1. Tenim 3 monedes perfectes, marcades cada una amb un 1 en una cara i un 2 en l'altra cara. Llancem les tres i **sumem els punts obtinguts**, amb la qual cosa obtindrem, naturalment, una variable aleatòria, *X*, de valors 3, 4, 5, 6. Calcula:

a) La funció de probabilitat.   b) La funció de distribució.

Solució

Expressarem cada cas possible com un trio ***(x,y,z)***, on ***x*** és el que ha sortir a la 1a moneda, ***y*** el que ha sortit a la 2a, y ***z*** el que ha sortit a la 3a. Vist així, és evident que hi ha 8 casos possibles:

(1,1,1), (1,1,2), (1,2,1), (1,2,2), (2,1,1), ..., (2,2,2)

Si la variable ***X*** indica la *suma* ***x+y+z***, obtenirm

$$f(3) = p(X=3) = p(1,1,1) = \frac{1}{8}$$

$$f(4) = p(X=4) = p(1,1,2) + p(1,2,1) + p(2,1,1) = \frac{3}{8}$$

$$f(5) = p(X=5) = p(1,2,2) + p(2,1,2) + p(2,2,1) = \frac{3}{8}$$

$$f(6) = p(X=6) = p(2,2,2) = \frac{1}{8}\,^\wedge$$

$$f(x) = 0 \quad si \quad x \neq 3,4,5,6$$

$$F(3) = p(X \le 3) = p(X=3) = \frac{1}{8}$$

$$F(4) = p(X \le 4) = p(X=3) + p(X=4) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{4}{8}$$

$$F(5) = p(X \le 5) = p(X=3) + p(X=4) + p(X=5) = \frac{7}{8}$$

$$F(6) = p(X \le 6) = \frac{8}{8} = 1$$

Recorda-ho!

1. **Funció de densidad:** $f(x) = p(X = x)$
2. **Funció de distribució:** $F(x) = p(X \le x)$

Així doncs, la funció de distribució és la següent:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < 3 \\ \frac{1}{8} & si \quad 3 \le x < 4 \\ \frac{4}{8} & si \quad 4 \le x < 5 \\ \frac{7}{8} & si \quad 5 \le x < 6 \\ 1 & si \quad 6 \le x \end{cases}$$

2. Un sistema d'alarma falla en un **3%** dels casos. Quina és la probabilitat que, sotmetent-lo a 10 assajos, funcioni, almenys, 9 vegades?

Sol.: 0,9655

Solució

Funcionar almenys en 9 ocasions significa exactament el següent:

Funciona 9 vegades o funciona 10 vegades

Per tant, la probabilitat demanada val:

$$p(X=9) + p(X=10) =$$

$$\binom{10}{9} \cdot 0'97^9 \cdot 0'03^1 + \binom{10}{10} \cdot 0'97^{10} \cdot 0'03^0 = 0'9655$$

Recorda-ho!

1. Imaginem un experiment en el qual només ens interessa observar 2 resultats contraris, A i A^c, com per exemple fer llançament d'una moneda, veure si falla o no un sistema d'alarma, etc.

   Suposem que en cada prova les probabilitats dels dos esdeveniments possibles siguin:

   p=p(A), q=p(AC) (En ser contraris, serà q=1-p)

   Suposem que repetim l'experiment n vegades. Llavors, la probabilitat que l'esdeveniment A es presenti k vegades val

$$p(X=k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

3. Un tirador encerta en el blanc amb probabilitat **0,8**. Calculeu la probabilitat que en efectuar **sis** trets :

a) No n'encerti cap.
b) N'encerti algun.
c) N'encerti exactament dos.

Sol.: a) 0,000064; b) 0,999936; c) 0,01536

Solució

Aquest problema és molt similar a l'anterior, només l'apartat b) és una mica diferent.

a) $p(X=0)=\binom{6}{0}\cdot 0'8^0\cdot 0'2^6 = 1\cdot 0'000064\cdot 1 = 0'000064$

b) $p(encerta\ algun) = 1 - p(X=0) = 1 - \binom{6}{0}\cdot 0'8^0\cdot 0'2^6 = 1\cdot 1\cdot 0'000064 = 1 - 0'999936$

c) $p(X=2)=\binom{6}{2}\cdot 0'8^2\cdot 0'2^4 = 0'01536$

4. Un examen de tipus *test* consta de 10 preguntes. Cada pregunta té 4 respostes indicades, però només una és correcta. Si un alumne respon a l'atzar les preguntes de l'examen, pot respondre bé, lògicament, entre 0 i 10 preguntes; tenim, doncs, una variable aleatòria, *X*, que pren els valors 0, 1, 2, ..., 10.

a) Calcula la probabilitat que l'alumne obtingui *excel·lent*, és a dir, encerti 9 o 10.
b) Calcula l'*esperança* i la *desviació estàndard* de la variable *X*. Si l'alumne sap 2 preguntes i respon a l'atzar les altres vuit, quina puntuació pot esperar obtenir?

Sol.: a) 0'0000295 b) 2'5 i 1'369

Solució

a) El problema és similar al 2; però hem d'esbrinar primer quan val la probabilitat, *p,* d'encertar cada pregunta.
Com que les respostes les fa a l'atzar i hi ha 4 possibles, tenim que

p = *probab* (encertar una pregunta concreta) = $\frac{1}{4}$,   *q* = *probab* (no encertar una pregunta concreta)= 1–*p* = $\frac{3}{4}$

Se'ns demana la probabilitat d'encertar 9 o 10 preguntes, o sigui

$$p(X=9 \text{ o } X=10) = p(X=9)+p(X=10) = \binom{10}{9}p^9q^1 + \binom{10}{10}p^{10}q^0 = 10\cdot 0'25^9\cdot 0'75 + 1\cdot 0'25^{10}\cdot 1 =$$

$$= 0{,}0000295$$

b) **Esperança:** $\mu = n\cdot p = 10\cdot 0'25 = 2'5$

Desviació estàndar: $\sigma = n\cdot p\cdot q = 10\cdot 0'25\cdot 0'75 = 1{,}3693$

La puntuació que pot esperar serà 2 punts més l'esperança dels 8 assajos restants, és a dir,

Puntuació esperada = $2 + 8\cdot 0'25 = 2 + 2 = 4$