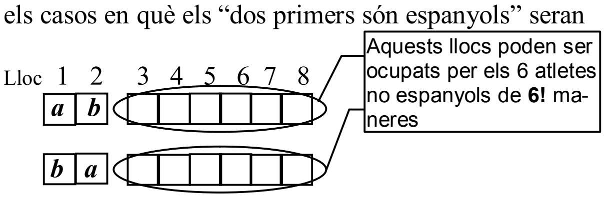
També podeu posar $V_{8,8}$, i fins i tot $P_8 = 8!$

b) En aquest cas, s'haurien d'emplenar 3 llocs (or, plata i bronze) i hi estem en la situació anterior, però només amb llistes de 3 elements agafats entre 8 possibles. Per tant, el total demanat és $8\cdot 7\cdot 6 = 336$

c) Hi ha 8 casos possibles per a l'or, i evidentment hi ha 2 favorables al succés "l'or és per a un espanyol". Per tant, segons la fórmula de Laplace:

$$p(\text{l'or el guanya un espanyol}) = \frac{2}{8} = 0'25$$

Ara, imagina que els 8 atletes siguin *a, b, c, d, e, f, g, h.* Imagina també que els espanyols siguin *a, b.* Llavors, els casos en què els "dos primers són espanyols" seran



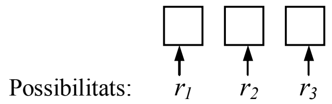
Per tant, el nombre de casos en què els 2 primers serien espanyols és $6!\cdot 2$. Per altra banda, el nombre de classificacions possibles és 8!. Per tant, la probabilitat que els 2 primers siguin espanyols és

$$p(\text{els 2 primers espanyols}) = \frac{6!\cdot 2}{8!}$$

Principi bàsic de recompte de llistes ordenades

"Si hem de formar una **llista ordenada** de *p* elements, i si tenim r_1 elements elegibles per al primer lloc, r_2 elements elegibles per al 2n lloc, etc., llavors el total de llistes possibles s'obté multiplicant les possibilitats en cada lloc".

Per exemple, si forméssim llistes de 3 elements,



el total de llistes seria el producte $r_1\cdot r_2\cdot r_3$

Fórmula de Laplace de la probabilitat

Si les característiques d'un experiment permeten suposar que tots els resultats possibles tenen la mateixa probabilitat, aleshores la *probablitat* d'un succés A val:

$$p(A) = \frac{\text{nombre de casos favorables a A}}{\text{nombre de casos possibles de l'experiment}}$$

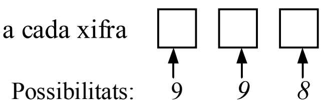
2. a) Amb les 10 xifres del sistema decimal, quants nombres de tres xifres diferents es poden formar? (Penseu que els nombres que comencin per zero no els podem considerar de tres xifres.)

b) Si agaféssim a l'atzar un dels nombres anteriors, quina seria la probabilitat que comencés per 1 ?

Sol.: a) 648 nombres, b) p=1/9

Solució

a) En formar un qualsevol dels nombres indicats, tenim les següents possibilitats per a cada xifra



La 1ª xifra només pot ser ocupada pels números 1,2,3....,9. Imaginem, per exemple, que agaféssim el 2 per a ocupar la 1ª xifra; llavors, com que el 2 ja no podria entrar en les següents xifres (però ara sí que podria entrar el 0), a la 2ª podria haver una qualsevol entre 0,1,3,4,...,9. Finalment, posada la 2ª xifra, és evident que per a la 3ª només hi hauria 8 possibilitats.

Per tant, es poden formar $9{\cdot}9{\cdot}8 = 648$ nombres.

Altra resposta podria ser aquesta:

- $V_{10,3} = 10{\cdot}9{\cdot}8 = 720$ nombres, si el 0 pogués figurar també com a primera xifra
- Quants dels 720 anteriors començarien per 0?. La resposta és: la dècima part, ja que hi ha 10 nombres possibles per ocupar-la, és a dir, hi ha 720/10 = 72 nombres que comencen per 0.
- Finalment, $720 - 72 = 648$ seran pròpiament nombres de 3 xifres

b) Raonant com en el cas anterior, el nombre de casos de començament per 1 serà $1{\cdot}9{\cdot}8$. Per tant, la probabilitat que el número triat comenci per 1 serà

$$p(\text{començar per 1}) = \frac{1{\cdot}9{\cdot}8}{9{\cdot}9{\cdot}8} = \frac{1}{9}$$

3. a) Quants jocs diferents, de 4 cartes, podem obtenir en extreure 4 bastons d'una baralla espanyola de 40 cartes? (Penseu si importa o no l'ordre en obtenir el joc.)

b) Si extraiem, simultàniament i a l'atzar, 4 cartes d'una baralla espanyola, quina és la probabilitat que les quatre siguin bastons?

Sol.: a) 210 jocs, b) p=0'0023

Solució

a) El total de bastons a la baralla és 10. Com que en formar un joc no importa l'ordre en què ens arribin les cartes, el nombre de jocs diferents que podríem formar agafant 4 bastons serà $C_{10,4} = \dfrac{10{\cdot}9{\cdot}8{\cdot}7}{4!} = 210 \ \ jocs$

b) El nombre total de casos possibles serà $C_{40,4} = \dfrac{40{\cdot}39{\cdot}38{\cdot}37}{4!} \ \ jocs \ \ possibles$. Per tant, la probabilitat demanada val:

$$p(\text{les 4 cartes siguin bastons}) = \frac{C_{10,4}}{C_{40,4}} = \frac{10{\cdot}9{\cdot}8{\cdot}7}{40{\cdot}39{\cdot}38{\cdot}37} = 0'0023$$

4. Si llancem un dau perfecte 6 vegades, quina és la probabilitat d'obtenir exactament una vegada un 6? I la d'obtenir almenys una vegada un 6?

Sol.: a) 0'4018 b) 0'6651

Solució

a) Comptem els casos en què hi sortiria un 6 exactament en el primer llançament, exactament en el 2n, etc

	Llançaments					
Un 6 en **1r** llançament	**6**					
Possibilitats	1	5	5	5	5	5

	Llançaments					
Un 6 en **2n** llançament		**6**				
Possibilitats	5	1	5	5	5	5

Així doncs, si apliquem el principi de recompt de llistes ordenades (recorda el problema 1), obtenim:

Un 6 en el primer llançament: $1{\cdot}5{\cdot}5{\cdot}5{\cdot}5{\cdot}5 = \mathbf{5^5}$ possibilitats
Un 6 en el segon llançament: $5{\cdot}1{\cdot}5{\cdot}5{\cdot}5{\cdot}5 = \mathbf{5^5}$ possibilitats
....

Així successivament, en trobarem que hi ha un total de $\mathbf{6{\cdot}5^5}$ possibilitats d'obtenir exactament un 6 en els 6 llançaments. Com que, evidentment, el total de possibilitats en els 6 llançaments serà $\mathbf{6^6}$ possibilitats, obtenim, finalment,

$$p(\text{exactament un 6}) = \frac{6{\cdot}5^5}{6^6} = \left(\frac{5}{6}\right)^5 = 0'4018...$$

b) En el cas del succés "obtenir almenys una vegada un 6", el millor per fer el recompte és comptar el nombre de casos corresponents a l'esdeveniment contrari, l'enunciat del qual serà "no obtenir cap vegada un 6". Comptem això últim:

	Llançaments					
No obtenir cap vegada un 6	**?**	**?**	**?**	**?**	**?**	**?**
Possibilitats	5	5	5	5	5	5

Com estem veient, hi haurà $\mathbf{5^6}$ possibilitats de no obtenir cap vegada un 6. Llavors,

$$p(\text{no obtenir cap vegada un 6})=\frac{5^6}{6^6}=0'3349 \quad \Rightarrow \quad p(\text{al menys una vegada un 6})=1-0'3349=0'6651$$