

Comencem

● Resol aquests triangles rectangles:

Resoldre un triangle vol dir trobar-ne els costats i els angles a partir de les dades del problema.

a) $a = 10 \text{ cm}$ i $b = 8 \text{ cm}$

Hi apliquem Pitàgores per calcular el catet que falta:

$$c^2 + 8^2 = 10^2 \rightarrow c = 6 \text{ cm}$$

Per calcular l'angle agut: $\sin B = \frac{8}{10} = 0,8$.

Per trobar l'angle \widehat{B} utilitzem la calculadora: $\widehat{B} = 53,13^\circ$. L'altre angle agut és $\widehat{C} = 36,78^\circ = 90^\circ - \widehat{B}$. L'angle $\widehat{A} = 90^\circ$, perquè és un triangle rectangle.

b) $b = 6 \text{ cm}$ i $\widehat{B} = 60^\circ$

Relacionem b amb $\sin B \rightarrow \frac{b}{a} = \sin B \rightarrow a = \frac{b}{\sin B}$.

$$a = \frac{6}{\sin 60^\circ} = 6,93 \text{ cm}$$

$$\widehat{A} = 90^\circ, \widehat{C} = 30^\circ = 90^\circ - 60^\circ$$

$$\frac{c}{a} = \sin C \rightarrow$$

$$\rightarrow c = 6,93 \cdot \sin 30^\circ = 3,46 \text{ cm}$$

c) $a = \sqrt{2} \text{ cm}$ i $\widehat{C} = 45^\circ$

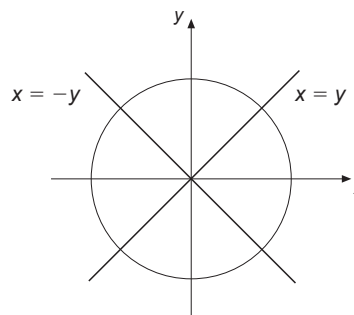
El triangle rectangle és isòsceles:

$$\widehat{B} = \widehat{C} = 45^\circ, \widehat{A} = 90^\circ.$$

$$b = c \rightarrow b^2 + c^2 = a^2 \rightarrow 2b^2 = \sqrt{2}^2 \rightarrow b^2 = 1 \rightarrow b = c = 1 \text{ cm}$$

Exercicis

1. Dibuixa una circumferència de 2 cm de radi, uns eixos de coordenades amb origen en el centre de la circumferència, la bisectriu del primer i del tercer quadrants i la bisectriu del segon i del quart quadrants.



Un cop hagi dibuixat aquesta circumferència, respon el següent:

- a) Indica la mesura de cadascun dels quatre angles que determinen aquestes bisectrius a partir de l'origen d'angles, el semieix positiu OX.

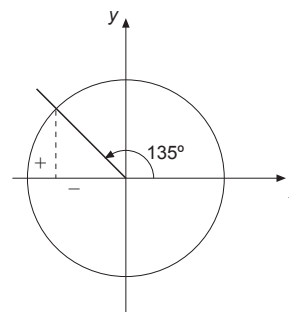
Els angles que determinen aquestes bisectrius són:

$$45^\circ, 135^\circ, 225^\circ \text{ i } 315^\circ$$

- b) Pren les mesures necessàries per calcular les raons trigonomètriques de cadascun d'aquests angles. Compara els resultats que obtinguis amb els que et dona la calculadora.

Cal mesurar l'ordenada i l'abscissa de cadascun dels 4 punts que en la circumferència determinen els 4 angles. I aplicar les definicions de les tres raons trigonomètriques per a cada angle tot considerant la longitud del radi de la circumferència traçada.

2. Dibuixa un angle de 135° . Quin és el signe de cadascuna de les tres raons trigonomètriques d'aquest angle?



$$\sin 135^\circ > 0; \cos 135^\circ < 0;$$

$$\text{tg } 135^\circ < 0$$

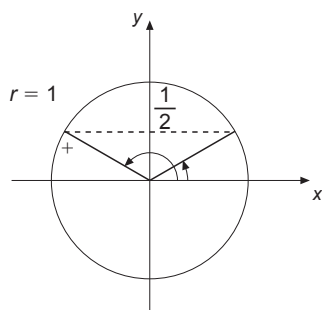
3. Si $\text{tg } \alpha = -1,5$, en quin quadrant pot estar l'angle α ? Justifica'n la resposta.

La tangent d'un angle és negativa en el segon i en el quart quadrants, ja que en aquests quadrants el sinus i el cosinus tenen signes diferents.

4. Explica per què la tangent d'un angle pot ser un nombre més gran que 1.

Com que sabem que $\text{tg } \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$, sempre que $\sin \alpha > \cos \alpha$, es verifica: $\text{tg } \alpha > 1$.

5. En una circumferència trigonomètrica dibuixa tots els angles tals que $\sin \alpha = 0,5$.



Hi ha dos angles que tenen $\sin \alpha = 0,5$. Són els angles: 30° i 150° .

6. Esbrina quin és el signe de cadascuna de les raons trigonomètriques dels angles:

$45^\circ, 230^\circ, 315^\circ, 720^\circ, 1000^\circ$

	45°	230°	315°	720°	1000°
Sinus	+	-	-	0	-
Cosinus	+	-	+	+	+
Tangent	+	+	-	0	-

Cal esbrinar en quin quadrant es troba cada angle i obtenir:

$$1000^\circ = 2 \cdot 360^\circ + 280^\circ$$

7. Relaciona les raons trigonomètriques de l'angle de 210° amb les d'un angle del primer quadrant.

Relacionem 210° amb 30° , ja que $210^\circ = 180^\circ + 30^\circ$:

$$\begin{aligned} \sin 210^\circ &= -\sin 30^\circ; \cos 210^\circ = -\cos 30^\circ; \\ \text{tg } 210^\circ &= \text{tg } 30^\circ \end{aligned}$$

8. Considera un angle de 850° . Redueix-lo a un angle més petit de 360° i relaciona'n les raons trigonomètriques amb les d'un angle del primer quadrant.

L'equivalent a 850° en la circumferència unitat és 130° , ja que:

$$850^\circ = 2 \cdot 360^\circ + 130^\circ$$

En el primer quadrant, el relacionem amb $50^\circ = 180^\circ - 130^\circ$:

$$\begin{aligned} \sin 130^\circ &= \sin 50^\circ; \cos 130^\circ = -\cos 50^\circ; \\ \text{tg } 130^\circ &= -\text{tg } 50^\circ \end{aligned}$$

9. Un angle β que $0^\circ < \beta < 360^\circ$ verifica:

$$\sin \beta - \sin 30^\circ \text{ i } \cos \beta = -\cos 30^\circ$$

- a) A quin quadrant pertany l'angle β ?

Les condicions de l'enunciat indiquen que l'angle és del tercer quadrant.

- b) Quant mesura β ?

La seva mesura és:

$$180^\circ + 30^\circ = 210^\circ$$

10. Sabent que $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$ i $90^\circ < \alpha < 180^\circ$, calcula $\sin \alpha$ i $\text{tg } \alpha$. Quany mesura α ? Utilitza la calculadora per comprovar que els resultats que has obtingut són, efectivament, correctes.

Ens indiquen que l'angle és del segon quadrant. Hi apliquem les fórmules:

$$\begin{aligned} \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha &= 1 \rightarrow \\ \rightarrow \sin^2 \alpha + \left(-\frac{4}{5}\right)^2 &= 1 \rightarrow \sin \alpha = \frac{3}{5} \\ \text{tg } \alpha &= \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{3}{5} : \left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{3}{4} \end{aligned}$$

Amb l'ajut de la calculadora trobem l'angle:

$$\alpha = 143,13^\circ$$

11. Determina tots els angles compresos entre 0° i 360° la tangent dels quals sigui igual a 1.

Els angles tals que $\text{tg } \alpha = 1$, verifiquen $\sin \alpha = \cos \alpha$. En el primer quadrant, $\alpha = 45^\circ$, i en el tercer, $\alpha = 225^\circ$.

12. Utilitza les relacions entre les raons trigonomètriques per determinar els angles positius més petits de 360° el sinus dels quals sigui igual a $-\frac{1}{2}$.

$\sin \alpha = -\frac{1}{2}$. L'angle α és del tercer quadrant. Les seves raons trigonomètriques es relacionen amb les de l'angle 30° , ja que $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$.

Els angles són:

$$180^\circ + 30^\circ = 210^\circ \text{ i } 360^\circ - 30^\circ = 330^\circ$$

$$\sin 210^\circ = \sin 330^\circ = -\frac{1}{2}$$

13. Si $\sin \alpha = 0,6$ i $90^\circ < \alpha < 180^\circ$, calcula: $\sin(180^\circ - \alpha)$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, $\cos(180^\circ - \alpha)$ i α .

L'angle α és del segon quadrant:

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha = 0,6$$

$$\begin{aligned} \cos^2 \alpha &= 1 - \sin^2 \alpha = 1 - 0,6^2 = 0,64 \rightarrow \\ &\rightarrow \cos \alpha = -0,8 \end{aligned}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{0,6}{-0,8} = -0,75$$

$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha = 0,8$$

Fent la inversa del sinus 0,6 amb la calculadora obtenim: $36,87^\circ$, però sabem que α és del segon quadrant; per tant,

$$\alpha = 180^\circ - 36,87^\circ = 143,13^\circ$$

14. a) Dedueix una expressió que et permeti calcular $\cos 3\alpha$ en funció de $\cos \alpha$ i $\sin \alpha$.

$$\begin{aligned} \cos 3\alpha &= \cos(\alpha + 2\alpha) = \\ &= \cos \alpha \cos 2\alpha - \sin \alpha \sin 2\alpha \end{aligned}$$

Substituïm els dobles:

$$\begin{aligned} \cos 3\alpha &= \cos \alpha (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) - \\ &\quad - \sin \alpha 2 \sin \alpha \cos \alpha = \\ &= \cos^3 \alpha - 3 \sin^2 \alpha \cos \alpha \end{aligned}$$

- b) Expressa $\sin 4\beta$ en funció de $\cos \beta$ i $\sin \beta$.

$$\begin{aligned} \sin 4\beta &= \sin 2 \cdot 2\beta = 2 \sin 2\beta \cos 2\beta = \\ &= 2 \cdot \sin \beta \cos \beta \cdot (\cos^2 \beta - \sin^2 \beta) \end{aligned}$$

$$\sin 4\beta = 4 \sin \beta \cos^3 \beta - 4 \sin^3 \beta \cos \beta$$

15. Sabent que $\cos \alpha = 0,8$, amb α que verifica $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ i $\sin \beta = 0,6$, amb $90^\circ < \beta < 180^\circ$, calcula:

- a) $\sin(\alpha + \beta)$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

Cal calcular prèviament $\cos \beta$ i $\sin \alpha$:

$$\sin \alpha = \pm \sqrt{1 - 0,8^2} = \pm 0,6; \text{ com que } \alpha \text{ és del primer quadrant, és } \sin \alpha = 0,6.$$

$$\cos \beta = \pm \sqrt{1 - 0,6^2} = \pm 0,8; \text{ com que } \beta \text{ és del segon quadrant, } \cos \beta = -0,8.$$

Si substituïm:

$$\sin(\alpha + \beta) = 0,6 \cdot (-0,8) + 0,8 \cdot 0,6 = 0$$

- b) $\cos(\alpha + \beta)$

$$\begin{aligned} \cos(\beta + \alpha) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = \\ &= 0,8 \cdot (-0,8) - 0,6 \cdot 0,6 = -1 \end{aligned}$$

- c) $\sin(\beta - \alpha)$

$$\begin{aligned} \sin(\alpha - \beta) &= \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha = \\ &= 0,6 \cdot (-0,8) - 0,8 \cdot 0,6 = -0,96 \end{aligned}$$

- d) $\cos(\beta - \alpha)$

$$\begin{aligned} \cos(\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = \\ &= 0,8 \cdot (-0,8) + 0,6 \cdot 0,6 = -0,28 \end{aligned}$$

- e) $\sin 2\alpha$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \cdot 0,6 \cdot 0,8 = 0,96$$

- f) $\cos 2\beta$

$$\begin{aligned} \cos 2\beta &= \cos^2 \beta - \sin^2 \beta = (-0,8)^2 - \\ &\quad - 0,6^2 = 0,28 \end{aligned}$$

16. Sabent que:

$\cos \alpha = 0,8$ ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$) i $\sin \beta = 0,6$ ($90^\circ < \beta < 180^\circ$), troba $\sin(\alpha + \beta)$, $\sin(\alpha - \beta)$, $\cos(\alpha + \beta)$, $\cos(\alpha - \beta)$, $\sin 2\alpha$ i $\cos 2\beta$.

$$\cos 30^\circ = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 15^\circ = \sin \frac{30^\circ}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos 30^\circ}{2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{1 - \sqrt{3}}}{2}$$

$$\cos 15^\circ = \cos \frac{30^\circ}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos 30^\circ}{2}} = \frac{\sqrt{1 + \sqrt{3}}}{2}$$

$$\operatorname{tg} 15^\circ = \frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ} = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}}$$

- 17.** Sense utilitzar la calculadora, determina les raons trigonomètriques dels angles de 75° i 15° a partir de les raons trigonomètriques dels angles de 45° i 30° . Recorda que:

$$\cos 45^\circ = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2} \quad \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\begin{aligned} \sin 75^\circ &= \sin (45^\circ + 30^\circ) = \\ &= \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin 75^\circ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \\ &= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos 75^\circ &= \cos (45^\circ + 30^\circ) = \\ &= \cos 45^\circ \cos 30^\circ - \sin 45^\circ \sin 30^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos 75^\circ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \\ &= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

$$\operatorname{tg} 75^\circ = \frac{\sin 75^\circ}{\cos 75^\circ} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{\sqrt{6} - \sqrt{2}}$$

- 18.** Si $\operatorname{tg} \alpha = 2$ i $\operatorname{tg} \beta = 3$, calcula $\operatorname{tg} (\alpha + \beta)$, $\operatorname{tg} (\alpha - \beta)$, $\operatorname{tg} 2\alpha$ i $\operatorname{tg} 2\beta$.

$$\operatorname{tg} (\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta} = \frac{2 + 3}{1 - 2 \cdot 3} = -1$$

$$\operatorname{tg} (\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} = \frac{2 - 3}{1 + 2 \cdot 3} = -\frac{1}{7}$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{2 \cdot 2}{1 - 2^2} = \frac{4}{-3} = -\frac{4}{3}$$

$$\operatorname{tg} 2\beta = \frac{2 \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg}^2 \beta} = \frac{2 \cdot 3}{1 - 3^2} = \frac{6}{-9} = -\frac{2}{3}$$

- 19.** Demosta que $\sin 90^\circ = 1$ utilitzant l'expressió que obtinguis de $\sin 3x$ a partir de $\sin \alpha$ i $\cos \alpha$ i substituint després α per 30° .

$$\sin 90^\circ = \sin (3 \cdot 30^\circ)$$

$$\sin 3\alpha = \sin (\alpha + 2\alpha) =$$

$$= \sin \alpha \cos 2\alpha + \cos \alpha \sin 2\alpha =$$

$$= \sin \alpha (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) +$$

$$+ \cos \alpha 2 \sin \alpha \cos \alpha = -\sin^3 \alpha + 3 \sin \alpha \cos^2 \alpha$$

$$\sin 90^\circ = -\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 3 \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 =$$

$$= -\frac{1}{8} + \frac{9}{8} = 1$$

- 20.** Sabent que $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ i $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, troba:

$$\sin \frac{\alpha}{2}, \cos \frac{\alpha}{2} \text{ i } \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$$

L'angle α és el del primer quadrant i $\frac{\alpha}{2}$ també. Per tant, les tres raons trigonomètriques són positives:

$$\sin \alpha = \frac{3}{5}; \cos \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}$$

$$\begin{aligned} \sin \frac{\alpha}{2} &= \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{4}{5}}{2}} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{10}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos \frac{\alpha}{2} &= \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{4}{5}}{2}} = \\ &= \sqrt{\frac{9}{10}} \end{aligned}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$$

- 21.** Transforma en producte:

Es verifica: $1 = \sin 90^\circ$ i $1 = \cos 90^\circ$. Si hi apliquem les fórmules:

a) $1 - \sin \alpha$

$$1 - \sin \alpha = \sin 90^\circ - \sin \alpha =$$

$$= 2 \cos \frac{90^\circ + \alpha}{2} \sin \frac{90^\circ - \alpha}{2}$$

b) $1 + \cos \alpha$

$$1 + \cos \alpha = \cos 0^\circ + \cos \alpha = \\ = 2 \cos \frac{\alpha + 0}{2} \cos \frac{\alpha - 0}{2} = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}$$

c) $1 + \sin \alpha$

$$1 + \sin \alpha = \sin 90^\circ + \sin \alpha = \\ = 2 \sin \frac{90^\circ + \alpha}{2} \cos \frac{90^\circ - \alpha}{2}$$

22. Expressa en forma de producte:

a) $\sin 105^\circ + \sin 15^\circ$

$$\sin 105^\circ + \sin 15^\circ = \\ = 2 \sin \frac{105^\circ + 15^\circ}{2} \cos \frac{105^\circ - 15^\circ}{2} = \\ = 2 \sin 60^\circ \cos 45^\circ$$

b) $\sin 105^\circ - \sin 15^\circ$

$$\sin 105^\circ - \sin 15^\circ = \\ = 2 \cos \frac{105^\circ + 15^\circ}{2} \sin \frac{105^\circ - 15^\circ}{2} = \\ = 2 \cos 60^\circ \sin 45^\circ$$

23. Considera dos angles α i β tals que $\sin \alpha = \sin \beta$. Comprova que es verifica la igualtat:

$$\frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\sin \alpha - \sin \beta} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha - \beta}{2}}$$

Desenvolupem la primera part de la igualtat:

$$\frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\sin \alpha - \sin \beta} = \frac{2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}}{2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}} = \\ = \frac{\sin \frac{\alpha + \beta}{2}}{\cos \frac{\alpha + \beta}{2}} \cdot \frac{\cos \frac{\alpha - \beta}{2}}{\sin \frac{\alpha - \beta}{2}}$$

La segona fracció és la inversa de $\operatorname{tg} \frac{\alpha - \beta}{2}$. Per tant, es verifica:

$$\frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\sin \alpha - \sin \beta} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha - \beta}{2}}$$

24. Si coneixem els tres angles d'un triangle, està determinat? Per què? Com són entre ells els diferents triangles que pots dibuixar amb aquestes dades?

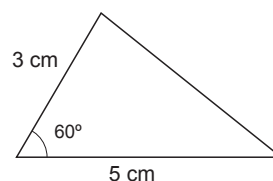
Si es coneixen els tres angles d'un triangle, aquest no és únic. Es poden dibuixar molts triangles tots semblants entre ells.

25. Un dels costats d'un triangle és a i els altres dos són $2a$ i $3a$. Està determinat el triangle? Intenta dibuixar-lo.

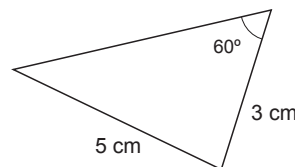
$3a = 2a + a$. La longitud del costat més gran és igual a la suma dels altres dos. Per poder determinar el triangle cal que aquesta longitud sigui més petita.

26. Dibuixa dos segments de longituds 3 i 5 cm i un angle de 60° . Construeix tots els triangles possibles en cadascuna d'aquestes situacions:

a) Quan l'angle és el que determinen els dos costats.



b) Quan no ho és. Raona cada construcció.



27. Resol el triangle en què coneixem $a = 4$ cm, $c = 8$ cm i $B = 75^\circ$.

Hi apliquem la fórmula del teorema del cosinus:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$b^2 = 4^2 + 8^2 - 2 \cdot 4 \cdot 8 \cdot \cos 60^\circ \rightarrow b = 6,93 \text{ cm}$$

Per calcular un angle del triangle cal aïllar el cosinus en la fórmula:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{6,93^2 + 8^2 - 4^2}{2 \cdot 6,93 \cdot 8} = \\ = 0,867 \rightarrow A \approx 30^\circ$$

$B = 180^\circ - 60^\circ - 30^\circ = 90^\circ$ (aproximacions a les centèsimes).

28. Els costats d'un triangle mesuren $a = 24$ cm, $b = 30$ cm i $c = 45$ cm. Està determinat el triangle? En cas afirmatiu, calcula'n els tres angles.

El triangle està determinat, ja que:

$$45 < 24 + 30$$

Per calcular els angles del triangle, hi apliquem dues vegades la fórmula anterior:

$$\begin{aligned} \cos A &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{30^2 + 45^2 - 24^2}{2 \cdot 30 \cdot 45} = \\ &= 0,87 \rightarrow A = 29,54^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos B &= \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} = \frac{45^2 + 24^2 - 30^2}{2 \cdot 45 \cdot 24} = \\ &= 0,79 \rightarrow B = 38,05^\circ \end{aligned}$$

$$C = 180^\circ - (29,54^\circ + 38,05^\circ) = 112,41^\circ$$

29. Realitzant el mínim nombre de càlculs possible, classifica aquests triangles segons els seus angles:

- a) $a = 8$ cm, $b = 7$ cm i $c = 6$ cm

$$8^2 < 7^2 + 6^2 \rightarrow \text{El triangle és acutangle.}$$

- b) $a = 5$ cm, $b = 13$ cm i $c = 12$ cm

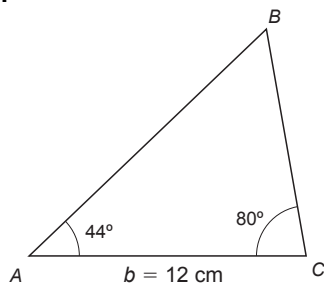
$$13^2 = 5^2 + 12^2 \rightarrow \text{El triangle és rectangle.}$$

Cal comparar el quadrat del costat més llarg amb la suma dels quadrats dels altres dos.

- c) $a = 20$ cm, $b = 10$ cm i $c = 6$ cm

$$\text{No formen triangle, ja que } 20 > 10 + 6.$$

30. Construeix un triangle en què $B = 56^\circ$, $C = 80^\circ$ i $b = 12$ cm. Resol aquest triangle calculant-ne les mesures dels altres elements.



Els elements que hi falten són $A = 180^\circ - (56^\circ + 80^\circ) = 44^\circ$ i els costats a i c que surten d'aplicar-hi el teorema del sinus:

$$\begin{aligned} \frac{a}{\sin A} &= \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \rightarrow \\ \rightarrow \frac{a}{\sin 44^\circ} &= \frac{12}{\sin 56^\circ} = \frac{c}{\sin 80^\circ} \\ a &= \frac{12 \cdot \sin 44^\circ}{\sin 56^\circ} = 10,05 \text{ cm} \\ c &= \frac{12 \cdot \sin 80^\circ}{\sin 56^\circ} = 14,25 \text{ cm} \end{aligned}$$

31. Utilitza el teorema del sinus per resoldre un triangle en què $a = 5$ cm, $b = 8$ cm i $A = 35,5^\circ$. Pots resoldre'l mitjançant el teorema del cosinus?

$$\begin{aligned} \frac{5}{\sin 35,5^\circ} &= \frac{8}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \rightarrow \\ \rightarrow \sin B &= \frac{8 \cdot \sin 35,5^\circ}{5} = 0,93 \rightarrow B = 68,30^\circ \end{aligned}$$

$$\text{L'angle } C = 180^\circ - (35,5^\circ + 68,30^\circ) = 76,2^\circ$$

$$\begin{aligned} \frac{5}{\sin 35,5^\circ} &= \frac{c}{\sin 76,2^\circ} \rightarrow \\ \rightarrow c &= \frac{5 \cdot \sin 76,2^\circ}{\sin 35,5^\circ} = 8,36 \text{ cm} \end{aligned}$$

S'hi pot aplicar també el teorema del cosinus, però els càlculs són més llargs.

32. Un dels angles aguts d'un triangle rectangle mesura 35° i un dels catets, 6 cm. Utilitza el teorema del sinus per resoldre aquest triangle i comprova que obtens els mateixos resultats que amb el procediment que coneixes de l'etapa anterior.

$$A = 90^\circ, b = 6 \text{ cm}, B = 35^\circ, C = 55^\circ$$

$$\frac{a}{\sin 90^\circ} = \frac{6}{\sin 35^\circ} = \frac{c}{\sin 55^\circ}$$

Com que $\sin 90^\circ = 1$, aleshores:

$$a = \frac{6}{\sin 35^\circ} = 10,46 \text{ cm}$$

$$c = a \sin 55^\circ = 10,46 \cdot 0,82 = 8,58 \text{ cm}$$

Són les mateixes expressions que les dels triangles rectangles.

33. Resol el triangle en què $a = 24$ cm, $b = 15$ cm i $A = 125^\circ$. Calcula'n l'àrea.

$$\begin{aligned} \frac{24}{\sin 125^\circ} &= \frac{15}{\sin B} \rightarrow \sin B = \frac{15 \cdot \sin 125^\circ}{24} = \\ &= 0,51 \rightarrow B = 30,8^\circ \end{aligned}$$

$$C = 180^\circ - (125^\circ + 30,8^\circ) = 24,2^\circ$$

$$\frac{24}{\sin 125^\circ} = \frac{c}{\sin 24,2^\circ} \rightarrow$$

$$\rightarrow c = \frac{24 \cdot \sin 24,2^\circ}{\sin 125^\circ} = 12 \text{ cm}$$

Per a l'àrea:

$$S = \frac{1}{2} bc \sin A =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 12 \sin 125^\circ = 73,72 \text{ cm}^2$$

- 34. Dos motoristes surten d'un encreuament de dues carreteres sense corbes i que formen un angle de 55° . Els motoristes es desplacen amb velocitats constants de 90 i 120 km/h, respectivament. Quina distància els separarà després de tres minuts?**

Cal calcular les distàncies recorregudes per cada motorista en 3 minuts. Aquestes distàncies són dos costats d'un triangle en el qual l'angle comprès és de $55^\circ = C$.

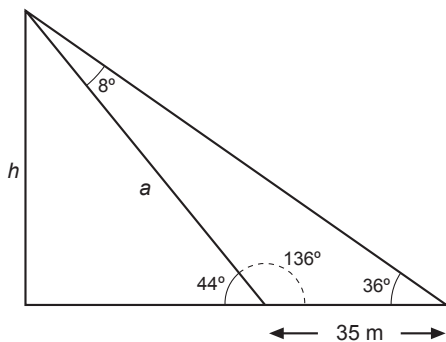
$$a = 90 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot \frac{1 \text{ h}}{60 \text{ min}} \cdot 3 \text{ min} = 4,5 \text{ km}$$

$$b = 120 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot \frac{1 \text{ h}}{60 \text{ min}} \cdot 3 \text{ min} = 6 \text{ km}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C = 4,5^2 + 6^2 - 2 \cdot 4,5 \cdot 6 \cos 55^\circ$$

$$c = 5,03 \text{ km}$$

- 35. Una sequoia de Califòrnia es veu des d'un cert punt sota un angle de 36° i, si ens hi acostem 35 m, es veu sota un angle de 44° . Calcula l'alçària de l'arbre.**



$$\frac{a}{\sin 36^\circ} = \frac{35}{\sin 8^\circ} \rightarrow a = 147,82 \text{ m}$$

$$\frac{h}{a} = \sin 44^\circ \rightarrow$$

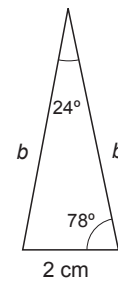
$$\rightarrow h = a \sin 44^\circ = 102,68 \text{ m}$$

La sequoia fa 102,68 m.

- 36. Calcula l'àrea d'un polígon regular de 15 costats si cada costat mesura 2 cm.**

Descomposem el polígon en 15 triangles isòsceles iguals. En cada triangle, l'angle desigual fa $\frac{360^\circ}{15} = 24^\circ$, i cadascun dels altres

dos fa $\frac{180^\circ - 24^\circ}{2} = 78^\circ$.



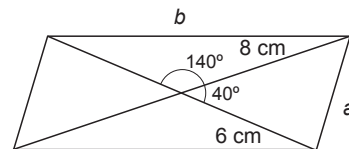
$$\frac{2}{\sin 24^\circ} = \frac{b}{\sin 78^\circ} \rightarrow$$

$$\rightarrow b = 4,8 \text{ cm}$$

$$A = \frac{2 \cdot 4,8 \cdot \sin 78^\circ}{2} = 4,69 \text{ cm}^2$$

Àrea del polígon: $15 \cdot 4,69 = 70,43 \text{ cm}^2$

- 37. Les diagonals d'un paral·lelogram mesuren 16 cm i 12 cm respectivament. Un dels angles que determinen és de 40° . Calcula la longitud dels costats del paral·lelogram i el seu perímetre. Recorda que les diagonals dels paral·lelograms es tallen en el seu punt mitjà.**



$$a^2 = 8^2 + 6^2 - 2 \cdot 8 \cdot 6 \cos 40^\circ$$

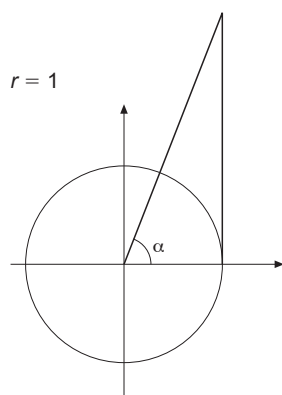
$$b^2 = 8^2 + 6^2 - 2 \cdot 8 \cdot 6 \cos 140^\circ$$

$$a = 5,14 \text{ cm}$$

$$b = 13,17 \text{ cm}$$

Acabem

1. Un angle agut α és tal que $\operatorname{tg} \alpha = 3$. Representa'l a la circumferència unitat i troba $\sin \alpha$ i $\cos \alpha$ sense utilitzar la calculadora.



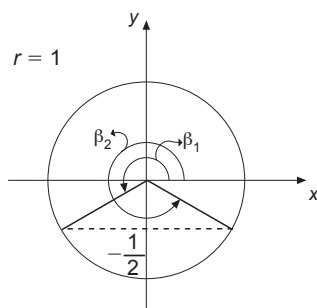
$$\operatorname{tg} \alpha = 3 = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \rightarrow \sin \alpha = 3 \cos \alpha$$

$$\begin{aligned} \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha &= 1 \rightarrow \\ \rightarrow (3 \cos \alpha)^2 + \cos^2 \alpha &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 9 \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha &= 1 \rightarrow \\ \rightarrow 10 \cos^2 \alpha = 1 \rightarrow \cos \alpha &= \frac{1}{\sqrt{10}} \end{aligned}$$

$$\sin \alpha = 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

2. Representa tots els angles β positius més petits de 360° tals que $\sin \beta = -0,5$.



Es representa $\varphi = -0,5$ en el gràfic de la circumferència unitat.

3. Si $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ i $\cos \alpha = -0,8$, calcula: $\sin \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, $\cos(-\alpha)$, $\sin(-\alpha)$ i $\operatorname{tg}(-\alpha)$.

L'angle α és del segon quadrant: $\sin \alpha > 0$ i $\operatorname{tg} \alpha < 0$.

$$\begin{aligned} \cos \alpha = -0,8 \rightarrow \sin^2 \alpha &= 1 - \cos^2 \alpha = \\ = 1 - (-0,8)^2 &= 0,36 \rightarrow \sin \alpha = 0,6 \end{aligned}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{0,6}{-0,8} = -0,75$$

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha = -0,8$$

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha = -0,6$$

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha = 0,75$$

4. Quins angles del segon, tercer i quart quadrant tenen les raons trigonomètriques relacionades amb les de l'angle 35° ? Escriu totes les relacions possibles entre les raons trigonomètriques de cadascun d'aquests angles i les de 35° .

Segon quadrant: $180^\circ - 35^\circ = 145^\circ$

$$\begin{aligned} \sin 145^\circ &= \sin 35^\circ; \cos 145^\circ = -\cos 35^\circ; \\ \operatorname{tg} 145^\circ &= -\operatorname{tg} 35^\circ \end{aligned}$$

Tercer quadrant: $180^\circ + 35^\circ = 215^\circ$

$$\begin{aligned} \sin 215^\circ &= -\sin 35^\circ; \cos 215^\circ = -\cos 35^\circ; \\ \operatorname{tg} 215^\circ &= \operatorname{tg} 35^\circ \end{aligned}$$

Quart quadrant: $360^\circ - 35^\circ = 325^\circ$

$$\begin{aligned} \sin 325^\circ &= -\sin 35^\circ; \cos 325^\circ = \cos 35^\circ; \\ \operatorname{tg} 325^\circ &= -\operatorname{tg} 35^\circ \end{aligned}$$

5. Calcula les raons trigonomètriques de l'angle de 15° en funció de les de l'angle de 30° . Després, comprova amb la calculadora que els resultats que has obtingut són correctes.

$$15^\circ = \frac{30^\circ}{2}$$

Utilitzem les fórmules de l'angle unitat:

$$\sin 15^\circ = \sqrt{\frac{1 - \cos 30^\circ}{2}} = 0,259$$

$$\cos 15^\circ = \sqrt{\frac{1 + \cos 30^\circ}{2}} = 0,966$$

$\operatorname{tg} 15^\circ = \frac{0,259}{0,966} = 0,268$. Cal fer-ne la comprovació amb la calculadora.

6. Considera un angle α del tercer quadrant tal que $\operatorname{tg} \alpha = 2$. Indica a quin quadrant es troben els angles 2α i $\frac{\alpha}{2}$. Calcula $\cos \alpha$, $\sin 2\alpha$ i $\cos \frac{2}{\alpha}$.

$\operatorname{tg} \alpha = 2$ i α del tercer quadrant indica que $225^\circ < \alpha < 270^\circ$, ja que $\operatorname{tg} 225^\circ = 1$. N'hi ha prou amb fer operacions en la desigualtat:

$450^\circ < 2\alpha < 540^\circ$. Si restem 360° :

$90^\circ < 2\alpha < 180^\circ \rightarrow$ segon quadrant

$112,5^\circ < \frac{\alpha}{2} < 135^\circ \rightarrow \frac{\alpha}{2}$ és del segon quadrant.

$$\operatorname{tg} \alpha = 2 = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \rightarrow \sin \alpha = 2 \cos \alpha \text{ i } \sin^2 \alpha +$$

$$+ \cos^2 \alpha = 1 \rightarrow (2 \cos \alpha)^2 + \cos^2 \alpha = 1$$

$$5 \cos^2 \alpha = 1 \rightarrow \cos \alpha = \frac{-1}{\sqrt{5}}; \sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}} \rightarrow$$

$\rightarrow \alpha$ és del segon quadrant.

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{-1}{\sqrt{5}}\right) =$$

$$= \frac{-4}{5}, \text{ però com que } 2\alpha \text{ és del segon qua-}$$

drant, $\sin 2\alpha = \frac{4}{5}$.

$$\cos \frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} = -0,52$$

7. **Demostra que $\sin 40^\circ + \sin 20^\circ = \cos 10^\circ$, aplicant la corresponent fórmula de transformació de suma en producte.**

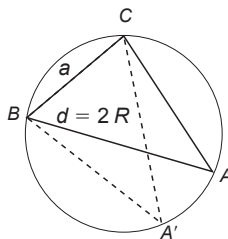
Hi apliquem:

$$\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$$

$$\sin 40^\circ + \sin 20^\circ = 2 \sin 30^\circ \cos 10^\circ =$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{2} \cos 10^\circ = \cos 10^\circ$$

8. **Demostra que la constant de proporcionalitat del teorema del sinus és $2R$, essent R el radi de la circumferència circumscrita al triangle. Per fer-ho, inscriu el triangle en una circumferència i compara'n els angles inscrits amb els d'un triangle en què un costat sigui un diàmetre de la circumferència.**



El triangle ABC és rectangle perquè AC és un diàmetre. $\widehat{A} = \widehat{A'}$ perquè comprèn el mateix arc.

$$\sin \widehat{A'} = \sin \widehat{A} = \frac{a}{d} \rightarrow \frac{a}{\sin \widehat{A}} = d = 2R$$

9. **Mirant des d'un cert punt, veiem el terrat d'un gratacels sota un angle de 60° . Amb quin angle el veuríem des d'una distància doble de l'anterior?**

Si h és l'altura i d la distància: $\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{h}{d}$

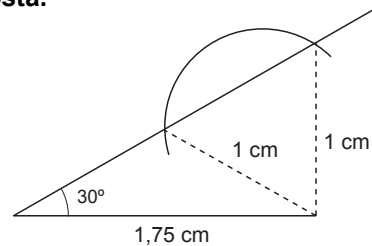
$$d = \frac{h}{\operatorname{tg} 60^\circ} \text{ i } \operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{2d} \rightarrow$$

$$\rightarrow 2d = \frac{h}{\operatorname{tg} \alpha} \rightarrow 2 \frac{h}{\operatorname{tg} 60^\circ} = \frac{h}{\operatorname{tg} \alpha}$$

$$2 \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} 60^\circ \rightarrow$$

$$\rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{tg} 60^\circ}{2} \rightarrow \alpha = 40,89^\circ$$

10. **A un fuster li han encarregat un tauler triangular. Dos dels costats d'aquest triangle han de mesurar 1 m i 1,75 m i l'angle oposat al primer costat, 30° . Té dades suficients el fuster per fer el tauler? Raona la resposta.**



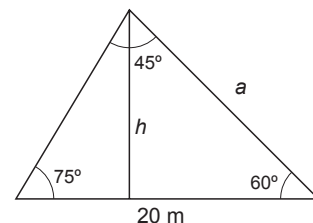
Amb les dades del problema no es pot fer un únic tauler, tal com es pot comprovar en la figura.

11. **El radar d'un vaixell detecta un objecte en direcció est a 8 km de distància i un altre objecte en direcció nord-est a 6 km. Quina distància separa els dos objectes?**

Les dues direccions formen un angle de 45° . Cal calcular el costat d'un triangle oposat a l'angle de 45° . Sabem que els altres dos són 8 km i 6 km.

$$a^2 = 8^2 + 6^2 - 2 \cdot 8 \cdot 6 \cos 45^\circ \rightarrow a = 5,66 \text{ km}$$

12. **Per fixar un pal a terra se'l subjecta mitjançant dos cables per dos punts separats 20 m. Els cables formen amb el terra angles de 75° i 60° . Determina l'altura del pal.**



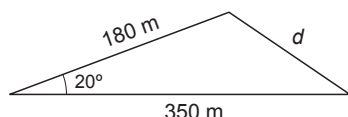
$$\frac{a}{\sin 75^\circ} = \frac{20}{\sin 45^\circ} \rightarrow a = 27,32 \text{ m}$$

$$\sin 60^\circ = \frac{h}{a} \rightarrow$$

$$\rightarrow h = a \sin 60^\circ = 23,66 \text{ m}$$

L'altura del pal és: 23,66 m.

- 13.** Un jugador de golf colpeja la pilota des de la posició de sortida per tal d'introduir-la al forat, que es troba a 350 m. El cop no ha estat gaire precís i la pilota, que s'ha desviat 20° de la direcció correcta, només ha assolit una distància de 180 m. A quina distància del forat s'ha aturat la pilota?



$$d^2 = 180^2 + 350^2 - 2 \cdot 180 \cdot 350 \cos 20^\circ$$

$$d = 191,05 \text{ m}$$

- 14.** Construeix un triangle de costats 10, 35 i 39 cm. Quant mesuren els seus angles?

Considerem:

$$a = 10 \text{ cm}, b = 35 \text{ cm} \text{ i } c = 39 \text{ cm}.$$

$$10^2 = 35^2 + 39^2 - 2 \cdot 35 \cdot 39 \cos A \rightarrow$$

$$\rightarrow A = 14,25^\circ$$

Podem repetir el teorema del cosinus o aplicar el del sinus per trobar l'angle B:

$$\frac{35}{\sin B} = \frac{10}{\sin 14,25^\circ} \rightarrow B = 59,49^\circ$$

$$C = 180^\circ - (14,25^\circ + 59,49^\circ) = 106,26^\circ$$

- 15.** Dues persones, separades una distància de 5 km, observen alhora un avió sota angles de 80° i 65° respectivament. Suposant que les persones i l'avió es troben en el mateix pla vertical, calcula l'altura a què vola l'avió.

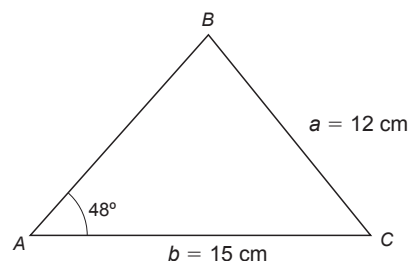
La figura seria com la de l'exercici 12. El tercer angle és 35° :

$$\frac{a}{\sin 80^\circ} = \frac{5}{\sin 35^\circ} \rightarrow a = 8,58 \text{ km}$$

$$\sin 75^\circ = \frac{h}{a} \rightarrow$$

$$\rightarrow h = a \cdot \sin 75^\circ = 8,29 \text{ km}$$

- 16.** Dibuixa el triangle ABC en què $a = 12 \text{ cm}$, $b = 15 \text{ cm}$ i $A = 48^\circ$. Resol aquest triangle.



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{12}{\sin 48^\circ} = \frac{15}{\sin B} \rightarrow \sin B = \frac{15 \cdot \sin 48^\circ}{12}$$

$$B = 68,27^\circ$$

$$C = 180^\circ - (68,27^\circ + 48^\circ) = 63,73^\circ$$

$$\frac{12}{\sin 48^\circ} = \frac{c}{\sin 63,73^\circ} \rightarrow$$

$$\rightarrow c = \frac{12 \cdot \sin 63,73^\circ}{\sin 48^\circ} = 14,48 \text{ cm}$$

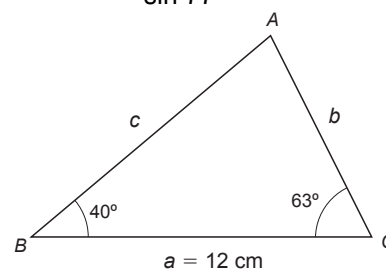
- 17.** Construeix el triangle ABC tal que $B = 40^\circ$, $C = 63^\circ$ i $a = 12 \text{ cm}$. Resol el triangle i calcula'n l'àrea.

$$A = 180^\circ - (40^\circ + 63^\circ) = 77^\circ$$

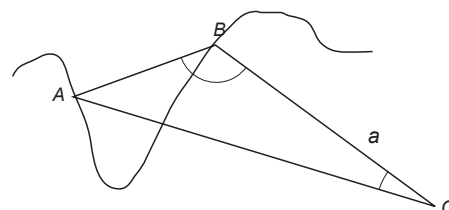
$$\frac{12}{\sin 77^\circ} = \frac{b}{\sin 40^\circ} = \frac{c}{\sin 63^\circ} \rightarrow$$

$$\rightarrow b = \frac{12 \cdot \sin 40^\circ}{\sin 77^\circ} = 7,92 \text{ cm}$$

$$c = \frac{12 \cdot \sin 63^\circ}{\sin 77^\circ} = 10,97 \text{ cm}$$

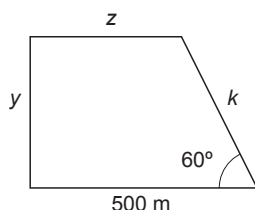


- 18.** Explica el procediment que seguiries per calcular la longitud d'un pont que cal construir per salvar un barranc.



Des dels punts B i C qualssevol de la figura es mesuren els angles \widehat{B} i \widehat{C} . A partir de la longitud a es pot mesurar l'amplada que cal que tingui el pont un cop resolt el triangle de la figura.

19. Una parcel·la de 6 ha té forma de trapezi rectangle. Un dels costats paral·lels del trapezi mesura 500 m i l'angle adjacent, 60° . Calcula quants metres de tanca es necessiten per cercar la parcel·la.



Amb les incògnites de la figura es poden plantejar les equacions següents:

$$\text{Àrea: } 6 \text{ ha} = 60\,000 \text{ m}^2 \rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} \rightarrow \frac{(500 + z)y}{2} &= 60\,000 \\ \frac{y}{k} &= \sin 60^\circ = 0,87 \\ \frac{500 - z}{k} &= \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \end{aligned} \right\}$$

En resoldre el sistema s'obté:

$$k = 149,78 \text{ m}$$

$$y = 129,71 \text{ m}$$

$$z = 425,11 \text{ m}$$

Cal calcular el perímetre per tenir els metres de tanca:

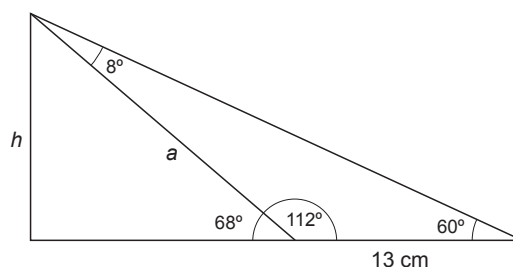
$$P = k + y + z + 500 = 1204,6 \text{ m}$$

20. Es vol construir un túnel que travessi una muntanya en línia recta. Per tal de determinar-ne la longitud, es considera un punt A d'una de les boques del túnel i un altre punt B de l'altra boca, i es mesura la distància de cadascun d'aquests punts a un altre punt O . S'obtenen 315 m i 375 m, respectivament. Si les direccions OA i OB formen un angle de $46^\circ 54'$, quina és la longitud del túnel?

L'amplada del túnel és el costat oposat a l'angle $46^\circ 54'$ i les longituds donades corresponen als altres dos costats:

$$\begin{aligned} a^2 &= 315^2 + 375^2 - 2 \cdot 315 \cdot 375 \cos 46^\circ 54' \\ a &= 280,05 \text{ m} \end{aligned}$$

21. Una torre de telecomunicacions es troba situada a la part més alta d'una muntanya. Situats en una plataforma, l'extrem de l'antena es veu sota un angle de 60° . Si ens apropem 13 m, l'extrem de l'antena es veu sota un angle de 68° i, des d'aquest mateix punt, es veu la base de la torre sota un angle de 57° . Amb aquestes dades, calcula l'alçada de la torre.



$$\frac{13}{\sin 8^\circ} = \frac{a}{\sin 60^\circ} \rightarrow a = 80,89 \text{ m}$$

$$\frac{h}{a} = \sin 68^\circ$$

$$h = a \sin 68^\circ = 75 \text{ m}$$

L'altura de la torre és de 75 m.