Comencem

- **Estudia la tendència de la mateixa funció $f(x) = x^2 - 4$ en $x = -2$ i en $x = 0$. Indica si la funció és creixent o decreixent en cada cas i comprova la resposta a partir de la seva representació gràfica.**

$f(x) = x^2 - 4$

$x = -2$

$$\left.\begin{array}{l} f(-2{,}1) = (-2{,}1)^2 - 4 = 0{,}41 \\ f(-2{,}01) = (-2{,}01)^2 - 4 = 0{,}0401 \\ f(-2{,}001) = (-2{,}001)^2 - 4 = 0{,}004001 \end{array}\right\}$$

$$x \to -2^-,\ f(x) \to 0^+$$

$$x \uparrow,\ f(x) \downarrow \text{ és decreixent}$$

$$\left.\begin{array}{l} f(-1{,}9) = (-1{,}9)^2 - 4 = -0{,}39 \\ f(-1{,}99) = (-1{,}99)^2 - 4 = -0{,}0399 \\ f(-1{,}999) = (-1{,}999)^2 - 4 = -0{,}003999 \end{array}\right\}$$

$$x \to -2^+,\ f(x) \to 0^-$$

$$x \downarrow,\ f(x) \uparrow \text{ és decreixent}$$

En $x = -2$ $\quad f(x) = x^2 - 4$ és decreixent.

$x = 0$

$$\left.\begin{array}{l} f(-0{,}1) = (-0{,}1)^2 - 4 = -3{,}99 \\ f(-0{,}01) = (-0{,}01)^2 - 4 = -3{,}9999 \\ f(-0{,}001) = (-0{,}001)^2 - 4 = -3{,}999999 \end{array}\right\}$$

$$x \to 0^-,\ f(x) \to -4^+$$

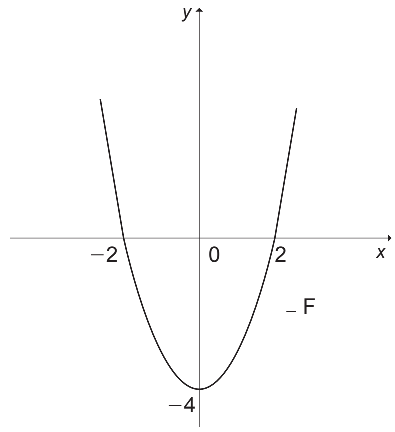
$$x \uparrow,\ f(x) \downarrow \text{ és decreixent}$$

$$\left.\begin{array}{l} f(0{,}1) = 0{,}1^2 - 4 = -3{,}99 \\ f(0{,}01) = 0{,}01^2 - 4 = -3{,}9999 \\ f(0{,}001) = 0{,}001^2 - 4 = -3{,}999999 \end{array}\right\}$$

$$x \to 0^+,\ f(x) \to$$

$$x \downarrow,\ f(x) \downarrow \text{ és creixent}$$

En $x = 0$ $f(x) = x^2 - 4$ passa de decreixent a creixent.



Gràficament: $\left\{\begin{array}{l} \text{En } x = -2 \text{ és decreixent} \\ \text{En } x = 0 \text{ passa de decreixent a creixent} \end{array}\right.$

Exercicis

1. Donada la funció $f(x) = \dfrac{x+2}{x-1}$:

a) **Troba el límit de la funció per a $x = 4$, $x = 1$ i $x = -2$.**

$$x = 4,\quad \left.\begin{array}{l} x \to 4^-;\ f(x) \to 2^+ \\ x \to 4^+;\ f(x) \to 2^- \end{array}\right\}$$

$$\lim_{x \to 4} f(x) = 2$$

$$x = 1,\quad \left.\begin{array}{l} x \to 1^-;\ f(x) \to -\infty \\ x \to 1^+;\ f(x) \to +\infty \end{array}\right\}$$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \infty$$

$$x = -2,\quad \left.\begin{array}{l} x \to -2^-;\ f(x) \to 0 \\ x \to -2^+;\ f(x) \to 0 \end{array}\right\}$$

$$\lim_{x \to -2} f(x) = 0$$

b) **Indica si es creixent o decreixent per a $x = 4$ i $x = -2$.**

$$\left.\begin{array}{l} x = 4,\ x \to 4^-;\ f(x) \to 2^+ \\ \text{És decreixent ja que } x \uparrow,\ f(x) \downarrow \\ x \to 4^+;\ f(x) \to 2^- \\ \text{És decreixent ja que } x \downarrow,\ f(x) \uparrow \end{array}\right\}$$

Decreixent.

$$\left.\begin{array}{l} x = -2,\ x \to -2^-;\ f(x) \to 0^+ \\ \text{És decreixent ja que } x\uparrow,\ f(x)\downarrow \\ x \to -2^+;\ f(x) \to 0^- \\ \text{És decreixent ja que } x\downarrow,\ f(x)\uparrow \end{array}\right\}$$

Decreixent.

2. Donada la funció $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x}{3x}$:

***a)* Troba el límit de la funció en $x = 0$.**

$$\left.\begin{array}{l} x \to 0^-;\ f(x) \to 0{,}\widehat{6}^- \\ x \to 0^+;\ f(x) \to 0{,}\widehat{6}^+ \end{array}\right\}$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0{,}\widehat{6} = \frac{2}{3}$$

***b)* Què pots dir del creixement de la funció en el punt $x = 0$? Justifica'n la resposta.**

$x = 0 \notin D_f$. No poden parlar de creixement en $x = 0$.

3. Calcula els límits següents:

a) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{2 - x - 5x^2}{3x^2 + 1}$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2 - x - 5x^2}{3x^2 + 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{-5x^2}{3x^2} = -\frac{5}{3}$$

b) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{7x - 3}{4x^2 + 2}$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{7x - 3}{4x^2 + 2} = \lim_{x \to \infty} \frac{7x}{4x^2} =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{7}{4x} = 0$$

c) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{3x^2 + 5x - 9} - \sqrt{3x^2 - x + 1}\right)$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{3x^2 + 5x - 9} - \sqrt{3x^2 - x + 1}\right) =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(\sqrt{3x^2 + 5x - 9}\right)^2 - \left(\sqrt{3x^2 - x + 1}\right)^2}{\sqrt{3x^2 + 5x - 9} + \sqrt{3x^2 - x + 1}} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2 + 5x - 9 - 3x^2 + x - 1}{\sqrt{3x^2 + 5x - 9} + \sqrt{3x^2 - x + 1}} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{6x - 10}{\sqrt{3x^2 + 5x - 9} + \sqrt{3x^2 - x + 1}} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{6x}{\sqrt{3x^2} + \sqrt{3x^2}} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{6x}{\sqrt{3}\,x + \sqrt{3}\,x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{6x}{2\sqrt{3}\,x} =$$

$$= \frac{6}{2\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$$

d) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 1} - x - 2\right)$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 1} - x - 2\right) =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left[\sqrt{x^2 + 1} - (x + 2)\right] =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2 + 1}\right)^2 - (x + 2)^2}{\sqrt{x^2 + 1} + x + 2} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 1 - x^2 - 4x - 4}{\sqrt{x^2 + 1} + x + 2} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{-4x - 3}{\sqrt{x^2 + 1} + x + 2} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{-4x}{\sqrt{x^2} + x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-4x}{x + x} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{-4x}{2x} = -2$$

e) $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \left(3x^3 + 2 - \sqrt{5x^4 - 3x^2 - 7}\right)$

$$\lim_{x \to -\infty} \left(3x^3 + 2 - \sqrt{5x^4 - 3x^2 - 7}\right) =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} (3x^3) = -\infty$$

f) $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{1 - 3x^3}{5x^2 + 2}$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1 - 3x^3}{5x^2 + 2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-3x^3}{5x^2} =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{-3x}{5} = +\infty$$

g) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x + 5}{x + 2}\right)^{x + 3}$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x + 5}{x + 2}\right)^{x + 3} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left[\left(1 + \frac{3}{x + 2}\right)^{\frac{x + 2}{3}}\right]^{\frac{3}{x + 2}(x + 3)} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3(x + 3)}{x + 2}} = e^{\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3x}{x}} = e^3$$

h) $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2 + x + 2}{2x + 3} + \frac{1 - x^3}{x^2 + 5} \right)$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2 + x + 2}{2x + 3} + \frac{1 - x^3}{x^2 + 5} \right) =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{-x^4 - 2x^3 + 7x^2 + 7x + 13}{2x^3 + 3x^2 + 10x + 15} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{-x^4}{2x^3} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-x}{2} = -\infty$$

i) $\lim_{x \to \infty} \frac{6x^4 - 5x^3 + 2x^2 - 3}{2x^3 - x^2 + 2x + 7}$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{6x^4 - 5x^3 + 2x^2 - 3}{2x^3 - x^2 + 2x + 7} =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{6x^4}{2x^3} = \lim_{x \to \infty} 3x = \infty$$

j) $\lim_{x \to \infty} \left(3 + \frac{2 - 2x}{x - 4} \right)^{\frac{x+1}{2}}$

$$\lim_{x \to \infty} \left(3 + \frac{2 - 2x}{x - 4} \right)^{\frac{x+1}{2}} =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{-6}{x - 4} \right)^{\frac{x+1}{2}} =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \left[\left(1 + \frac{-6}{x - 4} \right)^{\frac{x-4}{-6}} \right]^{\frac{-6}{x-4} \cdot \frac{x+1}{2}} =$$

$$= e^{\lim_{x \to \infty} \frac{-3x - 3}{x - 4}} = e^{-3}$$

k) $\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{3x^3 + 2}{x^2 + 5} \cdot \frac{4x - 1}{6x^2 + 3} \right)$

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{3x^3 + 2}{x^2 + 5} \cdot \frac{4x - 1}{6x^2 + 3} \right) =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{12x^4 - 3x^3 + 8x - 2}{6x^4 + 33x^2 + 15} =$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{12x^4}{6x^4} = 2$$

l) $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{3 + x - 3x^2}{1 - 2x^2} \right)^{3 - x}$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{3 + x - 3x^2}{1 - 2x^2} \right)^{3 - x} =$$

$$= \left(\lim_{x \to +\infty} \frac{3 + x - 3x^2}{1 - 2x^2} \right)^{\lim_{x \to +\infty} (3 - x)} =$$

$$= \left(\lim_{x \to +\infty} \frac{-3x^2}{-2x^2} \right)^{\lim_{x \to +\infty} (3 - x)} =$$

$$= \left(\frac{3}{2} \right)^{-\infty} = \left(\frac{2}{3} \right)^{+\infty} = 0$$

4. **Troba el límit de la funció $f(x) = \frac{x^3 - 5x^2 + 6x}{x^3 - 3x^2 + 2x}$ en $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$ i $x = 3$.**

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^3 - 5x^2 + 6x}{x^3 - 3x^2 + 2x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x(x^2 - 5x + 6)}{x(x^2 - 3x + 2)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 3x + 2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 5x^2 + 6x}{x^3 - 3x^2 + 2x} = \frac{2}{0} = \infty$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 5x^2 + 6x}{x^3 - 3x^2 + 2x} =$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{(x - 2)(x^2 - 3x)}{(x - 2)(x^2 - x)} =$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 3x}{x^2 - x} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^3 - 5x^2 + 6x}{x^3 - 3x^2 + 2x} = \frac{0}{6} = 0$$

5. **Calcula els següents límits de funcions:**

a) $\lim_{x \to 5} \frac{x - \sqrt{3x + 10}}{x^2 - 25}$

$$\lim_{x \to 5} \frac{x - \sqrt{3x + 10}}{x^2 - 25} =$$

$$= \lim_{x \to 5} \frac{x^2 - (\sqrt{3x + 10})^2}{(x^2 - 25)(x + \sqrt{3x + 10})} =$$

$$= \lim_{x \to 5} \frac{x^2 - 3x - 10}{(x^2 - 25)(x + \sqrt{3x + 10})} =$$

$$= \lim_{x \to 5} \frac{(x - 5)(x + 2)}{(x - 5)(x + 5)(x + \sqrt{3x + 10})} =$$

$$= \lim_{x \to 5} \frac{x+2}{(x+5)\left(x+\sqrt{3x+10}\right)} =$$

$$= \frac{7}{10 \cdot 10} = \frac{7}{100}$$

b) $\lim_{x \to 0} \left(\frac{x+1}{6x^2} - \frac{2x+3}{3x^3} \right)$

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{x+1}{6x^2} - \frac{2x+3}{3x^3} \right) =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x(x+1) - 2(2x+3)}{6x^3} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x^2 + x - 4x - 6}{6x^3} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x^2 - 3x - 6}{6x^3} = \frac{-6}{0} = \infty$$

c) $\lim_{x \to 1} \left(\frac{2x+3}{x^2-1} : \frac{2x+2}{x-1} \right)$

$$\lim_{x \to 1} \left(\frac{2x+3}{x^2-1} : \frac{2x+2}{x-1} \right) =$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(2x+3)(x-1)}{(x^2-1)(2x+2)} =$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(2x+3)(x-1)}{(x-1)(x+1)(2x+2)} =$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{2x+3}{(x+1)(2x+2)} = \frac{5}{2 \cdot 4} = \frac{5}{8}$$

d) $\lim_{x \to -1} \frac{x^2 + 2x + 1}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}$

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2 + 2x + 1}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1} =$$

$$= \lim_{x \to -1} \frac{(x+1)^2}{(x+1)^3} =$$

$$= \lim_{x \to -1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{0} = \infty$$

e) $\lim_{x \to 0} \left(\frac{2x^3 - 5x^2 + 7x}{3x^2 - 4x} \right)^{\frac{8x^2 + x}{3x}}$

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{2x^3 - 5x^2 + 7x}{3x^2 - 4x} \right)^{\frac{8x^2 + x}{3x}} =$$

$$= \left[\lim_{x \to 0} \frac{x(2x^2 - 5x + 7)}{x(3x-4)} \right]^{\lim_{x \to 0} \frac{x(8x+1)}{3x}} =$$

$$= \left(\lim_{x \to 0} \frac{2x^2 - 5x + 7}{3x - 4} \right)^{\lim_{x \to 0} \frac{8x+1}{3}} =$$

$$= \left(\frac{7}{-4} \right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-\frac{7}{4}} = -\sqrt[3]{\frac{7}{4}}$$

f) $\lim_{x \to 2} \left(\frac{x^3 + 4}{x^2 + 2x + 2} \right)^{\frac{1}{x}}$

$$\lim_{x \to 2} \left(\frac{x^3 + 4}{x^2 + 2x + 2} \right)^{\frac{1}{x}} =$$

$$= \left(\lim_{x \to 2} \frac{x^3 + 4}{x^2 + 2x + 2} \right)^{\lim_{x \to 2} \frac{1}{x}} =$$

$$= \left(\frac{6}{5} \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{6}{5}}$$

g) $\lim_{x \to -2} \frac{3x^2 - 9x - 30}{16 + 2x^3}$

$$\lim_{x \to -2} \frac{3x^2 - 9x - 30}{16 + 2x^3} =$$

$$= \lim_{x \to -2} \frac{(x+2)(3x-15)}{(x+2)(2x^2 - 4x + 8)} =$$

$$= \lim_{x \to -2} \frac{3x - 15}{2x^2 - 4x + 8} = -\frac{7}{8}$$

h) $\lim_{x \to 3} \frac{x^3 - 2x^2 - 3x}{27 - x^3}$

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^3 - 2x^2 - 3x}{27 - x^3} =$$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{(x-3)(x^2 + x)}{(x-3)(-x^2 - 3x - 9)} =$$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{x^2 + x}{-x^2 - 3x - 9} = -\frac{4}{9}$$

i) $\lim_{x \to -3} \frac{3x + 9}{x^3 + 27}$

$$\lim_{x \to -3} \frac{3x + 9}{x^3 + 27} =$$

$$= \lim_{x \to -3} \frac{3(x+3)}{(x+3)(x^2 - 3x + 9)} =$$

$$= \lim_{x \to -3} \frac{3}{x^2 - 3x + 9} = \frac{1}{9}$$

6. **Donada la funció $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 2}{x^2 + 5x + 6}$, calcula'n el límit quan x tendeix a: -3^-, -3^+, -3, -2^-, -2^+, -2, 1^-, 1^+ i 1.**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -3^-} \dfrac{x^2 + x - 2}{x^2 + 5x + 6} = \dfrac{4}{0^+} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -3^+} \dfrac{x^2 + x - 2}{x^2 + 5x + 6} = \dfrac{4}{0^-} = +\infty \end{array}\right\}$$

$$\lim_{x \to -3} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 5x + 6} = \infty$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -2^-} \dfrac{x^2 + x - 2}{x^2 + 5x + 6} = \\ \quad = \lim\limits_{x \to -2^-} \dfrac{(x+2)(x-1)}{(x+2)(x+3)} = \\ \quad = \lim\limits_{x \to -2^-} \dfrac{x - 1}{x + 3} = -3 \\ \lim\limits_{x \to -2^+} \dfrac{x^2 + x - 2}{x^2 + 5x + 6} = \\ \quad = \lim\limits_{x \to -2^+} \dfrac{(x+2)(x-1)}{(x+2)(x+3)} = \\ \quad = \lim\limits_{x \to -2^+} \dfrac{x - 1}{x + 3} = -3 \end{array}\right\}$$

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 5x + 6} = -3$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x^2 + x - 2}{x^2 + 5x + 6} = 0 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x^2 + x - 2}{x^2 + 5x + 6} = 0 \end{array}\right\}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 5x + 6} = 0$$

7. **Donada la funció $f(x) = \sqrt{x - 4}$, indica'n el domini i dedueix-ne el límit quan x tendeix a: 4^-, 4^+, 4.**

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x - 4 \geqslant 0\} = [4, +\infty)$$

$$\nexists \lim_{x \to 4^-} \sqrt{x - 4}$$

ja que els valors més petits de 4 no són del domini.

$\lim\limits_{x \to 4^+} \sqrt{x - 4} = 0$, i per tant:

$$\nexists \lim_{x \to 4} \sqrt{x - 4}$$

8. **Calcula el límit de la funció definida a trossos:**

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x}{2x^2 + 2x} & x \leqslant 1 \\ \dfrac{x^2 - x}{2x - 2} & x > 1 \end{cases}$$

quan x tendeix a 0^-, 0^+, 0, 1^-, 1^+, 1, 3^-, 3^+, 3.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{x^2 - x}{2x^2 + 2x} = \\ \quad = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{x(x-1)}{2x(x+1)} = \\ \quad = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{x - 1}{2(x+1)} = -\dfrac{1}{2} \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x^2 - x}{2x^2 + 2x} = \\ \quad = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x(x-1)}{2x(x+1)} = \\ \quad = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x - 1}{2(x+1)} = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right\}$$

d'on: $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\dfrac{1}{2}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x - x}{2x^2 + 2x} = 0 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x^2 - 1}{2x - 2} = \\ \quad = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{(x-1)(x+1)}{2(x-1)} = \\ \quad = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x + 1}{2} = 1 \end{array}\right\}$$

$$\nexists \lim_{x \to 1} f(x)$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{x^2 - 1}{2x - 2} = 2 \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{x^2 - 1}{2x - 2} = 2 \end{array}\right\}$$

$$\lim_{x \to 3} f(x) = 2$$

9. **Donades les funcions:**

$$f(x) = \frac{2x^2 + 2x}{x - x^3} \text{ i}$$

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{-5x}{x+1} & \text{si } x < 0 \\[2ex] \dfrac{x^2}{x-1} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

Estudia'n la continuïtat en $x = -1$, $x = 0$ i $x = 1$.

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x - x^3 \neq 0\} = \mathbb{R} - \{0, 1, -1\}$$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x \to -1^-} f(x) &= \lim_{x \to -1^-} \frac{2x^2 + 2x}{x - x^3} = \\ &= \lim_{x \to -1^-} \frac{2x(x+1)}{(x - x^2)(x+1)} = \\ &= \lim_{x \to -1^-} \frac{2x}{x - x^2} = 1 \\ \lim_{x \to -1^+} f(x) &= \lim_{x \to -1^+} \frac{2x^2 + 2x}{x - x^3} = \\ &= \lim_{x \to -1^+} \frac{2x(x+1)}{(x - x^2)(x+1)} = \\ &= \lim_{x \to -1^+} \frac{2x}{x - x^2} = 1 \end{aligned}\right\}$$

d'on: $\nexists f(1)$, ja que $x = 1 \notin D_f$. Discontinuïtat evitable en $x = -1$.

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x \to 0^-} f(x) &= \lim_{x \to 0^-} \frac{2x^2 + 2x}{x - x^3} = \\ &= \lim_{x \to 0^-} \frac{x(2x+2)}{x(1 - x^2)} = \\ &= \lim_{x \to 0^-} \frac{2x + 2}{1 - x^2} = 2 \\ \lim_{x \to 0^+} f(x) &= \lim_{x \to 0^+} \frac{2x^2 + 2x}{x - x^3} = \\ &= \lim_{x \to 0^+} \frac{x(2x+2)}{x(1 - x^2)} = \\ &= \lim_{x \to 0^+} \frac{2x + 2}{1 - x^2} = 2 \end{aligned}\right\}$$

d'on: $\nexists f(0)$, ja que $x = 0 \notin D_f$. Discontinuïtat evitable en $x = 0$.

S'eviten les dues discontinuïtats definint una nova funció:

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & x \neq -1 \text{ i } x \neq 0 \\ 1 & x = -1 \\ 2 & x = 0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x \to 1^-} f(x) &= \lim_{x \to 1^-} \frac{2x^2 + 2x}{x - x^3} = \frac{4}{0^+} = +\infty \\ \lim_{x \to 1^+} f(x) &= \lim_{x \to 1^+} \frac{2x^2 + 2x}{x - x^3} = \frac{4}{0^-} = -\infty \\ &\nexists f(1), \text{ ja que } x = 1 \notin D_f \end{aligned}\right\}$$

Discontinuïtat asimptòtica en $x = 1$.

$$D_g = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x + 1 \neq 0 \text{ i } x - 1 \neq 0\} = \\ = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x \to -1^-} g(x) &= \lim_{x \to -1^-} \frac{-5x}{x+1} = \frac{5}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x \to -1^+} g(x) &= \lim_{x \to -1^+} \frac{-5x}{x+1} = \frac{5}{0^+} = +\infty \end{aligned}\right\}$$

Discontinuïtat asimptòtica en $x = -1$. $\nexists g(-1)$, ja que $x = -1 \notin D_g$.

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x \to 0^-} g(x) &= \lim_{x \to 0^-} \frac{-5x}{x+1} = 0 \\ \lim_{x \to 0^+} g(x) &= \lim_{x \to 0^+} \frac{x^2}{x-1} = 0 \\ f(0) &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Contínua en $x = 0$.

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x \to 1^-} g(x) &= \lim_{x \to 1^-} \frac{x^2}{x-1} = \frac{1}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x \to 1^+} g(x) &= \lim_{x \to 1^+} \frac{x^2}{x-1} = \frac{1}{0^+} = +\infty \end{aligned}\right\}$$

Discontinuïtat asimptòtica en $x = 1$. $\nexists g(1)$, ja que $x = 1 \notin D_g$.

10. Estudia la continuïtat de la funció:

$$f(x) = \frac{-2x^2 + 6x - 4}{1 - x^4}$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \,|\, 1 - x^4 \neq 0\} = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$$

Cal estudiar-la en $x = -1$ i $x = 1$.

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x \to -1^-} \frac{-2x^2 + 6x - 4}{1 - x^4} = \frac{-12}{0^-} = +\infty \\ &\lim_{x \to -1^+} \frac{-2x^2 + 6x - 4}{1 - x^4} = \frac{-12}{0^+} = -\infty \\ &\nexists f(-1), \text{ ja que } x = -1 \notin D_f \end{aligned}\right\}$$

Discontinuïtat asimptòtica en $x = -1$.

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to 1^-}\frac{-2x^2+6x-4}{1-x^4}=\\ \displaystyle=\lim_{x\to 1^-}\frac{(x-1)(-2x+4)}{(x-1)(-x^3-x^2-x-1)}=\\ \displaystyle=\lim_{x\to 1^-}\frac{-2x+4}{-x^3-x^2-x-1}=-\frac{1}{2}\\ \displaystyle\lim_{x\to 1^+}\frac{-2x^2+6x-4}{1-x^4}=\\ \displaystyle=\lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)(-2x+4)}{(x-1)(-x^3-x^2-x-1)}=\\ \displaystyle=\lim_{x\to 1^+}\frac{-2x+4}{-x^3-x^2-x-1}=-\frac{1}{2}\\ \nexists\, f(1),\text{ ja que } x=1\notin D_g\end{array}\right\}$$

Discontinuïtat evitable en $x = 1$. S'evita definint una nova funció:

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & x\neq 1\\ -\dfrac{1}{2} & x=1\end{cases}$$

11. En la funció

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{px+1}{x-4} & \text{si } x\leqslant 1\\ \dfrac{x-1}{x^2-1} & \text{si } x>1\end{cases}$$

a) **Troba el valor de *p* perquè sigui contínua en *x* = 1.**

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{px+1}{x-4}=\frac{p+1}{-3}\\ \displaystyle\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{x-1}{x^2-x}=\\ \displaystyle\qquad=\lim_{x\to 1^+}\frac{x-1}{x(x-1)}=\\ \displaystyle\qquad=\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x}=1\\ \displaystyle f(1)=\frac{p+1}{-3}\end{array}\right\}$$

Si ha de ser contínua en $x = 1$ $\rightarrow$

$$\rightarrow \frac{p+1}{-3}=1\rightarrow p=-4$$

b) **Hi ha algun altre punt en què la funció és discontínua? Justifica'n la resposta.**

No, perquè $D_f = \mathbb{R}$. Per a $p = -4$ $f(x)$ és contínua en tots els reals.

12. Estudia la continuïtat de la funció:

$$g(x)=\begin{cases}2x+1 & \text{si}\leqslant -1\\ \dfrac{x+3}{2x} & \text{si } -1<x\leqslant 1\\ \dfrac{x}{x-2} & \text{si } x>1\end{cases}$$

$D_g = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x \neq 0 \text{ i } x - 2 \neq 0\} = \mathbb{R} - \{0, 2\}$.

Cal estudiar la continuitat en $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$ i $x = 2$.

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to -1^-}g(x)=\lim_{x\to -1^-}(2x+1)=-1\\ \displaystyle\lim_{x\to -1^+}g(x)=\lim_{x\to -1^+}\frac{x+3}{2x}=-1\\ g(-1)=-1\end{array}\right\}$$

Contínua $x = -1$.

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to 0^-}g(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{x+3}{2x}=\frac{3}{0^-}=-\infty\\ \displaystyle\lim_{x\to 0^+}g(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{x+3}{2x}=\frac{3}{0^+}=+\infty\\ \nexists\, g(0)\text{ ja que } x=0\notin D_g\end{array}\right\}$$

Discontinuïtat asimptòtica en $x = 0$.

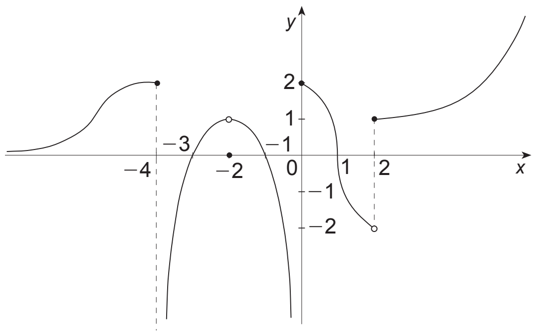
$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to 1^-}g(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{x+3}{2x}=2\\ \displaystyle\lim_{x\to 1^+}g(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{x}{x-2}=-1\\ g(1)=2\end{array}\right\}$$

Discontinuïtat de salt en $x = 1$.

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to 2^-}g(x)=\lim_{x\to 2^-}\frac{x}{x-2}=\frac{2}{0^-}=-\infty\\ \displaystyle\lim_{x\to 2^+}g(x)=\lim_{x\to 2^+}\frac{x}{x-2}=\frac{2}{0^+}=+\infty\\ \nexists\, g(2)\text{ ja que } x=2\notin D_g\end{array}\right\}$$

Discontinuïtat asimptòtica en $x = 2$.

13. **A partir de la gràfica:**



$D_f = \mathbb{R}$

a) **Indica quin és el límit de la funció quan x tendeix a $-\infty$, $+\infty$, ∞, -4^-, -4^+, -4, -2^-, -2^+, -2, 0^-, 0^+, 0, 1^-, 1^+, 1, 2^-, 2^+, 2.**

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$; $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$;

$\nexists \lim_{x \to \infty} f(x)$

$\lim_{x \to -4^-} f(x) = 2$; $\lim_{x \to -4^+} f(x) = -\infty$;

$\nexists \lim_{x \to -4} f(x)$; $f(-4) = 2$

$\lim_{x \to -2^-} f(x) = 1$; $\lim_{x \to -2^+} f(x) = 1$;

$\lim_{x \to -2} f(x) = 1$; $f(-2) = 0$

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 2$;

$\nexists \lim_{x \to 0} f(x)$; $f(0) = 2$

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 0$; $\lim_{x \to 1^+} f(x) = 0$;

$\lim_{x \to 1} f(x) = 0$; $f(1) = 0$

$\lim_{x \to 2^-} f(x) = -2$; $\lim_{x \to 2^+} f(x) = 1$;

$\nexists \lim_{x \to 2} f(x)$; $f(2) = 1$

b) **Justifica i classifica les discontinuïtats de la funció representada gràficament.**

Discontinuïtat asimptòtica en $x = -4$.

Discontinuïtat evitable en $x = -2$. S'evita

definint $g(x) = \begin{cases} f(x) & x \neq -2 \\ 1 & x = -2 \end{cases}$

Discontinuïtat asimptòtica en $x = 0$.

Discontinuïtat de salt $x = 2$.

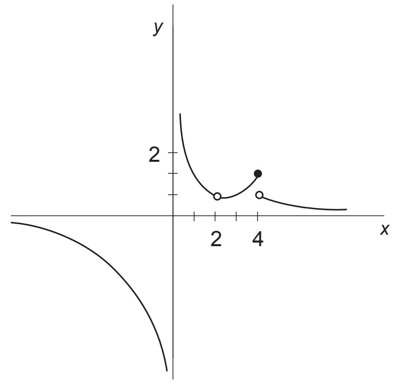
14. **Dibuixa una gràfica d'una funció que verifiqui les condicions següents:**

a) **$D_f = \mathbb{R} - \{0\}$;**

b) **$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$;**

c) **Presenti aquestes discontinuïtats: asimptòtica en $x = 0$, evitable en $x = 2$ i de salt en $x = 4$.**

Resposta oberta, per exemple:



Acabem

1. **Calcula els límits a l'infinit de les funcions polinòmiques següents:**

a) **$p(x) = 4x^4 + x^3 - 12x^2 + x - 3$**

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to -\infty} p(x) = \\ = \lim_{x \to -\infty} (4x^4 + x^3 - 12x^2 + x - 3) = \\ = \lim_{x \to -\infty} 4x^4 = +\infty \\ \lim_{x \to +\infty} p(x) = \\ = \lim_{x \to +\infty} (4x^4 + x^3 - 12x^2 + x - 3) = \\ = \lim_{x \to +\infty} 4x^4 = +\infty \end{array}\right\}$$

d'on: $\lim_{x \to \infty} p(x) = +\infty$

b) **$q(x) = -2x^3 - 6x^2 + 8$**

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to -\infty} q(x) = \lim_{x \to -\infty} (-2x^3 - 6x^2 + 8) = \\ = \lim_{x \to -\infty} (-2x^3) = +\infty \\ \lim_{x \to +\infty} q(x) = \lim_{x \to +\infty} (-2x^3 - 6x^2 + 8) = \\ = \lim_{x \to +\infty} (-2x^3) = -\infty \end{array}\right\}$$

d'on: $\lim_{x \to \infty} q(x) = \infty$

2. **Troba el límit quan $x \to -\infty$, $x \to +\infty$ i $x \to \infty$ de les funcions racionals:**

a) **$f(x) = \dfrac{7x - 3}{2x^3 - x}$**

$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} f(x) &= \lim_{x\to-\infty} \frac{7x-3}{2x^3-x} = \\ &= \lim_{x\to-\infty} \frac{7x}{2x^3} = \\ &= \lim_{x\to-\infty} \frac{7}{2x^2} = 0 \\ \lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty} \frac{7x-3}{2x^3-x} = \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{7x}{2x^3} = \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{7}{2x^2} = 0\end{aligned}\right\}$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$$

b) $\boldsymbol{g(x) = \dfrac{12x^2+2x-5}{6x^2-8x}}$

$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} g(x) &= \lim_{x\to-\infty} \frac{12x^2+2x-5}{6x^2-8x} = \\ &= \lim_{x\to-\infty} \frac{12x^2}{6x^2} = 2 \\ \lim_{x\to+\infty} g(x) &= \lim_{x\to+\infty} \frac{12x^2+2x-5}{6x^2-8x} = \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{12x^2}{6x^2} = 2 \\ \lim_{x\to\infty} g(x) &= 2\end{aligned}\right\}$$

c) $\boldsymbol{h(x) = \dfrac{x^4-2}{7x^3+20x-1}}$

$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} h(x) &= \lim_{x\to-\infty} = \frac{x^4-2}{7x^3+20x-1} = \\ &= \lim_{x\to-\infty} = \frac{x^4}{7x^3} = \\ &= \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{7} = -\infty \\ \lim_{x\to+\infty} h(x) &= \lim_{x\to+\infty} = \frac{x^4-2}{7x^3+20x-1} = \\ &= \lim_{x\to+\infty} = \frac{x^4}{7x^3} = \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{7} = +\infty\end{aligned}\right\}$$

$$\lim_{x\to\infty} h(x) = \infty$$

3. Donada la funció $\boldsymbol{f(x) = \dfrac{x^3-4x^2+3x}{x^2+x-2}}$:

a) **Calcula el límit de $f(x)$ quan $x \to -2$ i $x \to 1$.**

$$\lim_{x\to-2} \frac{x^3-4x^2+3x}{x^2+x-2} = \frac{-30}{0} = \infty$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1} \frac{x^3-4x^2+3x}{x^2+x-2} &= \\ = \lim_{x\to1} \frac{(x-1)(x^2-3x)}{(x-1)(x+2)} &= \\ = \lim_{x\to1} \frac{x^2-3x}{x+2} &= -\frac{2}{3}\end{aligned}$$

b) **Determina el límit de la funció $\left(\dfrac{1}{f}\right)(x)$ quan $x \to 0$, $x \to 1$ i $x \to 3$.**

$$\lim_{x\to0} \frac{x^2+x-2}{x^3-4x^2+3x} = \frac{-2}{0} = \infty$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1} \frac{x^2+x-2}{x^3-4x^2+3x} &= \\ = \lim_{x\to1} \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x^2-3x)} &= \\ = \lim_{x\to1} \frac{x+2}{x^2-3x} &= -\frac{3}{2}\end{aligned}$$

$$\lim_{x\to3} \frac{x^2+x-2}{x^3-4x^2+3x} = \frac{10}{0} = \infty$$

4. Calcula:

a) $\displaystyle\lim_{x\to-2}\left(\frac{x+6}{x^2-4} - \frac{x+4}{x^2-2x}\right)$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-2}\left(\frac{x+6}{x^2-4} - \frac{x+4}{x^2-2x}\right) &= \\ = \lim_{x\to-2} \frac{(x+6)x-(x+4)(x-2)}{x(x-2)(x+2)} &= \\ = \lim_{x\to-2} \frac{x^2+6x-x^2-2x+8}{x(x-2)(x+2)} &= \\ = \lim_{x\to-2} \frac{4x+8}{x(x-2)(x+2)} &= \\ = \lim_{x\to-2} \frac{4(x+2)}{x(x-2)(x+2)} &= \\ = \lim_{x\to-2} \frac{4}{x(x-2)} = \frac{4}{-2(-4)} &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

b) $\displaystyle\lim_{x \to 3} \frac{x - \sqrt{4x - 3}}{x^2 - 3x}$

$$\lim_{x \to 3} \frac{x - \sqrt{4x-3}}{x^2 - 3x} =$$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{x^2 - (\sqrt{4x-3})^2}{(x^2 - 3x)(x + \sqrt{4x-3})} =$$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{(x^2 - 3x)(x + \sqrt{4x-3})} =$$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{(x-3)(x-1)}{x(x-3)(x + \sqrt{4x-3})} =$$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{x-1}{x(x + \sqrt{4x-3})} = \frac{2}{3 \cdot 6} = \frac{1}{9}$$

c) $\displaystyle\lim_{x \to 1} \left(\frac{3x+1}{2x-2} \cdot \frac{x^2 - x}{2x+3} \right)$

$$\lim_{x \to 1} \left(\frac{3x+1}{2x-2} \cdot \frac{x^2 - x}{2x+3} \right) =$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(3x+1)(x^2 - x)}{(2x-2)(2x+3)} =$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(3x+1)x(x-1)}{2(x-1)(2x+3)} =$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{x(3x+1)}{2(2x+3)} = \frac{4}{2 \cdot 5} = \frac{2}{5}$$

5. Per calcular alguns límits cal utilitzar el mètode del doble conjugat. Consisteix a multiplicar el numerador i el denominador pel conjugat de cadascun d'ells. Tot emprant el mètode del doble conjugat, calcula:

$$\lim_{x \to 2} \frac{3x - \sqrt{x^2 + 32}}{\sqrt{x+2} - x}$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{3x - \sqrt{x^2 + 32}}{\sqrt{x+2} - x} =$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{[(3x)^2 - (\sqrt{x^2+32})^2](\sqrt{x+2} + x)}{[(\sqrt{x+2})^2 - x^2](3x + \sqrt{x^2+32})} =$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{(9x^2 - x^2 - 32)(\sqrt{x+2} + x)}{(x + 2 - x^2)(3x + \sqrt{x^2+32})} =$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{(8x^2 - 32)(\sqrt{x+2} + x)}{(-x^2 + x + 2)(3x + \sqrt{x^2+32})} =$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{8(x-2)(x+2)(\sqrt{x+2} + x)}{(x-2)(-x-1)(3x + \sqrt{x^2+32})} =$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{8(x+2)(\sqrt{x+2} + x)}{(-x-1)(3x + \sqrt{x^2+32})} =$$

$$= \frac{8 \cdot 4 \cdot 4}{-3 \cdot 12} = -\frac{32}{9}$$

6. Mitjançant una taula de valors comprova que:

$$\lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$$

Sabent que $\lim_{x \to a} [1 + f(x)]^{\frac{1}{f(x)}} = e$ si $\lim_{x \to a} f(x) = 0$, calcula:

$$\lim_{x \to 1} \left(1 + \frac{x-1}{x+1} \right)^{\frac{2}{3x-3}}$$

$g(x) = (1 + x)^{\frac{1}{x}}$

$$\left.\begin{array}{l} g(0{,}1) = (1 + 0{,}1)^{\frac{1}{0{,}1}} = 1{,}1^{10} = 2{,}5937425 \\ g(0{,}01) = (1 + 0{,}01)^{\frac{1}{0{,}01}} = \\ \quad = 1{,}01^{100} = 2{,}7048138 \\ g(0{,}001) = (1 + 0{,}001)^{\frac{1}{0{,}001}} = \\ \quad = 1{,}001^{1000} = 2{,}7169239 \end{array}\right\}$$

$$\lim_{x \to 0^+} g(x) = e$$

$$\left.\begin{array}{l} g(-0{,}1) = (1 - 0{,}1)^{\frac{1}{-0{,}1}} = 0{,}9^{-10} = \\ \quad = \left(\frac{1}{0{,}9}\right)^{10} = 1{,}\widehat{1}^{10} = 2{,}867972 \\ g(-0{,}01) = \left(\frac{1}{0{,}99}\right)^{100} = \\ \quad = 1{,}\widehat{01}^{100} = 2{,}731999 \\ g(-0{,}001) = \left(\frac{1}{0{,}999}\right)^{1000} = 1{,}\widehat{001}^{1000} = \\ \quad = 2{,}7196422 \end{array}\right\}$$

$$\lim_{x \to 0^-} g(x) = e$$

Per tant, $\lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$.

$$\lim_{x \to 1} \left(1 + \frac{x-1}{x+1}\right)^{\frac{2}{3x-3}} =$$

$$= \lim_{x \to 1} \left[\left(1 + \frac{x-1}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{x-1}}\right]^{\frac{x-1}{x+1} \cdot \frac{2}{3x-3}} =$$

$$= e^{\lim_{x \to 1} \frac{2(x-1)}{(x-1)\,3(x-1)}} = e^{\lim_{x \to 1} \frac{2}{3(x+1)}} = e^{\frac{1}{3}}$$

7. **Raona per què la funció $f(x) = \dfrac{x + |x|}{x}$ no té límit quan $x \to 0$.**

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x \to 0^-} \frac{x + |x|}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{x - x}{x} = 0 \\ &\lim_{x \to 0^+} \frac{x + |x|}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x + x}{x} = \\ &\qquad = \lim_{x \to 0^+} \frac{2x}{x} = 2 \end{aligned}\right\}$$

$$\nexists \lim_{x \to 0} \frac{x + |x|}{x}$$

8. **Calcula el límit de:**

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x^2 + x} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{3x - 9}{x^2 - 9} & \text{si } 0 \leqslant x < 3 \\ \dfrac{3x}{x + 3} & \text{si } x \geqslant 3 \end{cases}$$

quan x tendeix a $-\infty$, $+\infty$, ∞, -1^-, -1^+, -1, 0^-, 0^+, 0, 3^-, 3^+, 3.

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{x^2 + x} = \\ &\qquad = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0 \\ &\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{3x}{x + 3} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3x}{x} = 3 \end{aligned}\right\}$$

$$\nexists \lim_{x \to \infty} f(x)$$

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} \frac{x}{x^2 + x} = \frac{-1}{0^+} = -\infty \\ &\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} \frac{x}{x^2 + x} = \frac{-1}{0^-} = +\infty \end{aligned}\right\}$$

$$\lim_{x \to -1} f(x) = \infty$$

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{x}{x^2 + x} = \\ &\qquad = \lim_{x \to 0^-} \frac{x}{x(x+1)} = \\ &\qquad = \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x + 1} = 1 \\ &\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{3x - 9}{x^2 - 9} = 1 \end{aligned}\right\}$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 1$$

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} \frac{3x - 9}{x^2 - 9} = \\ &\qquad = \lim_{x \to 3^-} \frac{3(x-3)}{(x-3)(x+3)} = \\ &\qquad = \lim_{x \to 3^-} \frac{3}{x + 3} = \frac{1}{2} \\ &\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} \frac{3x}{x + 3} = \frac{3}{2} \end{aligned}\right\}$$

$$\nexists \lim_{x \to 3} f(x)$$

9. **Les funcions $f(x) = |x|$, $g(x) = \dfrac{1}{x}$ i $h(x) = \sqrt{x}$ són contínues en $x = 0$? Justifica'n les respostes.**

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} |x| = 0 \\ &\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} |x| = 0 \\ &f(0) = 0 \end{aligned}\right\}$$

$f(x)$ és contínua en $x = 0$.

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x \to 0^-} g(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^-} = -\infty \\ &\lim_{x \to 0^+} g(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^+} = +\infty \\ &\nexists\, g(0) \text{ ja que } x = 0 \notin D_g \end{aligned}\right\}$$

$g(x)$ és discontínua en $x = 0$. És una discontinuïtat asimptòtica.

$$\left.\begin{aligned} &\nexists \lim_{x \to 0^-} h(x) \text{ ja que } D_h = [0, +\infty] \\ &\lim_{x \to 0^+} h(x) = \lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0 \\ &f(0) = 0 \end{aligned}\right\}$$

$h(x)$ és discontínua en $x = 0$.

10. **La funció**

$$\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leqslant 0 \\ x + 2 & \text{si } x > 0 \end{cases}}$$

és contínua en $x = 0$? I en $x = 1$? Raona les respostes.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 1 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (x + 2) = 2 \\ f(0) = 1 \end{array}\right\}$$

En $x = 0$ la funció $f(x)$ presenta una discontinuïtat de salt.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (x + 2) = 3 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (x + 2) = 3 \\ f(1) = 3 \end{array}\right\}$$

En $x = 1$ la funció $f(x)$ és contínua.

11. **Justifica raonadament per què una funció polinòmica és contínua per a tot $x \in \mathbb{R}$.**

Sigui $p(x)$ una funció polinòmica.

$$D_p = \mathbb{R}$$

$\lim\limits_{x \to a^-} p(x) = \lim\limits_{x \to a^+} p(x) = p(a) \rightarrow$ és contínua $\forall\, a \in \mathbb{R}$.

12. **Classifica les discontinuïtats de cada funció per al valor de x que s'indica:**

a) $\boldsymbol{f(x) = \dfrac{1}{x - 3}}$ **en $x = 3$**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{1}{x - 3} = \dfrac{1}{0^-} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{1}{x - 3} = \dfrac{1}{0^+} = +\infty \\ \nexists\, f(3), \text{ ja que } x = 3 \notin D_f \end{array}\right\}$$

Discontinuïtat asimptòtica en $x = 3$.

b) $\boldsymbol{g(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < -1 \\ x^2 + 2 & \text{si } x \geqslant -1 \end{cases}}$ **en $x = -1$**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} g(x) = \lim\limits_{x \to -1^-} x = -1 \\ \lim\limits_{x \to -1^+} g(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} (x^2 + 2) = 3 \\ g(-1) = 3 \end{array}\right\}$$

Discontinuïtat de salt en $x = -1$.

13. **Estudia la continuïtat de la funció $\boldsymbol{f(x) = \dfrac{2x^2 - 8}{x^3 - 2x^2}}$ en $x = 0$ i $x = 2$.**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{2x^2 - 8}{x^3 - 2x^2} = \dfrac{-8}{0^-} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{2x^2 - 8}{x^3 - 2x^2} = \dfrac{-8}{0^-} = +\infty \\ \nexists\, f(0), \text{ ja que } x = 0 \notin D_f \end{array}\right\}$$

Discontinuïtat asimptòtica en $x = 0$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{2x^2 - 8}{x^3 - 2x^2} = \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{2(x - 2)(x + 2)}{x^2(x - 2)} = \\ \qquad = \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{2(x + 2)}{x^2} = 2 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{2x^2 - 8}{x^3 - 2x^2} = \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{2(x - 2)(x + 2)}{x^2(x - 2)} = \\ \qquad = \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{2(x + 2)}{x^2} = 2 \\ \nexists\, f(2) \text{ ja que } x = 2 \notin D_f \end{array}\right\}$$

Discontinuïtat evitable en $x = 2$.

S'evita definint $g(x) = \begin{cases} f(x) & x \neq 2 \\ 2 & x = 2 \end{cases}$

14. **Explica per què té una discontinuïtat evitable en $x = 1$ la funció:**

$$\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{x + 3}{2} & \text{si } x > 1 \end{cases}}$$

Com es pot evitar la discontinuïtat?

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 2 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x + 3}{2} = 2 \\ \nexists\, f(1) \end{array}\right\}$$

Efectivament, és una discontinuïtat evitable.

S'evita definint $g(x) = \begin{cases} 2 & x < 1 \\ \dfrac{x+3}{2} & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$

15. Troba el domini i estudia la continuïtat de les funcions irracionals:

a) $\boldsymbol{f(x) = -\sqrt{x-1}}$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x - 1 \geqslant 0\} = [1, +\infty)$$

$$\left.\begin{array}{l} \nexists \lim\limits_{x \to 1^-} \left(-\sqrt{x-1}\right) \\ \lim\limits_{x \to 1^+} \left(-\sqrt{x-1}\right) = 0 \\ f(1) = 0 \end{array}\right\}$$

És discontínua en $x = 1$.

b) $\boldsymbol{g(x) = \sqrt{4 - x^2}}$

$$D_g = \{x \in \mathbb{R} \mid 4 - x^2 \geqslant 0\} = [-2, 2]$$

$$\left.\begin{array}{l} \nexists \lim\limits_{x \to -2^-} \sqrt{4 - x^2} \\ \lim\limits_{x \to -2^+} \sqrt{4 - x^2} = 0 \\ g(-2) = 0 \end{array}\right\}$$

És discontínua en $x = -2$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} \sqrt{4 - x^2} = 0 \\ \nexists \lim\limits_{x \to 2^+} \sqrt{4 - x^2} \\ g(2) = 0 \end{array}\right\}$$

És discontínua en $x = 2$.

16. Estudia la continuïtat de la funció següent:

$$f(x) = \frac{3x - 9}{2x^2 - 18}$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x^2 - 18 \neq 0\} = \mathbb{R} - \{-3, 3\}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -3^-} \dfrac{3x - 9}{2x^2 - 18} = \dfrac{-18}{0^+} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -3^+} \dfrac{3x - 9}{2x^2 - 18} = \dfrac{-18}{0^-} = +\infty \\ \nexists f(-3) \text{ ja que } x = -3 \notin D_f \end{array}\right\}$$

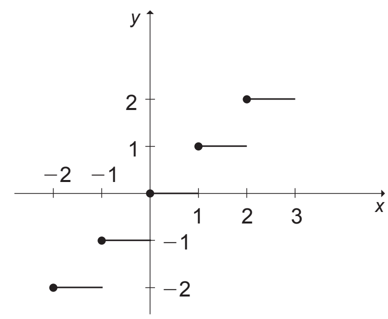
Discontinuïtat asimptòtica en $x = -3$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{3x - 9}{2x^2 - 18} = \lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{3(x-3)}{2(x-3)(x+3)} = \\ \quad = \lim\limits_{x \to 3^-} \dfrac{3}{2(x+3)} = \dfrac{1}{4} \\ \lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{3x - 9}{2x^2 - 18} = \lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{3(x-3)}{2(x-3)(x+3)} = \\ \quad = \lim\limits_{x \to 3^+} \dfrac{3}{2(x+3)} = \dfrac{1}{4} \\ \nexists f(3), \text{ ja que } x = 3 \notin D_f. \end{array}\right\}$$

Discontinuïtat evitable en $x = 3$, s'evita definint:

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & x \neq 3 \\ \dfrac{1}{4} & x = 3 \end{cases}$$

17. A partir de la gràfica, descriu tots els punts de discontinuïtat de la funció *part entera*, definida per a tot nombre real *x* com la funció *f*(*x*) que hi fa correspondre el nombre enter més gran *n* tal que *n* ⩽ *x*.



A partir de la gràfica s'observa que $\forall x \in \mathbb{Z}$, hi ha una discontinuïtat de salt i és contínua en els altres punts.

18. Descriu el domini i les discontinuïtats de les funcions següents:

a) $\boldsymbol{f(x) = \dfrac{x+3}{-x}}$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\} = \mathbb{R} - \{0\}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{x + 3}{-x} = \dfrac{3}{0^+} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x + 3}{-x} = \dfrac{3}{0^-} = -\infty \\ \nexists f(0) \text{ ja que } x = 0 \notin D_f \end{array}\right\}$$

Discontinuïtat asimptòtica en $x = 0$.

b) $\boldsymbol{g(x) = \dfrac{3x - 15}{x^2 - 5x}}$

$$D_g = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 5x \neq 0\} = \mathbb{R} - \{0, 5\}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{3x - 15}{x^2 - 5x} = \dfrac{-15}{0^+} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{3x - 15}{x^2 - 5x} = \dfrac{-15}{0^-} = +\infty \\ \nexists\, g(0), \text{ ja que } x = 0 \notin D_g \end{array}\right\}$$

Discontinuïtat asimptòtica en $x = 0$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 5^-} \dfrac{3x - 15}{x^2 - 5x} = \lim\limits_{x \to 5^-} \dfrac{3(x - 5)}{x(x - 5)} = \\ \qquad = \lim\limits_{x \to 5^-} \dfrac{3}{x} = \dfrac{3}{5} \\ \lim\limits_{x \to 5^+} \dfrac{3x - 15}{x^2 - 5x} = \lim\limits_{x \to 5^+} \dfrac{3(x - 5)}{x(x - 5)} = \\ \qquad = \lim\limits_{x \to 5^+} \dfrac{3}{x} = \dfrac{3}{5} \\ \nexists\, g(5), \text{ ja que } x = 5 \notin D_g \end{array}\right\}$$

Discontinuïtat evitable en $x = 5$.

S'evita definint $q(x) = \begin{cases} g(x) & x \neq 5 \\ \dfrac{3}{5} & x = 5 \end{cases}$

c) $\boldsymbol{h(x) = \dfrac{x^3 + x^2}{-x^2}}$

$$D_h = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \neq 0\} = \mathbb{R} - \{0\}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{x^3 + x^2}{-x^2} = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{x^2(x + 1)}{-x^2} = \\ \qquad = \lim\limits_{x \to 0^-} (-x - 1) = -1 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x^3 + x^2}{-x^2} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x^2(x + 1)}{-x^2} = \\ \qquad = \lim\limits_{x \to 0^+} (-x - 1) = -1 \\ \nexists\, h(0), \text{ ja que } x = 0 \notin D_h \end{array}\right\}$$

Discontinuïtat evitable en $x = 0$.

S'evita definint $r(x) = \begin{cases} h(x) & x \neq 0 \\ -1 & x = 0 \end{cases}$

d) $\boldsymbol{p(x) = |x^2 - 9|}$

$p(x) = |x^2 - 9|$ és pot definir així:

$$p(x) = \begin{cases} x^2 - 9 & x < -3 \text{ o } x > 3 \\ 9 - x^2 & -3 \leqslant x \leqslant 3 \end{cases}$$

$$D_p = \mathbb{R}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -3^-} p(x) = \lim\limits_{x \to -3^-} (x^2 - 9) = 0 \\ \lim\limits_{x \to -3^+} p(x) = \lim\limits_{x \to -3^+} (9 - x^2) = 0 \\ p(-3) = 0 \end{array}\right\}$$

Contínua en $x = -3$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} p(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} (9 - x^2) = 0 \\ \lim\limits_{x \to 3^+} p(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} (x^2 - 9) = 0 \\ p(3) = 0 \end{array}\right\}$$

Contínua en $x = 3$.

19. Troba el domini i estudia la continuïtat de la funció:

$$\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + 3x + 1}{x + 2} & \text{si } x < -1 \\ \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} & \text{si } -1 \leqslant x < 1 \\ \dfrac{x + 1}{2 - x} & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}}$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x + 2 \neq 0 \text{ i } 2 - x \neq 0\} = \\ = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -2^-} \dfrac{x^2 + 3x + 1}{x + 2} = \\ \qquad = \dfrac{-1}{0^-} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -2^+} \dfrac{x^2 + 3x + 1}{x + 2} = \\ \qquad = \dfrac{-1}{0^+} = -\infty \\ \nexists\, f(-2), \text{ ja que } x = -2 \notin D_f \end{array}\right\}$$

Discontinuïtat asimptòtica en $x = -2$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{x^2 + 3x + 1}{x + 2} = -1 \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = 0 \\ f(-1) = 0 \end{array}\right\}$$

Discontinuïtat de salt en $x = -1$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x^2-1}{x-1} = \\ = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{(x+1)(x-1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-}(x+1) = 2 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x+1}{2-x} = 2 \\ f(1) = 2\end{array}\right\}$$

Contínua en $x = 1$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x+1}{2-x} = \dfrac{3}{0^+} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x+1}{2-x} = \dfrac{3}{0^-} = -\infty \\ \nexists\, f(2) \text{ ja que } x = 2 \notin D_f\end{array}\right\}$$

Discontinuïtat asimptòtica en $x = 2$.

20. **Estudia la continuïtat de la funció $f(x) = |x^2 - 1|$ en els punts $x = -1$ i $x = 1$.**

$f(x) = |x^2 - 1|$ és pot definir:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x < -1 \text{ o } x > 1 \\ 1 - x^2 & -1 \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^-} (x^2-1) = 0 \\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} (1-x^2) = 0 \\ f(-1) = 0\end{array}\right\}$$

Contínua en $x = -1$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} (1-x^2) = 0 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} (x^2-1) = 0 \\ f(1) = 0\end{array}\right\}$$

Contínua en $x = 1$.

21. **El novembre de 1999, el preu del franqueig d'una carta en funció del seu pes era:**

Fins a 20 g	**0,21 €**
Més de 20 g fins a 50 g	**0,27 €**
Més de 50 g fins a 100 g	**0,45 €**
Més de 100 g fins a 200 g	**0,75 €**
Més de 200 g fins a 350 g	**1,35 €**
Més de 350 g fins a 1 kg	**1,95 €**
Més d'1 kg fins a 2 kg	**3,01 €**

a) **Representa per x la variable pes i per $f(x)$ la variable preu i escriu l'expressió algèbrica de la funció.**

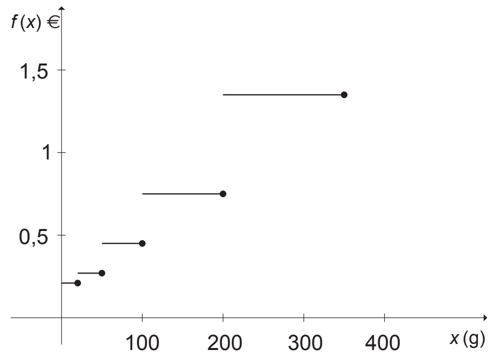
$$f(x) = \begin{cases} 0{,}21 \text{ si } 0 < x \leqslant 20 \\ 0{,}27 \text{ si } 20 < x \leqslant 50 \\ 0{,}45 \text{ si } 50 < x \leqslant 100 \\ 0{,}75 \text{ si } 100 < x \leqslant 200 \\ 1{,}35 \text{ si } 200 < x \leqslant 350 \\ 1{,}95 \text{ si } 350 < x \leqslant 1\,000 \\ 3{,}01 \text{ si } 1\,000 < x \leqslant 2\,000 \end{cases}$$

x en g i $f(x)$ en euros.

b) **Indica'n el domini.**

$$D_f = (0,\ 2\,000]$$

c) **Fes-ne la representació gràfica.**



d) **Estudia les discontinuïtats.**

És discontínua de salt en $x = 20$, $x = 50$, $x = 100$, $x = 200$, $x = 350$ i $x = 1\,000$.

22. **Troba el valor de k per tal que la funció**

$$f(x) = \begin{cases} x + k & \text{si } x \leqslant 0 \\ 2x^2 - kx + 6 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

sigui contínua en el punt $x = 0$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} (x+k) = k \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (2x^2 - kx + 6) = 6 \\ f(0) = k\end{array}\right\}$$

Contínua en $x = 0 \;\rightarrow\; k = 6$.

23. **Sigui la funció:**

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{kx}{x+3} & \text{si } x \leqslant -2 \\ \dfrac{3x-h}{x-2} & \text{si } -2 < x < 1 \\ \dfrac{x+1}{2x} & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

a) Troba els valors de *k* i *h* que fan que la funció *f*(*x*) sigui contínua en els punts *x* = −2 i *x* = 1.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -2^-} \dfrac{kx}{x+3} = -2k \\ \lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -2^+} \dfrac{3x-h}{x-2} = \dfrac{6+h}{4} \\ f(-2) = -2k \end{array}\right\}$$

Contínua en $x = -2 \rightarrow -2k = \dfrac{6+h}{4}$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{3x-h}{x-2} = h-3 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x+1}{2x} = 1 \\ f(1) = 1 \end{array}\right\}$$

Contínua en $x = 1 \rightarrow h - 3 = 1$

$$h - 3 = 1 \rightarrow h = 4$$

$$-2k = \frac{6+h}{4} = \frac{6+4}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} \rightarrow$$

$$\rightarrow k = -\frac{5}{4}$$

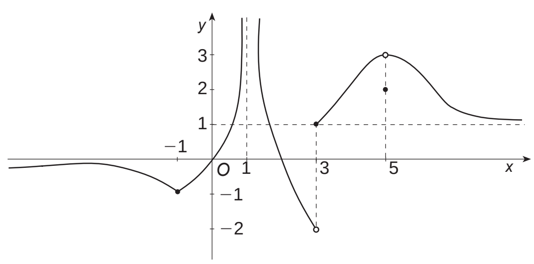
b) Hi ha algun valor de *x* per al qual la funció és discontínua? Justifica-ho.

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x + 3 \neq 0\} = \mathbb{R} - \{-3\}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -3^-} \dfrac{-5x}{4(x+3)} = \\ \qquad = \dfrac{15}{0^-} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to -3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -3^+} \dfrac{-5x}{4(x+3)} = \\ \qquad = \dfrac{15}{0^+} = +\infty \\ \nexists\, f(-3), \text{ ja que } x = -3 \notin D_f \end{array}\right\}$$

Discontinuïtat asimptòtica en $x = -3$.

24. Donada la gràfica d'una funció (fig. 11.11):



a) Indica'n el domini.

$$D_f = \mathbb{R} - \{1\}$$

b) Digues-ne el límit quan *x* tendeix a

$$-\infty,\ +\infty,\ \infty,\ -1^-,\ -1^+,\ -1,\ 1^-,$$
$$1^+,\ 1,\ 3^-,\ 3^+,\ 3,\ 5^-,\ 5^+,\ 5.$$

c) Descriu-ne les discontinuïtats. Justifica-les.

b) i *c*)

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 0 \\ \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 1 \end{array}\right\} \nexists \lim\limits_{x\to\infty} f(x)$$

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = -1 \\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = -1 \end{array}\right\} \lim\limits_{x\to -1} f(x) = -1 \\ f(-1) = -1 \end{array}\right\}$$

Contínua en $x = -1$.

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \lim\limits_{x\to 1} f(x) = +\infty \\ \nexists\, f(1), \text{ ja que } x = 1 \notin D_f \end{array}\right\}$$

Discontinuïtat asimptòtica en $x = 1$.

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = -2 \\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = 1 \end{array}\right\} \nexists \lim\limits_{x\to 3} f(x) \\ f(3) = 1 \end{array}\right\}$$

Discontinuïtat de salt en $x = 3$.

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 5^-} f(x) = 3 \\ \lim\limits_{x\to 5^+} f(x) = 3 \end{array}\right\} \lim\limits_{x\to 5} f(x) = 3 \\ f(5) = 2 \end{array}\right\}$$

Discontinuïtat evitable en $x = 5$.

S'evita definint $g(x) = \begin{cases} f(x) & x \neq 5 \\ 3 & x = 5 \end{cases}$