Comencem

- **En un problema de física es demana el temps que triga una pilota a assolir una certa altura. Un estudiant, que ha resolt el problema correctament, arriba a la solució $t = \sqrt{3}$ s. La resposta que dóna és $t = 1{,}732050808$ s. Et sembla que és correcta aquesta resposta?**

  No té cap sentit expressar el resultat amb tantes xifres decimals, ja que no hi ha cap aparell de mesura de temps que pugui apreciar fins a la milionèsima de segon.

- **Si $a \simeq 5{,}325$ i $b \simeq 2{,}434$, calcula $a + b$ i $a\,b$ i indica en cada cas les xifres decimals correctes.**

  $a \simeq 5{,}325 \qquad b \simeq 2{,}434$

  $$\begin{array}{l} 5{,}3245 \leqslant a < 5{,}3255 \\ 2{,}4335 \leqslant b < 2{,}4345 \\ \hline 7{,}7580 \leqslant a + b < 7{,}7600 \rightarrow a + b \simeq 7{,}75 \end{array}$$

  Si en lloc de sumar multipliquem ordenadament, s'obté:

  $$12{,}95717075 \leqslant a \cdot b < 12{,}96492975$$

  Per tant, $a \cdot b \simeq 12{,}9$.

Exercicis

1. **Calcula la longitud dels segments indicats a continuació. Expressa'n el resultat de manera exacta i utilitza la calculadora per obtenir-ne una aproximació arrodonida a les centèsimes:**

a) **La diagonal d'un rectangle de costats 3 i 5 cm.**

Diagonal: d

$$d = \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{9 + 25} = \sqrt{34} \text{ cm} \simeq 5{,}83 \text{ cm}$$

b) **El diàmetre d'una circumferència la longitud de la qual és 10 cm.**

Diàmetre: d

$$d = \frac{L}{\pi} = \frac{10}{\pi} \text{ cm} \simeq 3{,}18 \text{ cm}$$

c) **L'altura d'un triangle equilàter de 4 cm de costat.**

Altura: h

$$h = \sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{12} \text{ cm} = 2\sqrt{3} \text{ cm} \simeq 3{,}46 \text{ cm}$$

d) **L'altura d'un con que mesura 6 cm de radi i 9 cm de generatriu.**

Altura: h

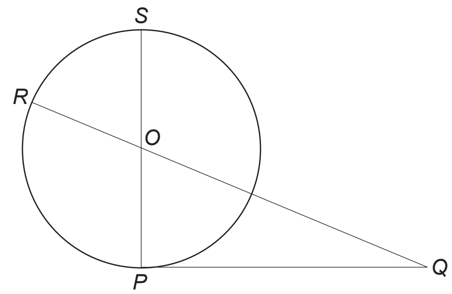
$$h = \sqrt{9^2 - 6^2} = \sqrt{45} \text{ cm} = 3\sqrt{5} \text{ cm} \simeq 6{,}71 \text{ cm}$$

2. **El costat més petit d'un rectangle auri mesura 2 cm. Quant mesura l'altre costat? Expressa'n el resultat de manera exacta i amb una aproximació arrodonida a les dècimes.**

Mesura $2\,\phi$, és a dir,

$$2 \cdot \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1 + \sqrt{5} \text{ cm} \simeq 3{,}2 \text{ cm}$$

3. **Sabent que $PQ = PS = 1$ dm, demostra que el segment QR mesura $\dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$ dm (fig. 2.5).**



$$QO = \sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2} \text{ dm}$$

$$QR = QO + OR = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \text{ dm}$$

4. **Classifica els nombres següents en racionals i irracionals:**

a) **$2{,}04\overset{\frown}{5}$**

Racional.

b) **$-3{,}88080080008...$**

Irracional.

c) **$1,\widehat{9}$**

Racional.

d) **$\dfrac{113}{114}$**

Racional.

e) **4,3131131113...**

Irracional.

f) **$0,\widehat{58421}$**

Racional.

5. **Indica quins d'aquests nombres són irracionals:**

a) **$\sqrt{25}$**

Racional.

b) **$1 + \pi$**

Irracional.

c) **$\sqrt{5} + 3$**

Irracional.

d) **$5\,e$**

Irracional.

e) **$3 + 2\sqrt{49}$**

Racional.

f) **$7\sqrt{5}$**

Irracional.

g) **$\sqrt{16 + 9}$**

Racional.

h) **$\sqrt{25 + 36}$**

Irracional.

i) **$\sqrt{2\,(16 + 9)}$**

Irracional.

6. **Per què el número $\dfrac{1,\widehat{2} + 0,25}{0,16}$ no pot ser irracional?**

No pot ser irracional perquè és el resultat de sumar i dividir nombres que són racionals.

7. **Calcula l'àrea d'un cercle de 4 cm de radi prenent els següents valors de π:**

a) **L'aproximació per defecte 3,1415.**

$$A = \pi r^2 \simeq 3{,}1415 \cdot 4^2 = 50{,}264 \text{ cm}^2$$

b) **L'aproximació per excés 3,1416.**

$$A = \pi r^2 \simeq 3{,}1416 \cdot 4^2 = 50{,}2656 \text{ cm}^2$$

En quin dels dos casos has obtingut una millor aproximació a la mesura real de la superfície d'aquest cercle? Per què?

La segona aproximació és més bona que la primera, ja que l'aproximació per excés del nombre π és millor que l'aproximació per defecte.

8. **Expressa de manera exacta:**

a) **La longitud d'una circumferència de 6 cm de diàmetre.**

$$L = 6\,\pi \text{ cm}$$

b) **L'àrea lateral d'un cilindre de 2 cm de radi i 5 cm de generatriu.**

$$A_{lat} = 2\,\pi\, r g = 20\,\pi \text{ cm}^2$$

c) **El volum d'un con de 5 cm de radi i 13 cm de generatriu.**

L'altura del con mesura:

$$h = \sqrt{g^2 - r^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12 \text{ cm}$$

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{\pi \cdot 5^2 \cdot 12}{3} = 100\,\pi \text{ cm}^3$$

9. **S'ha aconseguit determinar que el radi d'una circumferència mesura $\dfrac{4}{\pi}$ cm. Es pot conèixer amb exactitud la seva longitud? I l'àrea del cercle que limita? Justifica la resposta fent els càlculs corresponents.**

La longitud de la circumferència es pot conèixer amb exactitud, perquè:

$$L = 2\,\pi\, r = 2\,\pi \cdot \frac{4}{\pi} = 8 \text{ cm}$$

En canvi, només podem saber un valor aproximat de l'àrea del cercle corresponent, ja que

$$A = \pi r^2 = \pi \cdot \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 = \frac{16}{\pi} \text{ cm}^2$$

i $\dfrac{16}{\pi}$ és un nombre irracional.

$$A = \frac{16}{\pi} \text{ cm}^2 \simeq 5{,}09 \text{ cm}^2$$

10. **Quant mesura la diagonal d'un cub de 2 cm d'aresta? Expressa'n el resultat de manera exacta i aproxima'l a les centèsimes.**

Diagonal: D

$$D = \sqrt{2^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{12} \text{ cm} \simeq 3{,}46 \text{ cm}$$

11. **La longitud d'una circumferència mesura 10π cm.**

a) **Expressa'n el resultat aproximat a les centèsimes.**

$$L \simeq 314{,}16 \text{ cm}$$

b) **Quant mesura el radi d'aquesta circumferència?**

$$r = \frac{L}{2\pi} = 5 \text{ cm}$$

c) **Calcula l'àrea del cercle que limita i expressa-la de manera exacta.**

$$A = \pi r^2 = 25\pi \text{ cm}^2$$

12. **Troba cinc nombres racionals compresos entre $\frac{1}{2}$ i $\frac{2}{3}$, i ordena'ls del més petit al més gran.**

Resposta oberta. Per exemple:

$$0{,}51 < 0{,}54 < 0{,}6 < 0{,}63 < 0{,}65$$

13. **Entre quins nombres enters consecutius es troba cadascun d'aquests nombres irracionals?**

a) $\sqrt{21}$

4 i 5

b) $-\sqrt{54}$

-8 i -7

c) $3 - \sqrt{2}$

1 i 2

d) $1 + 2\pi$

7 i 8

e) $3\sqrt{2}$

4 i 5

f) $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$

1 i 2

g) $\sqrt{226}$

15 i 16

h) $-\sqrt{123}$

-12 i -11

i) $3e$

8 i 9

14. **Representa a la recta numèrica els nombres irracionals següents:**

a) $\sqrt{17}$ *b)* $\sqrt{13}$

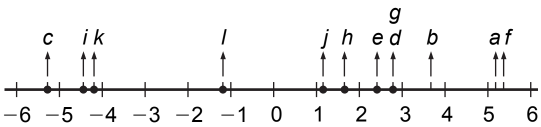
c) $-\sqrt{29}$ *d)* $\sqrt{8}$

e) $1 + \sqrt{2}$ *f)* $3 + \sqrt{5}$

g) $2\sqrt{2}$ *h)* $\sqrt{3}$

i) $-\sqrt{20}$ *j)* $\frac{\sqrt{5}}{2}$

k) $-\sqrt{18}$ *l)* $-\sqrt{17} + 3$



15. **Compara aquests parells de nombres reals:**

a) $\frac{7}{5}$ i $\sqrt{2}$

$$\frac{7}{5} < \sqrt{2}$$

b) $1 - \sqrt{3}$ i $-0{,}73$

$$1 - \sqrt{3} < -0{,}73$$

c) π i $\sqrt{10}$

$$\pi < \sqrt{10}$$

d) $-1{,}9$ i 5

$$-1{,}9 > -2$$

e) $-\sqrt{6}$ i $-\sqrt{7}$

$$-\sqrt{6} > -\sqrt{7}$$

f) 4,9 i 5

$$4{,}9 < 5$$

g) $\sqrt{\frac{10}{8}}$ i $\sqrt{\frac{10}{9}}$

$$\frac{\sqrt{10}}{8} > \frac{\sqrt{10}}{9}$$

h) **1,3$\widehat{9}$ i 1,4**

$$-1{,}3\widehat{9} = -1{,}4$$

16. **Ordena del més petit al més gran els nombres reals següents i col·loca el signe de desigualtat que correspongui:**

$$\mathbf{2{,}\widehat{45};\ 2{,}99;\ 2{,}\widehat{9};\ -\sqrt{2};\ -1{,}42;\ 0;\ \frac{5}{2}}$$

$$-1{,}42 < -\sqrt{2} < 0 < 2{,}\widehat{45} < \frac{5}{2} < 2{,}99 < 2{,}\widehat{9}$$

17. **Escriu dos nombres racionals compresos entre:**

Resposta oberta. Per exemple:

a) **$\sqrt{5}$ i $\sqrt{6}$**

2,41 i 2,42

b) **$-\sqrt{2}$ i $-\sqrt{3}$**

−1,5 i − 1,6

c) **4 i $\sqrt{17}$**

4,05 i 4,1

d) **e i π**

2,9 i 3

18. **Expressa de manera exacta:**

a) **L'àrea d'un triangle equilàter de 4 cm de costat.**

$$A = \frac{c^2}{4}\sqrt{3} = \frac{16}{4}\sqrt{3} = 4\sqrt{3}\ \text{cm}^2$$

b) **La longitud de la diagonal d'un rectangle els costats del qual mesuren 4 i 6 cm.**

$$d = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{16 + 36} =$$
$$= \sqrt{52}\ \text{cm} = 2\sqrt{13}\ \text{cm}$$

c) **El volum d'un cilindre de 2 cm de radi i 3 cm d'altura.**

$$V = \pi r^2 g = 12\pi\ \text{cm}^3$$

d) **L'àrea d'un hexàgon regular inscrit en una circumferència de 8 cm de diàmetre.**

Costat de l'hexàgon: $c = \dfrac{d}{2} = 4$ cm

$$A = \frac{3c^2}{2}\sqrt{3} = \frac{3\cdot 4^2}{2}\sqrt{3} = 24\sqrt{3}\ \text{cm}^2$$

19. **Aproxima per defecte i per excés fins a les mil·lèsimes cadascun dels nombres irracionals següents:**

a) **$\sqrt{3}$** *b)* **e** *c)* **π**

Resposta oberta. Per exemple, prenent 4 xifres decimals per a cada nombre:

	Per defecte	*Per excés*
$\sqrt{3}$	1,7320	1,7321
e	2,7182	2,7183
π	3,1415	3,1416

20. **Extreu factor comú de:**

a) **$3\sqrt{2} + 5\sqrt{2}$**

$$(3 + 5)\sqrt{2}$$

b) **$7\pi - 3\pi + \pi$**

$$(7 - 3 + 1)\pi$$

c) **$4\sqrt{a} + 5\sqrt{a} - 2\sqrt{a}$**

$$(4 + 5 - 2)\sqrt{a}$$

d) **$\sqrt{5}\,a + \sqrt{5}\,b - \sqrt{5}\,c$**

$$\sqrt{5}\,(a + b - c)$$

21. **Les operacions amb nombres irracionals que s'indiquen a continuació donen com a resultat un nombre racional. Calcula'l en cada cas.**

a) **$(\sqrt{10})^2$**

$$(\sqrt{10})^2 = 10$$

b) **$(15 + 2\sqrt{3})(15 - 2\sqrt{3})$**

$$(15 + 2\sqrt{3})(15 - 2\sqrt{3}) = 225 - 12 = 213$$

c) **$(3\sqrt{7})^2$**

$$(3\sqrt{7})^2 = 9\cdot 7 = 63$$

d) **$(7\pi - 2\pi) : 3\pi$**

$$(7\pi - 2\pi) : 3\pi = 5\pi : 3\pi = \frac{5}{3}$$

e) **$(\sqrt{6})^2 - \dfrac{2}{3}$**

$$(\sqrt{6})^2 - \frac{2}{3} = 6 - \frac{2}{3} = \frac{16}{3}$$

f) $\sqrt{(7-\sqrt{2})(7+\sqrt{2})-11}$

$$\sqrt{(7-\sqrt{2})(7+\sqrt{2})-11} = \\ = \sqrt{49-2-11} = \sqrt{36} = 6$$

22. **Si x, y, z i t representen quatre nombres reals, escriu cadascuna d'aquestes expressions com un producte de dos factors:**

a) $x^2y + xy^2$

$$x^2y + xy^2 = xy(x+y)$$

b) $x(y+z) + t(y+z)$

$$x(y+z) + t(y+z) = (y+z)(x+t)$$

c) $z^3 + z^2 + z$

$$z^3 + z^2 + z = z(z^2 + z + 1)$$

d) $x^2 + 2xy + y^2 + t(x+y)$

$$x^2 + 2xy + y^2 + t(x+y) = \\ = (x+y)^2 + t(x+y) = (x+y)(x+y+t)$$

e) $z(x-t) - x^2 + 2xt - t^2$

$$z(x-t) - x^2 + 2xt - t^2 = \\ = z(x-t) - (x-t)^2 = (x-t)(z-x+t)$$

23. **Calcula sense utilitzar la calculadora:**

a) $\sqrt[3]{1000}$

10

b) $\sqrt[4]{1296}$

± 6

c) $\sqrt{\dfrac{25}{81}}$

$\pm\dfrac{5}{9}$

d) $\sqrt[5]{-1}$

-1

e) $\sqrt[3]{0{,}001}$

$0{,}1$

f) $\sqrt[5]{\dfrac{1}{32}}$

$\dfrac{1}{2}$

24. **Tot i que a primer cop d'ull no ho sembli, els resultats de les arrels següents són tots racionals. Calcula'ls.**

a) $\sqrt{\dfrac{8}{18}}$

$$\sqrt{\frac{8}{18}} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \pm\frac{2}{3}$$

b) $\sqrt[3]{\dfrac{2}{16}}$

$$\sqrt[3]{\frac{2}{16}} = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$$

c) $\sqrt{\dfrac{50}{98}}$

$$\sqrt{\frac{50}{98}} = \sqrt{\frac{25}{49}} = \pm\frac{5}{7}$$

d) $\sqrt[3]{\dfrac{3}{81}}$

$$\sqrt[3]{\frac{3}{81}} = \sqrt[3]{\frac{1}{27}} = \frac{1}{3}$$

25. **Expressa en forma de potència:**

a) $\sqrt[3]{7}$

$7^{\frac{1}{3}}$

b) $\sqrt[4]{a^3}$

$a^{\frac{3}{4}}$

c) $\sqrt{10}$

$10^{\frac{1}{2}}$

d) $\sqrt[5]{(a+2)^2}$

$(a+2)^{\frac{2}{5}}$

e) $\sqrt[6]{6^5}$

$6^{\frac{5}{6}}$

f) $\sqrt{\dfrac{1}{5}}$

$\left(\dfrac{1}{5}\right)^{\frac{1}{2}}$

26. **Expressa en forma d'arrel:**

a) $25^{\frac{1}{3}}$

$\sqrt[3]{25}$

b) $12^{\frac{1}{4}}$

$\sqrt[4]{12}$

c) $a^{\frac{3}{5}}$

$\sqrt[5]{a^3}$

d) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{-2}{3}}$

$\sqrt[3]{2^2}$

e) $b^{\frac{2}{7}}$

$\sqrt[7]{b^2}$

27. **Les potències d'exponent fraccionari verifiquen totes i cadascuna de les propietats de les potències d'exponent enter. Aplica aquestes propietats per expressar en funció d'una sola potència:**

a) $2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{3}}$

$$2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} = 2^{\frac{5}{6}}$$

b) $3^{\frac{2}{3}} : 2^{\frac{1}{4}}$

$$3^{\frac{2}{3}} : 3^{\frac{1}{4}} = 3^{\frac{2}{3}-\frac{1}{4}} = 3^{\frac{5}{12}}$$

c) $\left(5^{\frac{1}{3}}\right)^2$

$$\left(5^{\frac{1}{3}}\right)^2 = 5^{\frac{1}{3}\cdot 2} = 5^{\frac{2}{3}}$$

d) $\dfrac{2 \cdot \sqrt[3]{4}}{\sqrt[5]{8}}$

$$\frac{2 \cdot \sqrt[3]{4}}{\sqrt[5]{8}} = \frac{2 \cdot \sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[5]{2^3}} = \frac{2 \cdot 2^{\frac{2}{3}}}{2^{\frac{3}{5}}} =$$

$$= 2^{1+\frac{2}{3}-\frac{3}{5}} = 2^{\frac{16}{15}}$$

28. **Utilitza la calculadora i aproxima fins a les centèsimes aquests nombres irracionals:**

a) $\sqrt[3]{10}$

2,15

b) $\sqrt[5]{2,76}$

1,23

c) $\pi^{\frac{1}{4}}$

1,33

d) $\sqrt[3]{-50}$

−3,68

e) $5^{\frac{2}{3}}$

2,92

f) $\sqrt[7]{2^4}$

1,49

29. **Per simplificar una arrel del tipus $\sqrt[n]{a^m}$, cal aconseguir que *m* i *n* siguin nombres primers entre ells. Simplifica:**

a) $\sqrt[12]{a^{10}}$

$\sqrt[6]{a^5}$

b) $\sqrt[3]{a^{12}}$

a^4

c) $\sqrt[15]{3^{10}}$

$\sqrt[3]{3^2}$

d) $\sqrt[4]{64}$

$\sqrt[4]{2^6} = \sqrt{2^3}$

30. **Esbrina quina de les igualtats següents és incorrecta:**

a) $\sqrt{(a+b)^2} = a + b$

b) $\sqrt[3]{a^3 + b^3} = a + b$

c) $\sqrt{a^2 - 2ab + b^2} = a - b$

La de l'apartat *b*), ja que $(a + b)^3 \neq a^3 + b^3$.

31. **Expressa en forma d'una sola arrel:**

a) $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{5}$

$\sqrt[3]{3 \cdot 5} = \sqrt[3]{15}$

b) $2^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{5}$

$\sqrt{2} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{10}$

c) $\dfrac{\sqrt[3]{12}}{\sqrt[3]{4}}$

$$\sqrt[3]{\frac{12}{4}} = \sqrt[3]{3}$$

d) $\dfrac{3^{\frac{1}{2}} \cdot 6^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{15}}$

$$\frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{6}}{\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{15}} = \sqrt{\frac{18}{15}} = \sqrt{\frac{6}{5}}$$

e) $(\sqrt[7]{2^3})^4$

$\sqrt[7]{2^{3\cdot 4}} = \sqrt[7]{2^{12}}$

f) $3^{\frac{1}{6}} \cdot \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[6]{2}$

$\sqrt[6]{3} \cdot \sqrt[6]{3^2} \cdot \sqrt[6]{2} = \sqrt[6]{3^3 \cdot 2} = \sqrt[6]{54}$

g) $(a + b)^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{a - b}$

$\sqrt{(a+b)(a-b)} = \sqrt{a^2 - b^2}$

h) $2\sqrt{5}$

$\sqrt{4 \cdot 5} = \sqrt{20}$

i) $\sqrt{\sqrt{13}}$

$$\sqrt[4]{13}$$

j) $\sqrt{a\sqrt[3]{a^2}}$

$$\sqrt{\sqrt[3]{a^5}} = \sqrt[6]{a^5}$$

32. Expressa de la manera més senzilla possible:

a) $\sqrt{10} + 2\sqrt{10} - \dfrac{1}{2}\sqrt{10}$

$$\left(1 + 2 - \frac{1}{2}\right)\sqrt{10} = \frac{5}{2}\sqrt{10}$$

b) $3\sqrt{12} - 2\sqrt{75} + 7\sqrt{3}$

$$6\sqrt{3} - 10\sqrt{3} + 7\sqrt{3} =$$
$$= (6 - 10 + 7)\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$$

c) $\sqrt[4]{5} \cdot \sqrt[3]{2}$

$$\sqrt[12]{5^3} \cdot \sqrt[12]{2^4} = \sqrt[12]{5^3 \cdot 2^4} = \sqrt[12]{2\,000}$$

d) $\dfrac{\sqrt{7} \cdot \sqrt[3]{5}}{\sqrt[12]{10}}$

$$\frac{\sqrt[12]{7^6} \cdot \sqrt[12]{5^4}}{\sqrt[12]{10}} = \sqrt[12]{\frac{7^6 \cdot 5^4}{10}}$$

33. Racionalitza les expressions fraccionàries següents:

a) $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

b) $\dfrac{1}{2 + \sqrt{3}}$

$$\frac{1}{2 + \sqrt{3}} \cdot \frac{2 - \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} = \frac{2 - \sqrt{3}}{4 - 3} = 2 - \sqrt{3}$$

c) $\dfrac{12}{\sqrt{2}}$

$$\frac{12}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{12}{2}\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$$

d) $\dfrac{22}{4 - \sqrt{5}}$

$$\frac{22}{4 - \sqrt{5}} \cdot \frac{4 + \sqrt{5}}{4 + \sqrt{5}} = \frac{22\,(4 + \sqrt{5})}{16 - 5} =$$
$$= \frac{22\,(4 + \sqrt{5})}{11} = 2\,(4 + \sqrt{5})$$

34. Efectua les operacions indicades racionalitzant prèviament cada expressió fraccionària:

a) $\dfrac{1}{5 + \sqrt{3}} + \dfrac{2}{5 - \sqrt{3}}$

$$\frac{1}{5 + \sqrt{3}} \cdot \frac{5 - \sqrt{3}}{5 - \sqrt{3}} = \frac{5 - \sqrt{3}}{22};$$

$$\frac{2}{5 - \sqrt{3}} \cdot \frac{5 + \sqrt{3}}{5 + \sqrt{3}} = \frac{2\,(5 + \sqrt{3})}{22} =$$
$$= \frac{5 + \sqrt{3}}{11}$$

$$\frac{1}{5 + \sqrt{3}} + \frac{2}{5 - \sqrt{3}} =$$
$$= \frac{5 - \sqrt{3}}{22} + \frac{5 + \sqrt{3}}{11} = \frac{15 + \sqrt{3}}{22}$$

b) $\dfrac{7}{4 + \sqrt{2}} - \dfrac{6}{4 - \sqrt{2}}$

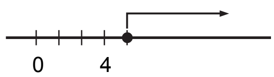
$$\frac{7}{4 + \sqrt{2}} \cdot \frac{4 - \sqrt{2}}{4 - \sqrt{2}} = \frac{7\,(4 - \sqrt{2})}{14} =$$
$$= \frac{4 - \sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{6}{4 - \sqrt{2}} \cdot \frac{4 + \sqrt{2}}{4 + \sqrt{2}} = \frac{6\,(4 + \sqrt{2})}{14} =$$
$$= \frac{3\,(4 + \sqrt{2})}{7} = \frac{12 + 3\sqrt{2}}{7}$$

$$\frac{7}{4 + \sqrt{2}} - \frac{6}{4 - \sqrt{2}} =$$
$$= \frac{4 - \sqrt{2}}{2} - \frac{12 + 3\sqrt{2}}{7} = \frac{4 - 13\sqrt{2}}{14}$$

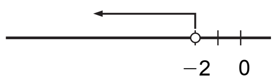
35. Representa a la recta real els conjunts de nombres següents. Després, defineix-los mitjançant desigualtats: ∞

a) **[4, ∞)**



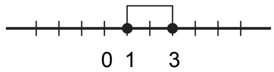
$$4 \leqslant x > +\infty$$

b) **(−∞, −2)**



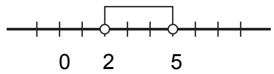
$$-\infty < x < -2$$

c) **[1, 3]**



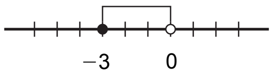
$1 \leqslant x \leqslant 3$

d) **(2, 5)**



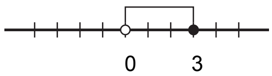
$2 < x < 5$

e) **[−3, 0)**



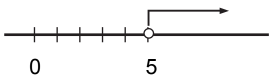
$-3 \leqslant x < 0$

f) **(0, 3]**



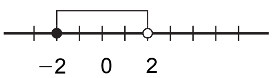
$0 < x \leqslant 3$

g) **(5, +∞)**



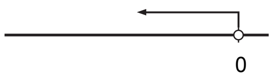
$4 < x < +\infty$

h) **[−2, 2)**



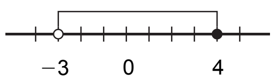
$-2 \leqslant x < 2$

i) **(−∞, 0)**



$-\infty < x < 0$

j) **(−3, 4]**



$-3 < x \leqslant 4$

36. Expressa utilitzant la nova notació els conjunts de nombres reals que verifiquen:

a) $\boldsymbol{x \geqslant -3}$

$[-3, +\infty)$

b) $\boldsymbol{x < 4}$

$(-\infty, 4)$

c) $\boldsymbol{-2 \leqslant x \leqslant 3}$

$[-2, 3]$

d) $\boldsymbol{-5 < x < -1}$

$(-5, -1)$

e) $\boldsymbol{-4 < x \leqslant 6}$

$-4 < x \leqslant 6$

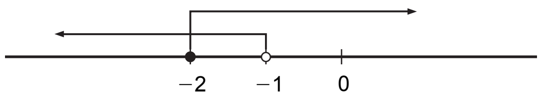
f) $\boldsymbol{x > 7}$

$x > 7$

37. Les inequacions $-1 \leqslant 3x + 5$ i $3x + 5 < 2$ tenen solucions comunes. Troba-les, representa-les gràficament i expressa-les de dues maneres diferents.

$-1 \leqslant 3x + 5 \;\rightarrow\; -6 \leqslant 3x \;\rightarrow\; x \geqslant -2$

$3x + 5 < 2 \;\rightarrow\; 3x < -3 \;\rightarrow\; x < -1$



$-2 \leqslant x < -1$, o també, $x \in [-2, 1)$.

38. Efectua aquestes operacions amb l'ajut de la calculadora. Expressa'n els resultats utilitzant la notació científica:

a) $\boldsymbol{2{,}5 \cdot 10^4 + 10^5 - 6{,}25 \cdot 10^3}$

$1{,}1875 \cdot 10^5$

b) $\boldsymbol{(10^6 : 4 \cdot 10^{-3}) : 5 \cdot 10^7}$

5

c) $\boldsymbol{\dfrac{1{,}25 \cdot 10^{12} - 10^{12}}{10^{10} + 5 \cdot 10^9}}$

$1{,}\widehat{6} \cdot 10$

d) $\boldsymbol{(10^4 - 10^7)^2}$

$9{,}98 \cdot 10^{13}$

39. Una estrella es troba a 4 anys llum de la Terra. Quina es la distància en quilòmetres que la separa del nostre planeta? Un any llum és la distància que recorre la llum en un any a la velocitat de 300 000 km/s.

$$1 \text{ any} \cdot \frac{365 \text{ dies}}{1 \text{ any}} \cdot \frac{24 \text{ h}}{1 \text{ dia}} \cdot \frac{3\,600 \text{ s}}{1 \text{ h}} = $$
$$= 31\,536\,000 \text{ s}$$

$$1 \text{ any llum} = 31\,536\,000 \text{ s} \cdot \frac{300\,000 \text{ km}}{1 \text{ s}} =$$
$$= 9{,}4608 \cdot 10^{12} \text{ km}$$

$$4 \text{ anys llum} = 4 \cdot 9{,}4608 \cdot 10^{12} =$$
$$= 3{,}78432 \cdot 10^{13} \text{ km}$$

40. **Sabent que un mol d'àtoms de ferro conté $6{,}02 \cdot 10^{23}$ àtoms d'aquest metall i que té una massa de 55,8 g, esbrina:**

a) **La massa en grams d'un àtom de ferro.**

$$1 \text{ àtom Fe} \cdot \frac{1 \text{ mol àtom Fe}}{6{,}02 \cdot 10^{23} \text{ àtom Fe}} \cdot$$

$$\cdot \frac{55{,}8 \text{ g Fe}}{1 \text{ mol àtom Fe}} = 9{,}27 \cdot 10^{-23} \text{ g Fe}$$

b) **El nombre d'àtoms continguts en 1 g de ferro.**

$$1 \text{ g Fe} \cdot \frac{1 \text{ mol àtom Fe}}{55{,}8 \text{ g Fe}} \cdot$$

$$\cdot \frac{6{,}02 \cdot 10^{23} \text{ àtom Fe}}{1 \text{ mol àtom Fe}} =$$

$$= 1{,}08 \cdot 10^{22} \text{ àtom Fe}$$

Acabem

1. **Calcula el costat, el perímetre i l'àrea d'un quadrat inscrit en una circumferència de 2 cm de radi. Quina de les tres mesures s'expressa mitjançant un nombre racional? Expressa les altres dues de manera exacta i amb una aproximació fins a les centèsimes.**

El diàmetre de la circumferència coincideix amb la diagonal del quadrat i mesura 4 cm.

Si representen per c el costat del quadrat, es verifica:

$$c^2 + c^2 = 4^2 \rightarrow 2c^2 = 16 \rightarrow c^2 = 8 \rightarrow$$

$$\rightarrow c = 2\sqrt{2} \text{ cm} \simeq 2{,}83 \text{ cm}$$

El perímetre p del quadrat mesura:

$$p = 4c = 4 \cdot 2\sqrt{2} = 8\sqrt{2} \text{ cm} \simeq 11{,}31 \text{ cm}$$

i l'àrea A del quadrat és:

$$A = c^2 = 8 \text{ cm}^2$$

L'única mesura que s'expressa mitjançant un nombre racional és la superfície del quadrat.

2. **Troba quatre nombres racionals compresos entre $2 + \sqrt{5}$ i $2 + \sqrt{6}$.**

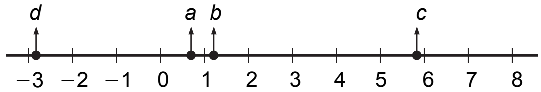
Resposta oberta. Per exemple: 4,25; 4,3; 4,42; 4,4.

3. **Representa a la recta numèrica els nombres reals següents:**

a) $\frac{3}{4}$ *b)* $1{,}1\widehat{6}$

c) $\sqrt{34}$ *d)* $-\sqrt{8}$

Representació aproximada:



4. **Calcula:**

a) $(3\sqrt{5})^2$

$$(3\sqrt{5})^2 = 9 \cdot 5 = 45$$

b) $(\sqrt{10})^4$

$$(\sqrt{10})^4 = 10^2 = 100$$

c) $(\sqrt{5} + \sqrt{3})(\sqrt{5} - \sqrt{3})$

$$(\sqrt{5} + \sqrt{3})(\sqrt{5} - \sqrt{3}) = 5 - 3 = 2$$

d) $(\sqrt{7})^2 - (\sqrt{2})^2$

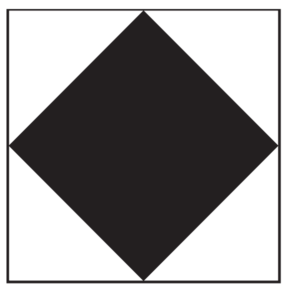
$$(\sqrt{7})^2 - (\sqrt{2})^2 = 7 - 2 = 5$$

5. **Demostra, sense utilitzar la calculadora, que el número $\sqrt{1764}$ és racional. Realitza prèviament la descomposició en factors primers de 1764.**

$$1764 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7^2$$

$$\sqrt{1764} = \sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 7^2} = 2 \cdot 3 \cdot 7 = 42$$

6. **Dibuixa un quadrat de 2 cm de costat. Determina els punts mitjans dels seus costats i uneix-los successivament. Quina figura n'obtens? Per què? Calcula'n l'àrea i el perímetre.**



S'obtè un altre quadrat: els seus costats són iguals i els quatre angles són rectes.

Àrea: $A = (\sqrt{2})^2 = 2$ cm

Perímetre: $P = 4\sqrt{2}$ cm

7. Considera un nombre positiu, eleva'l al quadrat, multiplica'l per 2 i, finalment, extreu-ne l'arrel quadrada. Demostra que el quocient de la divisió entre l'últim nombre i el primer és igual a $\sqrt{2}$.

$$x \to x^2 \to 2x^2 \to x \cdot \sqrt{2} \to \sqrt{2}$$

L'últim pas és possible perquè $x \neq 0$.

8. Calcula:

a) $(1+\sqrt{2})^2$

$$(1+\sqrt{2})^2 = 1 + 2\sqrt{2} + 2 = 3 + 2\sqrt{2}$$

b) $(3-\sqrt{3})^2$

$$(3-\sqrt{3})^2 = 9 - 6\sqrt{3} + 3 = 12 - 6\sqrt{3}$$

c) $(2\sqrt{5}+1)^2$

$$(2\sqrt{5}+1)^2 = 20 + 4\sqrt{5} + 1 = 21 + 4\sqrt{5}$$

d) $(4\sqrt{2}-2\sqrt{3})^2$

$$(4\sqrt{2}-2\sqrt{3})^2 = 32 - 16\sqrt{6} + 12 = 44 - 16\sqrt{6}$$

9. En quins casos el resultat d'una potència de base 3 és més petit que 3? Justifica'n la resposta amb exemples.

Sempre que l'exponent és més petit que 1.

Per exemple: $3^{\frac{1}{2}} \simeq 1{,}73$; $3^0 = 1$; $3^{-1} = \dfrac{1}{3}$.

10. Expressa com una sola potència:

a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2}$

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{5}{6}}$$

b) $\sqrt[3]{5} : \sqrt[4]{5}$

$$\sqrt[3]{5} : \sqrt[4]{5} = 5^{\frac{1}{3}} : 5^{\frac{1}{4}} = 5^{\frac{1}{12}}$$

c) $\sqrt[7]{a^2}$

$$\sqrt[7]{a^2} = a^{\frac{2}{7}}$$

d) $(\sqrt[4]{b^3})^2$

$$(\sqrt[4]{b^3})^2 = \sqrt[4]{b^6} = \sqrt{b^3} = b^{\frac{3}{2}}$$

11. Escriu com una única arrel:

a) $10^{\frac{2}{3}} \cdot 10^{\frac{-1}{2}}$

$$10^{\frac{2}{3}} \cdot 10^{\frac{-1}{2}} = 10^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{10}$$

b) $7^{\frac{3}{4}} : 7^{0,5}$

$$7^{\frac{3}{4}} : 7^{0,5} = 7^{\frac{3}{4}} : 7^{\frac{1}{2}} = 7^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{7}$$

c) $\left(2^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{5}}$

$$\left(2^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{5}} = 2^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{2^2} = \sqrt[5]{4}$$

d) $2^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{3}}$

$$2^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{6}$$

12. Expressa de la manera més senzilla possible el resultat de les operacions següents:

a) $\sqrt{7} + \sqrt{28} - \sqrt{63}$

$$\sqrt{7} + \sqrt{28} - \sqrt{63} = \sqrt{7} + 2\sqrt{7} - 3\sqrt{3} = (1 + 2 - 3) \cdot \sqrt{3} = 0$$

b) $\sqrt{121} + \sqrt{169} - \sqrt{225}$

$$\sqrt{121} + \sqrt{169} - \sqrt{225} = 11 + 13 - 15 = 9$$

c) $\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a^2}$

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a^2} = a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{7}{6}} = \sqrt[6]{a^7} = a\sqrt[6]{a}$$

d) $\sqrt[4]{b^3} : \sqrt{b}$

$$\sqrt[4]{b^3} : \sqrt{b} = b^{\frac{3}{4}} : b^{\frac{1}{2}} = b^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{b}$$

13. L'arrel quadrada de l'arrel cúbica d'un nombre positiu *x* té dos possibles resultats. Per què? Si un d'aquests és 2, quin és l'altre? Calcula *x*.

Perquè es tracta d'una arrel d'índex parell (índex 6)

$$\sqrt{\sqrt[3]{x}} = \sqrt[6]{x}$$

L'altre resultat és -2, l'oposat de 2.

$$\sqrt[6]{x} = \pm 2 \to x = (\pm 2)^6 = 64$$

14. Racionalitza:

a) $\dfrac{20}{\sqrt{10}}$

$$\frac{20}{\sqrt{10}} \cdot \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}} = \frac{20\sqrt{10}}{10} = 2\sqrt{10}$$

b) $\dfrac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$

$$\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{7-5} = \frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{2}$$

c) $\dfrac{6+\sqrt{6}}{6-\sqrt{6}}$

$$\frac{6+\sqrt{6}}{6-\sqrt{6}}\cdot\frac{6+\sqrt{6}}{6+\sqrt{6}}=\frac{36+12\sqrt{6}+6}{36-6}=$$
$$=\frac{42+12\sqrt{6}}{30}=\frac{7+2\sqrt{6}}{5}$$

15. Quina condició han de verificar els coeficients a, b i c de l'equació de segon grau $ax^2+bx+c=0$, per tal que les seves solucions siguin nombres reals?

Les solucions de l'equació $ax^2+bx+c=0$ són de la forma:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Per tant, perquè aquestes solucions siguin nombres reals s'ha de verificar que:

$$b^2-4ac\geqslant 0$$

16. El perímetre d'un rectangle mesura 16 cm i una de les seves diagonals, $2\sqrt{10}$ cm. Calcula'n l'àrea.

Anomenem x i y les dimensions del rectangle expressades en centímetres. Es verifica:

$$\left.\begin{array}{l}2x+2y=16\\ x^2+y^2=(2\sqrt{10})^2\end{array}\right\}\quad\left.\begin{array}{l}x+y=8\\ x^2+y^2=40\end{array}\right\}$$

$$x=8-y$$

$$(8-y)^2+y^2=40\ \rightarrow$$
$$\rightarrow\ 64-16y+y^2+y^2=40\ \rightarrow$$
$$\rightarrow\ 2y^2-16y+24=0\ \rightarrow\ y^2-8y+12=0$$

$$y=\frac{8\pm\sqrt{64-48}}{2}=\frac{8\pm 4}{2}\ \begin{cases}y_1=6\\ y_2=2\end{cases}$$

Si $y=6\ \rightarrow\ x=2$, i si $y=2$, $x=6$.

En qualsevol cas, l'àrea del rectangle és

$$A=12\ \text{cm}^2$$

17. Justifica aquestes igualtats:

a) $2\sqrt{3}=\sqrt{12}$

$$2\sqrt{3}=\sqrt{2^2\cdot 3}=\sqrt{12}$$

b) $5\sqrt{2}=\sqrt{50}$

$$5\sqrt{2}=\sqrt{5^2\cdot 2}=\sqrt{50}$$

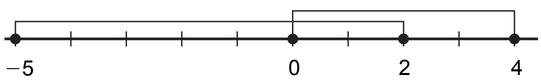
c) $\dfrac{1}{2}\sqrt{3}=\sqrt{\dfrac{3}{4}}$

$$\frac{1}{2}\sqrt{3}=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot 3}=\sqrt{\frac{1}{4}\cdot 3}=\sqrt{\frac{3}{4}}$$

d) $a^2\sqrt[n]{a}=\sqrt[n]{a^{2n+1}}$

$$a^2\sqrt[n]{a}=\sqrt[n]{a^{2n}\cdot a}=\sqrt[n]{a^{2n+1}}$$

18. Les solucions d'una inequació es troben a l'interval $[-5,2]$, i les d'una altra inequació, a l'interval $[0,4)$. Expressa mitjançant un interval les solucions comunes a totes dues inequacions. Ajuda't d'un gràfic.



Les solucions comunes són les que es troben a l'interval: $[0, 2]$.

19. Calcula:

a) $\sqrt{\dfrac{200}{450}}$

$$\sqrt{\frac{200}{450}}=\sqrt{\frac{100}{225}}=\pm\frac{10}{15}=\pm\frac{2}{3}$$

b) $\sqrt{\dfrac{3}{27}}$

$$\sqrt{\frac{3}{27}}=\sqrt{\frac{1}{9}}=\pm\frac{1}{3}$$

c) $\sqrt{\dfrac{242}{338}}$

$$\sqrt{\frac{242}{338}}=\sqrt{\frac{121}{169}}=\pm\frac{11}{13}$$

20. Quines de les desigualtats següents no són certes? Per què?

a) $\sqrt{9+25}=3+5$

b) $\sqrt{7\cdot 6}=\sqrt{7}\cdot\sqrt{6}$

c) $\sqrt{a^2+b^2}=a+b$

d) $\sqrt{5}=\dfrac{\sqrt{45}}{3}$

a) Perquè $34\neq 8^2$

c) Perquè $a^2+b^2\neq(a+b)^2$