- Referència completa i rigorosa pel que fa al problema de l'agulla de Buffon.

  http://mathworld.wolfram.com/BuffonsNeedleProblem.html

- Fórmules de la probabilitat $p(r)$ que una agulla toqui les línies, segons el valor de $r = \frac{d}{l}$ on d és la distància entre línies i l la longitud de les agulles.
  - Si $r > 1$, és a dir si la longitud de les agulles és més petita que la distància entre línies, aleshores $p(r) = \frac{2}{\pi \cdot r}$
  - Si les línies estan a la mateixa distància que la longitud de les agulles $p(1) = \frac{2}{\pi}$
  - Si $r < 1$, és a dir si les agulles són més llargues que la distància entre línies es compleix que $p(r) = \frac{2}{\pi} \cdot \left(\frac{1 - \sqrt{1 - r^2}}{r} + \arccos(r) \right)$

  Aquestes fórmules ens permeten obtenir una aproximació de π a partir d'una estimació empírica de la probabilitat $p(r)$.

- Anton Aubanell comenta que "no ens podem fer massa il·lusions sobre la precisió d'aquest mètode de càlcul de π: per obtenir una precisió de 10^{-3} amb un nivell de confiança del 95% ens caldrà fer 888.697 llançaments."
  És interessant comentar que en l'activitat que fem per a l'estimació de π hi intervenen dos aspectes que cal tenir molt en compte:
  - El primer és l'estimació empírica d'una probabilitat que ja sabem que, amb tot rigor, cal donar amb un interval de confiança a partir del valor observat de la freqüència relativa, del nivell de confiança amb què volguem treballar i del nombre de repeticions que fem en la nostra simulació. Com més a prop estigui la probabilitat de 0.5 més gran serà el marge d'error que tindrem.
  - L'error d'aproximació inherent al càlcul amb decimals. Aquesta circumstància és molt important quan dividim per un nombre més petit que 1, i per estimar π dividim 2 per la nostra estimació de la probabilitat. Serà tant més gran l'error com més petit sigui el número pel qual dividim.

  En primer aproximació, doncs --tot i que potser no és el més poràctic per fer la pràctica amb materials—sembla que aniria bé treballar amb agulles llargues (probabilitat de tallar gran i allunyada del 0.5)

- Tot seguit transcrivim resultats que, com que de fet coneixem el valor teòric de la probabilitat, adopten un enfocament invers al que ens feia l'Anton i, a partir de la fórmula del radi de l'interval de confiança, sovint dit *marge d'error*, en simulacions probabilístiques (que per a un nivell de confiança del 95,5% és $m.e. = 2\sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}}$ intenten respondre la pregunta "*Què podem esperar que passi si tirem 1000 agulles?*"
  - Amb agulles un quart de la distància entre línies (en les fórmules inicials d'aquest full cal posar $r = 4$, perquè r es la diatància entre línies prenent com a unitat l'agulla) resulta probabilitat 0,159. interval de confiança del 95,5% [0,135, 0,182], estimació de π [2,74, 3,67]
  - Amb agulles la meitat de la distància entre línies ($r = 2$) resulta que la probabilitat és 0,318, l'interval de confiança (amb més marge d'error que abans) és [0,288, 0,347]

per en canvi tenim una millor estimació de π, [2,87, 3,46] per allò que ja s'ha comentat de la divisió amb decimals

- Amb agulles igual de llargues que la distància entre línies: probabilitat 0,637, interval de confiança [0,606, 0,667] , que ens porta a aquest interval d'estimació de π : [2,99, 3,29]
- Amb r = ¾ és a dir que la longitud de les agulles sigui 4/3 la distància entre línies, resulta probabilitat 0,747, interval de confiança [0,720, 0,775] , que ens porta a aquest interval d'estimació de π : [3,03, 3,26].
- Amb agulles el doble que la distància entre línies la fórmula corresponent (posant r = 1/2) ens dóna una probabilitat 0,837, interval de confiança [0,814, 0,860] , que ens porta a aquest interval d'estimació de π : [3,06, 3,23].

- Repetim els resultats de probabilitat, interval de confiança de la probabilitat i interval d'estimació de π considerant que llancem 4000 agulles.
  - $r = 4$, $p = 0{,}159$, [0,148, 0,170], [2,93, 3,39]
  - $r = 2$, $p = 0{,}318$, [0,304, 0,333], [3,00, 3,29]
  - $r = 1$, $p = 0{,}637$, [0,621, 0,652], [3,07, 3,22]
  - $r = 3/4$, $p = 0{,}747$, [0,734, 0,761], [3,08, 3,20]
  - $r = 1/2$, $p = 0{,}837$, [0,826, 0,849], [3,10, 3,19]

  Com ja s'ha pogut intuir abans, així sembla que tot va molt millor... però aquesta idea té "el defecte" que correspon a $d > l$ i hem d'estar en cursos avançats per poder donar la fórmula.

- Per acabar, un "comentari visual". Segurament alguns alumnes (o potser ja ho heu pensat vosaltres) us diran: no sembla que les agulles que queden "verticals" siguin més llargues que les que queden gairebé "horitzontals"? Sí! Ho sembla, però no ho son!!! (si cal mesureu-ho i ho podreu comprovar). És un efecte òptic que ens fa veure les distàncies verticals més llargues que les horitzontals. Si us interessa el tema us suggerim l'element de l'*arc/cercamat* "No és cert tot el que es veu", que desenvolupa una de les unitats de "L'Estadística en el vostre món"