

Introducció a la derivada d'una funció en un punt

Un dels conceptes més importants de les matemàtiques superiors és el de la derivada d'una funció en un punt. Les activitats que et presentem t'introduiran en aquest concepte a partir d'una simulació d'una situació física coneguda per tots: el càlcul de la velocitat d'un cos quan cau lliurement.

Per començar, accedeix a

<http://www.xtec.cat/~jbujsosa/GeoGebra/derivades/caiguda/Caigudapag.html>

Aquí tens una aplicació feta amb GeoGebra que simula la caiguda lliure d'un cos. En aquesta aplicació hi ha diferents caselles de control que apareixen i desapareixen segons cada situació. És molt convenient, per evitar confusions, que segueixis estrictament les indicacions que et donem.

ACTIVITAT 1

El punt verd representa un cos que el deixem caure lliurement sense velocitat inicial.

Prem el botó *Moviment / Pausa* i observa. Per tornar a començar, prem *Punt de partida*. Si vols parar el moviment en qualsevol moment, prem el botó *Moviment / Pausa* i torna'l a prémer per continuar-lo. També pots fer servir el punt lliscant per moure el punt verd.

Quina distància recorre el cos durant tota la caiguda?

Quin temps triga en tota la caiguda?

Creus que la velocitat és constant o no?

Per què?

Fes servir els botons o el punt lliscant i omple aquesta taula.

Temps en segons	Distància recorreguda en metres

Troba la fórmula de la funció que ens permet calcular directament la distància recorreguda en cada moment.

Com serà la seva gràfica?

Si actives la casella *Punt gràfic* de la finestra de l'esquerra i la *Gràfica* de la de la dreta, pots veure l'expressió de la funció i la seva gràfica. Fes servir el botons per observar el moviment.

Ens proposem ara el càlcul de la velocitat mitjana del cos entre dos moments del seu recorregut.

ACTIVITAT 2

Activa la casella *Punt de referència* i cap més. Fes que estigui situat per a $t_2 = 2$. Sense activar cap més opció, escriu l'expressió de la velocitat mitjana del cos i calcula-la per als dos primers segons de la caiguda.

Fes el mateix per calcular la velocitat mitjana del cos entre el segon 0,5 i el segon 2.

Omple la taula següent:

t_1	t_2	Velocitat mitjana
0	2	
0,5	2	
1	2	
1,5	2	
1,7	2	
...	2	

Activa la casella *Velocitat mitjana* i, fent servir el botó *Moviment / Pausa*, comprova els resultats que has calculat.

ACTIVITAT 3

Deixa activada només la casella *Punt de referència* i totes les altres desactivades. Fes que el cos estigui en el punt de partida i que el punt de referència estigui en el segon 2.

Activa només les caselles *Gràfica* i *Recta secant* de la finestra de la dreta. Calcula, sense activar cap casella més, el pendent de la recta vermella.

Fes el mateix per a $t_1 = 0,5$

Ompla la taula següent:

t_1	t_2	Pendent de la recta
0	2	
0,5	2	
1	2	
1,5	2	
1,7	2	
...	2	

Activa les caselles *Velocitat mitjana* i *Pendent*, fent servir el botó *Moviment / Pausa*, comprova els resultats que has calculat.

ACTIVITAT 4

En les dues activitats anteriors has calculat la velocitat mitjana de la caiguda lliure d'un cos diferents intervals de temps i també el pendent de les diferents rectes que es generaven a la gràfica de la funció del moviment.

Escriu les dues fórmules que et permeten calcular la velocitat mitjana en un interval i el pendent de la recta corresponent, que anomenarem *secant*.

Compara les dues fórmules.

Quina conclusió pots treure sobre la similitud entre les dues fórmules i entre les dues taules de les activitats anteriors?

Calcula la velocitat mitjana entre $t_1 = 2$ i $t_2 = 3$ i els pendents de les rectes corresponents.

Fes una taula com les anteriors amb els valors de t_1 que es vagin apropant als de $t_2 = 3$

Què passa quan $t_1 = t_2$

ACTIVITAT 5

En les activitats anteriors has calculat velocitats mitjanes i pendents de rectes secants.

En l'activitat 2, has calculat les velocitats mitjanes en uns intervals de temps. A quina velocitat tendeixen aquestes velocitats mitjanes quan t_1 tendeix a $t_2 = 2$?

I en el cas de les velocitats mitjanes de l'interval $[2, 3]$?

Aquesta velocitat a la qual tendeixen les velocitats mitjanes s'anomena **velocitat instantània**. Així direm que la velocitat instantània del cos en el segon 2 és i en el segon 3 és

ACTIVITAT 6

Ara repetirem el mateix raonament per a les rectes que apareixen a la finestra de la dreta.

Al pendent de quina recta tendeixen els pendents de les rectes secants de l'activitat 3?

Activa totes les caselles de les dues finestres gràfiques i fent servir els botons, comprova els raonaments que has fet.

ACTIVITAT 7

El pendent de la recta tangent a la gràfica de la funció f per a $x = t_2$ s'anomena **derivada de la funció f per a $x = t_2$ i s'escriu $f'(t_2)$**

En el cas de la caiguda d'un cos, la derivada per a un valor determinat del temps coincideix amb la velocitat instantània.

Calcula de diferents maneres les derivades següents i explica, en cada cas, el seu significat geomètric i físic.

$$f'(1) =$$

$$f'(1,5) =$$

$$f'(2) =$$

$$f'(2,5) =$$

$$f'(3) =$$

Sabries trobar una fórmula que ens dones directament la derivada de la funció $f(x)$ per a qualsevol valor de la x ? Quin significat té físicament?