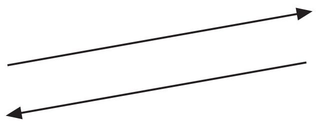
Comencem

- **Compara els sentits dels parells de vectors (fig. 3.4) següents:**

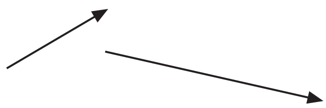
$$\vec{p} \text{ i } \vec{q}$$
$$\vec{q} \text{ i } \vec{r}$$
$$\vec{q} \text{ i } \vec{s}$$

p i $\vec{q}$ sentit contrari; $\vec{q}$ i $\vec{r}$ sentit contrari; $\vec{q}$ i $\vec{s}$ mateix sentit.

- **Dibuixa dos vectors que tinguin el mateix mòdul, la mateixa direcció i els sentits contraris.**



- **Dibuixa dos vectors que tinguin diferent mòdul i diferent direcció. Pots comparar-ne els sentits?**



No, perquè els sentits de dos vectors només són comparables si tenen la mateixa direcció.

- **A l'exemple introductori, quina dada ens dóna la direcció i el sentit del desplaçament del cotxe? Per què?**

La direcció i el sentit del desplaçament els dóna l'angle de 30°.

Exercicis

1. Determina els components cartesians i el mòdul de cadascun dels vectors següents. En cada cas fes-ne la representació gràfica.

a) **$\overrightarrow{AB}$ amb $A\,(-2, 4)$ $B\,(6, 10)$**

$$\overrightarrow{AB} = (6 - (-2), 10 - 4) = (8, 10)$$
$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{8^2 + 10^2} = 10$$

b) **$\overrightarrow{CD}$ amb $C\,(6, 2)$ $D\,(3, -2)$**

$$\overrightarrow{CD} = (3 - 6, -2 - 2) = (-3, -4)$$
$$|\overrightarrow{CD}| = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = 5$$

c) **$\overrightarrow{EF}$ amb $E\,(0, 0)$ $F\,(-1, -3)$**

$$\overrightarrow{EF} = (-1, -3)$$
$$|\overrightarrow{EF}| = \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2} = \sqrt{10}$$

d) **$\overrightarrow{GH}$ amb $G\,(-1, -2)$ $H\,(-4, -9)$**

$$\overrightarrow{GH} = (-4 - (-1), -9 - (-2)) = (-3, -7)$$
$$|\overrightarrow{GH}| = \sqrt{(-3)^2 + (-7)^2} = \sqrt{58}$$

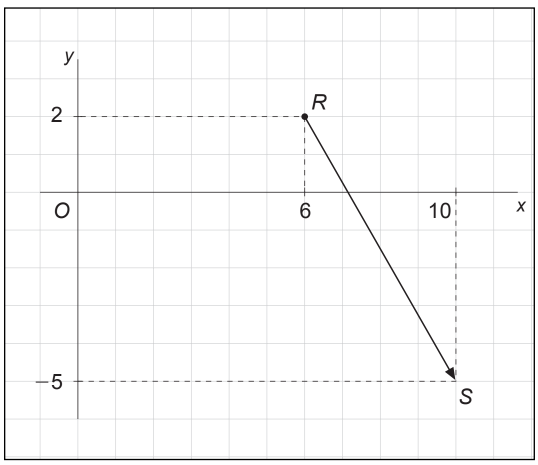
2. Es pot definir el vector nul com aquell que té l'origen i l'extrem en el mateix punt. Quins són els components cartesians i el mòdul del vector nul?

Els components cartesians del vector nul són (0, 0) i el mòdul és 0.

3. Sabent que $\overrightarrow{RS} = (4, -7)$ i $R\,(6, 2)$, determina les coordenades del punt S analíticament i gràficament.

Anomenem $S\,(x, y)$

$$\overrightarrow{RS} = (4, -7), \text{ amb } R\,(6, 2)$$
$$(4, -7) = (x - 6, y - 2) \rightarrow$$
$$\rightarrow \begin{cases} 4 = x - 6 \rightarrow x = 10 \\ -7 = y - 2 \rightarrow y = -5 \end{cases} \rightarrow$$
$$\rightarrow S = (10, -5)$$



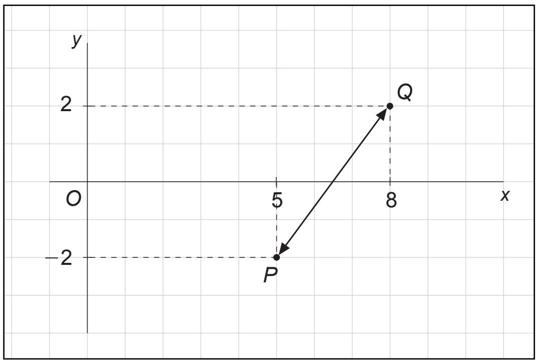
4. **Donats els punts P (5, −2) i Q (8, 2), troba els components cartesians i el mòdul dels vectors $\overrightarrow{PQ}$ i $\overrightarrow{QP}$. Representa´ls gràficament i compara'n el mòdul, la direcció i el sentit.**

$$\overrightarrow{PQ} = (8 - 5, 2 - (-2)) = (3, 4)$$

$$|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

$$\overrightarrow{QP} = (5 - 8, -2 - 2) = (-3, -4)$$

$$|\overrightarrow{QP}| = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = 5$$



Els vectors $\overrightarrow{PQ}$ i $\overrightarrow{QP}$ tenen el mateix mòdul, la mateixa direcció i sentits contraris.

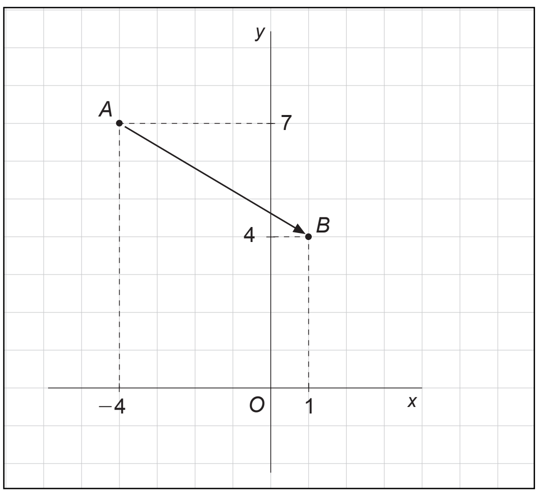
5. **Les coordenades de l'extrem del vector $\overrightarrow{AB}$ = (5, −3) són (1, 4). Determina'n les coordenades de l'origen. Fes la resolució gràfica i l'analítica.**

Anomenem A (x, y)

$$(5, -3) = (1 - x, 4 - y) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} 5 = 1 - x \rightarrow x = -4 \\ -3 = 4 - y \rightarrow y = 7 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow A\,(-4, 7)$$



6. **Represent gràficament els vectors:**

a) **$\overrightarrow{MN}$ = (5, 3) amb M (−1, 2)**

$N\,(x, y)$

$(5, 3) = (x + 1, y - 2)$

$x = 4;\ y = 5$

$N\,(4, 5)$

b) **$\overrightarrow{PQ}$ = (−1, −4) amb Q (2, 5)**

$P\,(x, y)$

$(-1, -4) = (2 - x, 5 - y)$

$x = 3;\ y = 9$

$P\,(3, 9)$

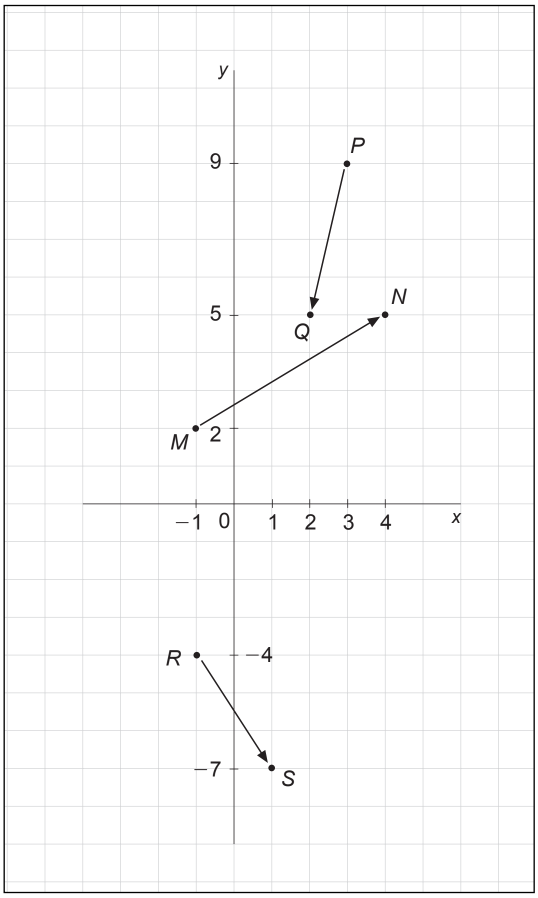
c) **$\overrightarrow{RS}$ = (2, −3) amb R (−1, −4)**

$S\,(x, y)$

$(2, -3) = (x + 1, y + 4)$

$x = 1;\ y = -7$

$S\,(1, -7)$



7. **Si $|\vec{F}| = 40\ N$, troba els components cartesians d'aquesta força (fig. 3.15).**

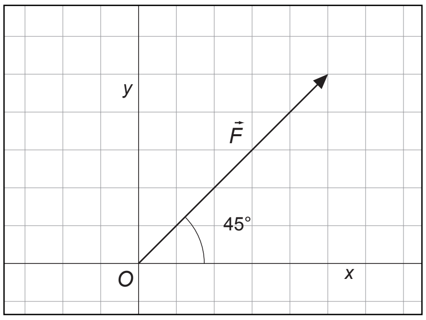


Fig. 3.15

$$\left.\begin{array}{l} F_x = |\vec{F}| \cdot \cos 45° = 40 \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 20\sqrt{2} \\[2ex] F_y = |\vec{F}| \cdot \sin 45° = 40 \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 20\sqrt{2} \end{array}\right\}$$

$$\vec{F} = (20\sqrt{2}, 20\sqrt{2})\ N$$

8. **Expressa en forma polar el vector posició de cadascun dels punts següents:**

a) **(1, −1)**

$$\left.\begin{array}{l} \textit{Mòdul}: \sqrt{2} \\ \textit{Argument}: \text{tg}\ \alpha = -1 \rightarrow \alpha = 315° \end{array}\right\}$$

$$\sqrt{2}_{315°}$$

b) **(−1, 1)**

$$\left.\begin{array}{l} \textit{Mòdul}: \sqrt{2} \\ \textit{Argument}: \text{tg}\ \alpha = -1 \rightarrow \alpha = 135° \end{array}\right\}$$

$$\sqrt{2}_{135°}$$

c) **$(-1, -\sqrt{3})$**

$$\left.\begin{array}{l} \textit{Mòdul}: 2 \\ \textit{Argument}: \text{tg}\ \alpha = \sqrt{3} \rightarrow \alpha = 240° \end{array}\right\}$$

$$2_{240°}$$

d) **$(\sqrt{2}, \sqrt{2})$**

$$\left.\begin{array}{l} \textit{Mòdul}: 2 \\ \textit{Argument}: \text{tg}\ \alpha = 1 \rightarrow \alpha = 45° \end{array}\right\}$$

$$2_{45°}$$

e) **(5, 12)**

$$\left.\begin{array}{l} \textit{Mòdul}: 13 \\ \textit{Argument}: \text{tg}\ \alpha = \dfrac{12}{5} \rightarrow \alpha = 67{,}38° \end{array}\right\}$$

$$13_{67{,}38°}$$

f) **(−8, 6)**

$$\left.\begin{array}{l} \textit{Mòdul}: 10 \\ \textit{Argument}: \text{tg}\ \alpha = -\dfrac{3}{4} \rightarrow \alpha = 143{,}13° \end{array}\right\}$$

$$10_{143{,}13°}$$

9. **Calcula les coordenades cartesianes dels punts *M*, *N*, *R* i *S* els vectors posició dels quals són, respectivament:**

$$\vec{m} = 6_{45°} \quad \vec{n} = 4_{150°} \quad \vec{r} = 2_{240°} \quad \vec{s} = 10_{300°}$$

$$\left.\begin{array}{l} m_x = |\vec{m}| \cdot \cos 45° = 6 \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2} \\[2ex] m_y = |\vec{m}| \cdot \sin 45° = 6 \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2} \end{array}\right\}$$

$$M(3\sqrt{2}, 3\sqrt{2})$$

$$\left.\begin{array}{l} n_x = |\vec{n}| \cdot \cos 150° = 4 \cdot \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = -2\sqrt{3} \\[2ex] n_y = |\vec{n}| \cdot \sin 150° = 4 \cdot \dfrac{1}{2} = 2 \end{array}\right\}$$

$$N(-2\sqrt{3}, 2)$$

$$\left.\begin{array}{l} r_x = |\vec{r}| \cdot \cos 240° = 2 \cdot \left(-\dfrac{1}{2}\right) = -1 \\[2ex] r_y = |\vec{r}| \cdot \sin 240° = 2 \cdot \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\sqrt{3} \end{array}\right\}$$

$$R(-1, -\sqrt{3})$$

$$\left.\begin{array}{l} s_x = |\vec{s}| \cdot \cos 300° = 10 \cdot \dfrac{1}{2} = 5 \\[2ex] s_y = |\vec{s}| \cdot \sin 300° = 10 \cdot \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = -5\sqrt{3} \end{array}\right\}$$

$$S(5, -5\sqrt{3})$$

10. **El vector $\vec{r}$ té l'origen en el punt (0, 1) i l'extrem en el punt (2, −3). El vector $\vec{t}$, equipolent a l'anterior, té l'origen en el punt (2, −4). Troba'n les coordenades de l'extrem.**

$$\vec{r} = (2 - 0, -3 - 1) = (2, -4)$$

Representem per (x, y) les coordenades de l'extrem del vector $\vec{t}$:

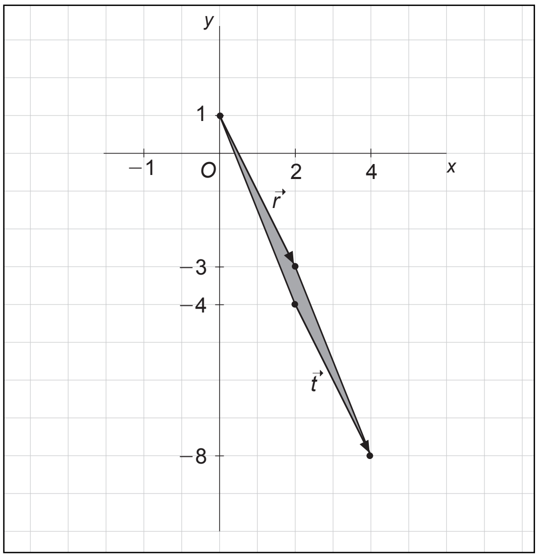
$$\vec{t}\,(x - 2, y + 4)$$

Com que $\vec{r}$ i $\vec{t}$ són equipolents, es verifica:

$$(2, -4) = (x - 2, y + 4) \rightarrow x = 4, y = -8$$

L'extrem del vector $\vec{t}$ és el punt (4, −8).

11. **Dibuixa els vectors $\vec{r}$ i $\vec{t}$ de l'exercici anterior i uneix-ne, mitjançant segments, els punts origen i els punts extrem. Quina figura obtens?**



S'obté un paral·lelogram.

12. **Considera els punts *A* (3, −2), *B* (5, 4), *C* (1, −5) i *D* (*x*, *y*). Calcula les coordenades del punt *D* sabent que els vectors $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$ són equipolents.**

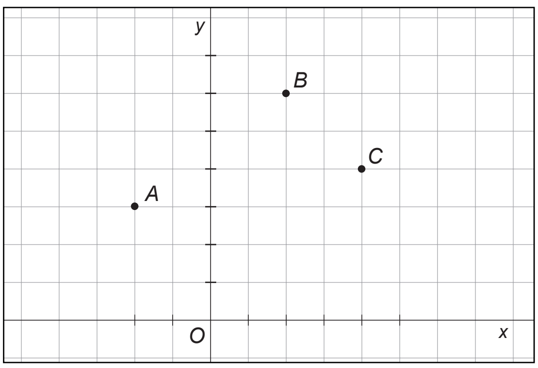
$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB} = (5 - 3, 4 + 2) = (2, 6) \\ \overrightarrow{CD} = (x - 1, y + 5)\end{array}\right\}$$

$$(2, 6) = (x - 1, y + 5) \rightarrow x = 3, y = 1$$

$$D\,(3, 1)$$

Les coordenades del punt *D* són *D* (3, 1).

13. **Els punts *A*, *B* i *C* de la figura 3.17 són tres vèrtexs consecutius d'un paral·lelogram. Troba les coordenades del quart vèrtex *D*.**



Anomenem *D* (*x*, *y*).

$$A\,(-2, 3);\ B\,(2, 6);\ C\,(4, 4)$$

Es compleix que:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \rightarrow (4, 3) = (4 - x, 4 - y) \rightarrow$$
$$\rightarrow x = 0, y = 1$$

El quart vèrtex del paral·lelogram se situa en el punt *D* (0, 1).

14. **Donats els vectors:**

$$\vec{a} = (2, -4),\ \vec{b} = (-5, 7) \text{ i } \vec{c} = (7, -1)$$

comprova que es verifica:

a) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

b) $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$

c) $2 \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = 2 \cdot \vec{a} + 2 \cdot \vec{b}$

d) $(3 + 4) \cdot \vec{c} = 3 \cdot \vec{c} + 4 \cdot \vec{c}$

e) $\vec{a} - \vec{b} = -(\vec{b} - \vec{a})$

f) $\frac{1}{2} \cdot (4 \cdot \vec{a}) = 2 \cdot \vec{a}$

Els resultats que s'obtenen en els dos membres de cadascuna de les igualtats són:

a) (−3, 3); *b)* (4, 2); *c)* (−6, 6); *d)* (49, −7); *e)* (7, −11); *f)* (4, −8)

15. **Determina els components dels vectors $3 \cdot \vec{v}$ i $-4 \cdot \vec{v}$ si $\vec{v} = (-3, 2)$. Compara el mòdul, la direcció i el sentit de cadascun dels dos vectors amb el mòdul, la direcció i el sentit del vector $\vec{v}$.**

$3\,\vec{v} = 3 \cdot (-3, 2) = (-9, 6)$

$3\,\vec{v}$
- *Mòdul:* $|3\,\vec{v}| = 3\,|\vec{v}|$
- *Direcció:* la mateixa que $\vec{v}$
- *Sentit:* el mateix que $\vec{v}$

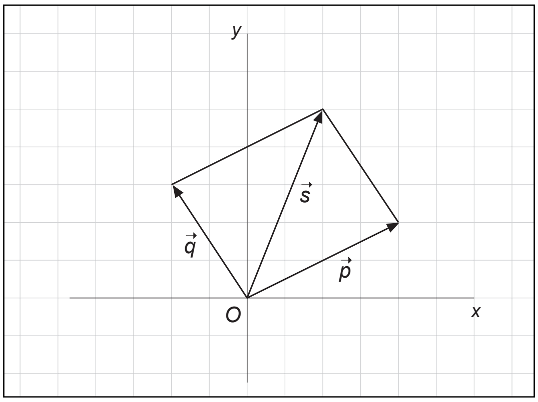
$-4\,\vec{v} = -4\,(-3, 2) = (12, -8)$

$-4\,\vec{v}$
- *Mòdul:* $|-4\,\vec{v}| = 4 \cdot |\vec{v}|$
- *Direcció:* la mateixa que $\vec{v}$
- *Sentit:* el mateix que $\vec{v}$

16. **Si $\vec{p} = (4, 2)$ i $\vec{q} = (-2, 3)$, quins són els components del vector $\vec{s} = \vec{p} + \vec{q}$? Dibuixa els vectors $\vec{p}$ i $\vec{q}$ amb origen a l'origen de coordenades i troba gràficament el vector $\vec{s}$. Comprova que coincideix amb el resul-**

tat que havies obtingut. Calcula el mòdul dels vectors $\vec{p}$, $\vec{q}$ i $\vec{s}$, comprova que es verifica $|\vec{s}| \leq |\vec{p}| + |\vec{q}|$.

$$\vec{s} = \vec{p} + \vec{q} = (4, 2) + (-2, 3) = (2, 5)$$



$$\left.\begin{array}{l} |\vec{p}| = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \\ |\vec{q}| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2} = \sqrt{13} \\ |\vec{s}| = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{29} \end{array}\right\}$$

Es compleix que:

$$\sqrt{29} < 2\sqrt{5} + \sqrt{13}$$

17. **Donats els vectors $\vec{c} = (-2, 7)$ i $\vec{d} = (5, -3)$, troba els components dels vectors $2 \cdot \vec{c} + 3 \cdot \vec{d}$ i $3 \cdot \vec{c} - 2 \cdot \vec{d}$.**

$$2\vec{c} + 3\vec{d} = 2(-2, 7) + 3(5, -3) =$$
$$= (-4, 14) + (15, -9) = (11, 5)$$

$$3\vec{c} - 2\vec{d} = 3(-2, 7) - 2(5, -3) =$$
$$= 3(-2, 7) + 2(-5, 3) = (-16, 27)$$

18. **S'anomenen vectors unitaris els vectors que tenen mòdul 1. Quin és el mòdul del vector $\vec{v} = (3, 4)$?**

Comprova que el vector $\vec{u} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ és unitari i que té la mateixa direcció i el mateix sentit que el vector $\vec{v}$. Hi ha un altre vector unitari en la mateixa direcció que $\vec{v}$? Quin?

$$|\vec{v}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2} = 1$$

Es verifica que $\vec{v} = 5\,\vec{u}$. Per tant, els vectors $\vec{v}$ i $\vec{u}$ tenen la mateixa direcció i el mateix sentit $(5 > 0)$.

El vector $\vec{u}' = \left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right) = -\vec{u}$ té també la mateixa direcció que el vector $\vec{v}$ i també és unitari.

19. **Raona per què el vector**

$$\vec{v} \cdot \frac{1}{|\vec{v}|} = \vec{u}$$

és un vector unitari que té la mateixa direcció i el mateix sentit que el vector $\vec{v}$.

Si $\vec{u} = \frac{1}{|\vec{v}|} \cdot \vec{v}$, $|\vec{u}| = \frac{1}{|\vec{v}|} \cdot |\vec{v}| = 1$.

Es compleix que $\vec{v} = |\vec{v}| \cdot \vec{u}$, amb $|\vec{v}| > 0$. Per tant, el vector $\vec{u}$ és unitari i té la mateixa direcció i el mateix sentit que el vector $\vec{v}$.

Determina els vectors unitaris en la direcció i el sentit dels vectors:

a) $\vec{a} = (5, -12)$

$$|\vec{a}| = \sqrt{5^2 + (-12)^2} = 13 \rightarrow$$
$$\rightarrow \vec{u} = \left(\frac{5}{13}, -\frac{12}{13}\right)$$

b) $\vec{b} = (-6, 8)$

$$|\vec{b}| = \sqrt{(-6)^2 + 8^2} = 10 \rightarrow$$
$$\rightarrow \vec{u} = \left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$$

c) $\vec{c} = (-2, -4)$

$$|\vec{c}| = \sqrt{(-2)^2 + (-4)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \rightarrow$$
$$\rightarrow \vec{u} = \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}, -\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$$

d) $\vec{d} = (1, \sqrt{3})$

$$|\vec{d}| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2 \rightarrow$$
$$\rightarrow \vec{u} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

20. **Donats els vectors $\vec{a} = (4, -1)$ i $\vec{b} = (2, 3)$, troba'n les combinacions lineals següents:**

a) $3 \cdot \vec{a} - 2 \cdot \vec{b}$

$$3\vec{a} - 2\vec{b} = 3\vec{a} + 2(-\vec{b}) =$$
$$= 3(4, -1) + 2(-2, -3) = (8, -9)$$

b) $\frac{1}{2} \cdot \vec{a} + \frac{2}{3} \cdot \vec{b}$

$$\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b} = \frac{1}{2}(4, -1) + \frac{2}{3}(2, 3) = $$
$$= \left(\frac{10}{3}, \frac{3}{2}\right)$$

c) $-\vec{a} + 5 \cdot \vec{b}$

$$-\vec{a} + 5\vec{b} = (-4, 1) + 5\,(2, 3) = (6, 16)$$

21. Esbrina si son linealment dependents o independents els parells de vectors següents:

a) **(4, 7) i (−8, 14)**

$$\frac{4}{-8} \neq \frac{7}{14} \rightarrow \text{linealment independents}$$

b) **(3, 0) i (1, 0)**

$$(3, 0) = 3\,(1, 0) \rightarrow \text{linealment dependents}$$

c) **(5, −2) i (−5, 2)**

$$\frac{5}{-2} = \frac{-5}{2} \rightarrow \text{linealment dependents}$$

d) $\left(\frac{1}{2}, -3\right)$ **i** $\left(-2, \frac{4}{3}\right)$

$$\frac{\frac{1}{2}}{-2} \neq \frac{-3}{\frac{4}{3}} \rightarrow \text{linealment independents}$$

22. Els vectors (5, 4) i (−2, *a*) són linealment dependents. Calcula *a*.

$$\frac{5}{-2} = \frac{4}{a} \rightarrow 5a = -8 \rightarrow a = -\frac{8}{5}$$

23. Els vectors (4, −7) i (*x*, 14) són linealment independents. Quins valors pot tenir *x*?

$$\frac{4}{x} \neq \frac{-7}{14} \rightarrow \frac{4}{x} \neq -\frac{1}{2} \rightarrow x \neq -8$$

x pot prendre qualsevol valor real diferent de −8.

24. Demostra que els vectors (1, 2), (2, 4), (2, −1) són linealment dependents.

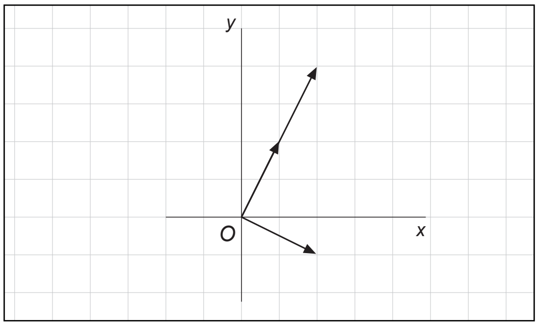
N'expressem un en combinació lineal dels altres dos:

$$(2, 4) = k\,(1, 2) + h\,(2, -1)$$

$$\left.\begin{array}{l} 2 = k + 2h \\ 4 = 2k - h \end{array}\right\} \quad k = 2,\ h = 0$$

Llavors es compleix que (2, 4) = 2 (1, 2) + + 0 (2, −1) = 2 (1, 2), és a dir, els tres vectors són linealment dependents.

25. Representa gràficament els vectors de l'exercici anterior prenent per a tots ells el mateix origen.



26. Expressa el vector (2, 7) en combinació lineal dels vectors (1, 3) i (−2, 1).

$$(2, 7) = k\,(1, 3) + h\,(-2, 1)$$

$$\left.\begin{array}{l} 2 = k - 2h \\ 7 = 3k + h \end{array}\right\} \quad k = \frac{16}{7},\ h = \frac{1}{16}$$

$$(2, 7) = \frac{16}{7}(1, 3) + \frac{1}{16}(-2, 1)$$

27. Sense fer cap càlcul, expressa els vectors $\vec{c}$, $\vec{d}$ i $\vec{e}$ en combinació lineal dels vectors $\vec{a}$ i $\vec{b}$ (fig. 3.26).

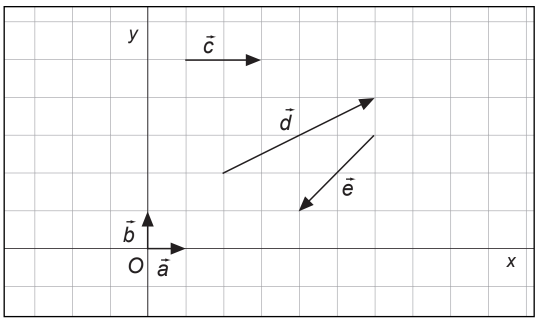


Fig. 3.26

$$\vec{c} = 2\,\vec{a}$$

$$\vec{d} = 4\,\vec{a} + 2\,\vec{b}$$

$$\vec{e} = -2\,\vec{a} - 2\,\vec{b}$$

28. **Quins dels parells de vectors següents són una base del pla? Justifica'n la resposta.**

a) **(−1, 4) i (2, −8)** *b*) **(2, 0) i (1, 4)**

c) **(3, 2) i (−1, 5)** *d*) **(1, 0) i (−3, 0)**

Els dels apartats *b)* i *c)*, ja que són parells de vectors linealment independents.

b) $\frac{2}{1} \neq \frac{0}{4}$ *c*) $\frac{3}{-1} \neq \frac{2}{5}$

29. **Els components del vector $\vec{p}$ en la base:**

$$B = \{(4, 1), (5, -2)\}$$

són (3, −1). Determina els components de $\vec{p}$ en la base canònica.

$$\vec{p} = 3\,(4, 1) + (-1)\,(5, -2) =$$
$$= (12, 3) + (-5, 2) = (7, 5)$$

Els components de $\vec{p}$ en la base canònica són (7, 5).

30. **Troba els components del vector (7, 7) en la base $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$, on $\vec{u}_1 = (3, 1)$ i $\vec{u}_2 = (1, -2)$. Comprova gràficament el resultat obtingut prenent un origen comú per als tres vectors.**

Expressem el vector (7, 7) en combinació lineal dels vectors de la base *B*:

$$(7, 7) = k u_1 + h u_2 = k\,(3, 1) + h\,(1, -2)$$

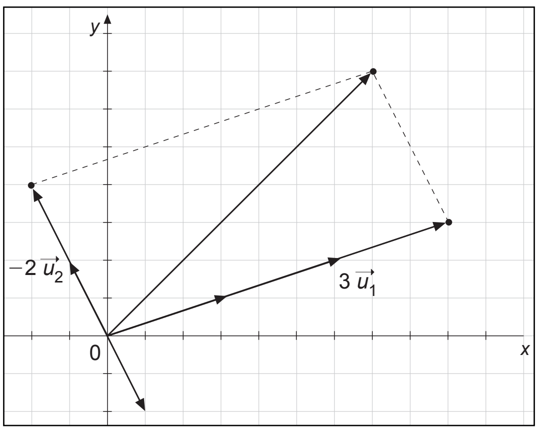
$$(7, 7) = (3k, k) + (h, -2h)$$

$$(7, 7) = (3k + h, k - 2h)$$

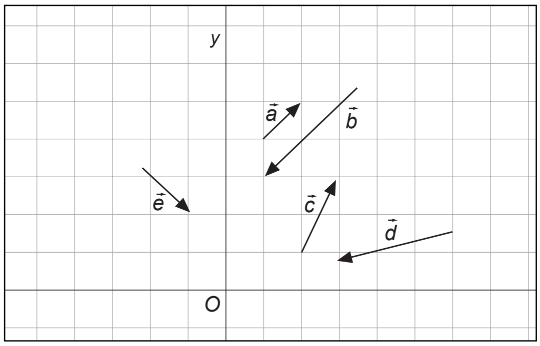
$$\left.\begin{aligned} 7 &= 3k + h \\ 7 &= k - 2h \end{aligned}\right\} \quad k = 3;\ h = -2$$

Els components del vector (7, 7) en la base *B* són (3, −2)

$$(7, 7) = 3\vec{u}_1 - 2\vec{u}_2$$



31. **Indica tots els parells de vectors de la figura 3.31 que són una base del pla. Raona la resposta.**



$\vec{a}$ i $\vec{c}$; $\vec{a}$ i $\vec{d}$; $\vec{a}$ i $\vec{e}$; $\vec{b}$ i $\vec{c}$; $\vec{b}$ i $\vec{d}$; $\vec{b}$ i $\vec{e}$;
$\vec{c}$ i $\vec{d}$; $\vec{c}$ i $\vec{e}$; $\vec{d}$ i $\vec{e}$

En tots els casos es tracta de parells de vectors linealment independents (tenen diferent direcció).

32. **Donats els vectors $\vec{p} = (3, -4)$ i $\vec{q} = (2, 1)$, calcula:**

a) **El seu producte escalar.**

$$\vec{p} \cdot \vec{q} = 3 \cdot 2 + (-4) \cdot 1 = 6 - 4 = 2$$

b) **L'angle que formen.**

$$\cos\alpha = \frac{\vec{p} \cdot \vec{q}}{|\vec{p}| \cdot |\vec{q}|} = \frac{2}{5 \cdot \sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{25} \rightarrow$$
$$\rightarrow \alpha = 79{,}70°$$

c) **L'angle format pels vectors $\vec{p}$ i $-\vec{q}$. Resol aquest apartat de diferents maneres i compara'n els resultats obtinguts.**

L'angle que formen els vectors $\vec{p}$ i $-\vec{q}$ és el suplementari de l'angle α. Si el representem per β:

$$\beta = 180° - \alpha =$$
$$= 180° - 79{,}70° = 100{,}30°$$

d) **L'angle que formen els vectors $-\vec{p}$ i $-\vec{q}$.**

L'angle que formen els vectors $-\vec{p}$ i $-\vec{q}$ és el mateix que el que formen els vectors $\vec{p}$ i $\vec{q}$:

$$\alpha = 79{,}70°$$

33. **Donats els vectors $\vec{a} = (1, -2)$, $\vec{b} = (3, 4)$ i $\vec{c} = (-2, 5)$, comprova que es verifica la igualtat:**

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$$

Primer membre:

$$\vec{a} \bullet (\vec{b} + \vec{c}) = (1,\ -2) \bullet [(3,\ 4) \cdot (-2,\ 5)] =$$
$$= (1,\ -2) \bullet (1,\ 9) = 1 - 18 = -17$$

Segon membre:

$$\vec{a} \bullet \vec{b} + \vec{a} \bullet \vec{c} =$$
$$= (1,\ -2) \bullet (3,\ 4) + (1,\ -2) \bullet (-2,\ 5) =$$
$$= -5 - 12 = -17$$
$$\vec{a} \bullet (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \bullet \vec{b} + \vec{a} \bullet \vec{c}$$

34. El resultat de $(\vec{v} \bullet \vec{w}) \cdot \vec{t}$, és un nombre real o un vector? Per què? Fes els càlculs per a $\vec{v} = (2,\ -4)$, $\vec{w} = (-1,\ -1)$ i $\vec{t} = (4,\ -3)$.

És un vector, ja que és el resultat de multiplicar un nombre real ($\vec{v} \bullet \vec{w}$) per un vector ($\vec{t}$).

$$(\vec{v} \bullet \vec{w}) \cdot \vec{t} = [(2,\ -4) \bullet (-1,\ -1)] \cdot (4,\ -3) =$$
$$= 2 \cdot (4,\ -3) = (8,\ -6)$$

35. Donats els vectors $\vec{a} = (2,\ 1)$, $\vec{b} = (-3,\ 4)$ i el nombre real $k = -3$, comprova que es verifica $(k \cdot \vec{a}) \bullet \vec{b} = k \cdot (\vec{a} \bullet \vec{b})$.

Primer membre:

$$(k \cdot \vec{a}) \bullet \vec{b} = [-3\ (2,\ 1)] \bullet (-3,\ 4) =$$
$$= (-6,\ -3) \bullet (-3,\ 4) = 18 - 12 = 6$$

Segon membre:

$$k \cdot (\vec{a} \bullet \vec{b}) = -3\ [(2,\ 1) \bullet (-3,\ 4)] =$$
$$= -3 \cdot (-2) = 6$$

36. Demostra que el triangle de vèrtexs els punts *A* (1, 2), *B* (6, 5) i *C* (3, 10) és rectangle en *B*. Quant mesuren els altres dos angles del triangle?

Si és rectangle en B, $\widehat{B} = 90°$. Aleshores els vectors $\overrightarrow{BC}$ i $\overrightarrow{BA}$ han de ser perpendiculars $\rightarrow$ $\rightarrow \overrightarrow{BC} \bullet \overrightarrow{BA} = 0$.

$$\overrightarrow{BC} = (-3,\ 5);\ \overrightarrow{BA} = (5,\ 3)$$
$$\overrightarrow{BC} \bullet \overrightarrow{BA} = -15 + 15 = 0$$

Com que els catets BC i BA són iguals, $|\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{BA}| = \sqrt{34}$, el triangle rectangle és isòsceles i, per tant, $\widehat{A} = \widehat{C} = 45°$.

37. Troba un vector de mòdul 2 que sigui ortogonal al vector $\vec{v} = (4,\ -3)$. Analitza les diferents solucions que has obtingut.

Hi ha dos vectors perpendiculars al vector $\vec{v}$ que tenen el mateix mòdul que aquest vector: $\vec{w}_1 = (3,\ 4)$ i $\vec{w}_2 = (-3,\ -4)$. Els vectors $\vec{w}_1$ i $\vec{w}_2$ tenen la mateixa direcció i sentit contrari.

Com que $|\vec{w}_1| = |\vec{w}_2| = 5$, els vectors que ens demanen són:

$$\vec{t}_1 = \frac{2}{5}\vec{w}_1 = \frac{2}{5}(3,\ 4) = \left(\frac{6}{5},\ \frac{8}{5}\right)$$
$$\vec{t}_2 = \frac{2}{5}\vec{w}_2 = \frac{2}{5}(-3,\ -4) = \left(-\frac{6}{5},\ -\frac{8}{5}\right)$$

El problema té, doncs, dues solucions.

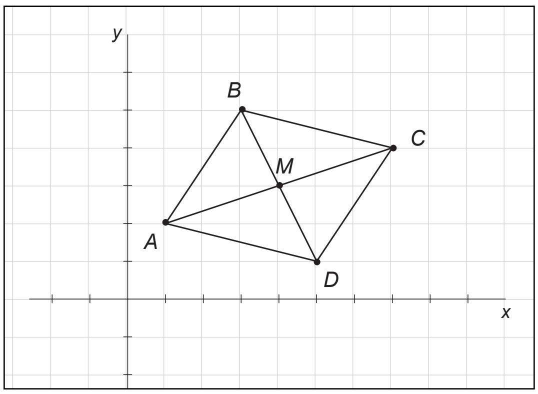
38. Els punts *A* (1, 2), *B* (3, 5) i *C* (7, 4) són tres vèrtexs consecutius d'un paral·lelogram. Troba les coordenades del quart vèrtex i les del punt intersecció de les diagonals. Fes-ne la representació gràfica.

Anomenem $D\ (x,\ y)$ el quart vèrtex del paral·lelogram.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \rightarrow (2,\ 3) = (7 - x,\ 4 - y) \rightarrow$$
$$\rightarrow x = 5,\ y = 1 \rightarrow D\ (5,\ 1)$$

Les coordenades del punt intersecció de les diagonals del paral·lelogram són les coordenades del punt mitjà del segment d'extrems A i C, o bé, B i D.

$$M = \left(\frac{1 + 7}{2},\ \frac{2 + 4}{2}\right) = (4,\ 3)$$



39. Els punts *P* (3, −7) i *Q* (5, 13) són els extrems d'un dels diàmetres d'una circumferència. Determina'n les coordenades del centre i calcula'n el radi.

Dibuixa aquesta circumferència.

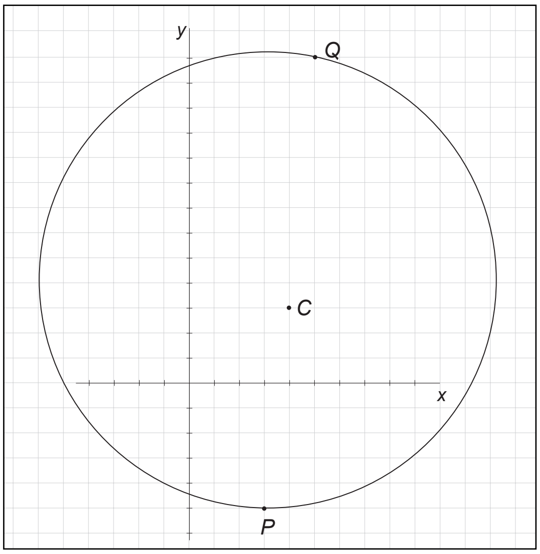
El centre C de la circumferència és el punt mitjà d'un qualsevol dels seus diàmetres.

$$C = \left(\frac{3+5}{2}, \frac{-7+13}{2}\right) = (4, 3)$$

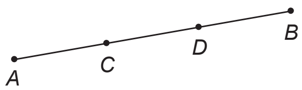
El radi és la distància del centre a un punt qualsevol de la circumferència.

$$r = |\overrightarrow{CP}|;\ \overrightarrow{CP} = (-1, -10)$$

$$r = \sqrt{(-1)^2 + (-10)^2} = \sqrt{101}$$



40. Troba les coordenades dels punts que divideixen el segment d'extrems $A\,(-12, 6)$ i $B\,(0, 9)$ en tres parts iguals.



$\overrightarrow{AB} = 3\,\overrightarrow{AC}$, amb $C\,(x_1, y_1)$

$$(12, 3) = 3\,(x_1 + 12, y_1 - 6)$$

$$(12, 3) = (3x_1 + 36, 3y_1 - 18)$$

$$12 = 3x_1 + 36 \rightarrow x_1 = -8$$

$$3 = 3y_1 - 18 \rightarrow y_1 = 7$$

Les coordenades del punt C són $(-8, 7)$.

$\overrightarrow{AB} = 3\,\overrightarrow{DB}$, amb $D\,(x_2, y_2)$

$$(12, 3) = 3\,(-x_2, 9 - y_2) \rightarrow$$

$$\rightarrow (12, 3) = (-3x_2, 27 - 3y_2)$$

$$12 = -3x_2 \rightarrow x_2 = -4$$

$$3 = 27 - 3y_2 \rightarrow y_2 = 8$$

Les coordenades del punt D són $(-4, 8)$.

41. Els punts $A\,(2, 5)$, $B\,(3, -2)$ i $C\,(-1, p)$ estan alineats. Calcula p.

S'ha de verificar que: $\overrightarrow{AB} = k\,\overrightarrow{BC}$:

$$(1, -7) = k\,(-4, p + 2)$$

$$1 = k \cdot (-4) \rightarrow k = -\frac{1}{4}$$

$$-7 = k\,(p + 2) \rightarrow -7 = -\frac{1}{4}(p + 2) \rightarrow$$

$$\rightarrow p = 26$$

42. Determina les coordenades del baricentre del triangle de vèrtexs els punts $P\,(3, -4)$, $Q\,(-2, -6)$ i $R\,(4, 10)$.

Les coordenades del baricentre G del triangle són:

$$G\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right) =$$

$$= \left(\frac{5}{3}, 0\right)$$

Acabem

1. Donats els punts $A\,(2, 3)$ i B $(5, q)$, troba q sabent que $|\overrightarrow{AB}| = 5$.

$$\overrightarrow{AB} = (3, q - 3) \rightarrow$$

$$\rightarrow |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3^2 + (q - 3)^2} = 5$$

$$3^2 + (q - 3)^2 = 5^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow (q - 3)^2 = 25 - 9 = 16 \rightarrow$$

$$\rightarrow q - 3 = \pm\sqrt{16} \begin{cases} q - 3 = 4 \rightarrow q = 7 \\ q - 3 = -4 \rightarrow q = -1 \end{cases}$$

Hi ha dues solucions per al problema: $q_1 = 7$ i $q_2 = -1$.

2. Els vectors $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{BC}$ verifiquen $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{BC}$.

Si $A\,(6, 2)$ i $B\,(0, 4)$, quines són les coordenades de C?

Anomenem $C\,(x, y)$

$$\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{BC} \rightarrow (-6, 2) = \frac{1}{2}\,(x, y - 4) \rightarrow$$

$$\rightarrow (-12, 4) = (x, y - 4) \rightarrow x = -12,\ y = 8$$

Les coordenades del punt C són $(-12, 8)$.

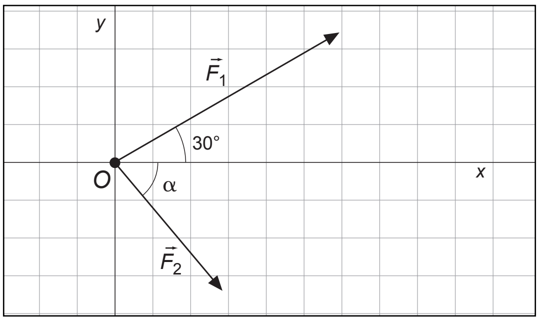
3. Calcula els components cartesians del vector $10_{210°}$, donat en forma polar.

Representem per $\vec{v}$ aquest vector:

$$\vec{v} = 10_{210°} \begin{cases} \vec{v}_x = 10 \cos 210° = -5\sqrt{3} \\ \vec{v}_y = 10 \sin 210° = -5 \end{cases}$$

Per tant, $\vec{v} = (-5\sqrt{3}, -5)$.

4. Sabent que $|\vec{F}_1| = 60$ N i $|\vec{F}_2| = 40$ N, calcula α perquè el cos de la figura (fig. 3.49) es mogui en la direcció de l'eix *X*.



Perquè el cos es mogui en la direcció de l'eix *OX*, cal que la suma dels components segons l'eix *OX* de les forces $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$ sigui igual a zero.

$$F_{1y} = |\vec{F}_1| \cdot \sin 30° = 60 \cdot \frac{1}{2} = 30$$

$$F_{2y} = -|\vec{F}_2| \cdot \sin \alpha = -40 \sin \alpha$$

$$F_{1y} + F_{2y} = 0 \rightarrow 30 - 40 \sin \alpha = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \sin \alpha = \frac{3}{4} \rightarrow \alpha = 48{,}59°$$

5. Donats els vectors $\vec{a} = (5, -7)$, $\vec{b} = (-3, 6)$ i $\vec{c} = (10, -4)$, calcula:

a) $\vec{a} - 2 \cdot \vec{b} + 3 \cdot \vec{c}$

$$(5, -7) - 2\,(-3, 6) + 3\,(10, -4) =$$
$$= (41, -31)$$

b) $4 \cdot \vec{a} - \frac{1}{2} \cdot \vec{c}$

$$4\,(5, -7) - \frac{1}{2}\,(10, -4) = (15, -26)$$

c) $\vec{a} \bullet \vec{b}$

$$(5, -7) \bullet (-3, 6) = -57$$

d) $\vec{b} \bullet (\vec{c} \bullet \vec{a})$

$$(-3, 6) \bullet [(10, -4) - (5, -7)] =$$
$$= (-3, 6) \bullet (5, 3) = 3$$

6. Calcula els components cartesians del vector $\vec{u}$ que verifica les condicions següents:

a) **És unitari.**

$$|\vec{v}| = \sqrt{(-6)^2 + 8^2} = 10$$

b) **Té la mateixa direcció que el vector $\vec{v} = (-6, 8)$, però sentit contrari.**

$$\vec{u} = -\frac{1}{10}\,(-6, 8) = \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$$

7. Els vectors $\vec{v}$ i $\vec{w}$ són ortogonals i tenen el mateix mòdul. Esbrina els components de $\vec{w}$ sabent que $\vec{v} = (5, -2)$. Quantes solucions has trobat? Raona-ho.

Si els vectors $\vec{v}$ i $\vec{w}$ tenen el mateix mòdul i són ortogonals, $\vec{v} \bullet \vec{w} = 0$ i $|\vec{v}| = |\vec{w}| = \sqrt{29}$.

El problema té dues solucions: $\vec{w}_1 = (2, 5)$ i $\vec{w}_2 = (-2, -5)$.

$$\left.\begin{array}{l} (5, -2) \bullet (w_x, w_y) = 0 \\ \sqrt{w_x^2 + w_y^2} = \sqrt{29} \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} 5\,w_x - 2\,w_y = 0 \\ w_x^2 + w_y^2 = 29 \end{array}\right\}$$

$$w_x = \pm 2 \rightarrow w_y = \pm 5$$

8. Els components del vector $\vec{a}$ en la base $B = \{(1, 3), (2, -1)\}$ són (5, 2). Quins són els components d'aquest mateix vector en la base $B' = \{(4, -1), (3, 2)\}$?

$$\vec{a} = 5\,(1, 3) + 2\,(2, -1) = (9, 13)$$

$$(9, 13) = k\,(4, -1) + h\,(3, 2)$$

$$\left.\begin{array}{l} 9 = 4\,k + 3\,h \\ 13 = -k + 2\,h \end{array}\right\} \quad k = -\frac{21}{11};\ h = \frac{61}{11}$$

Els components de $\vec{a}$ en la base B' són:

$$\left(-\frac{21}{11}, \frac{61}{11}\right)$$

9. Calcula els components del vector (5, −7) en la base $B = \{(2, -3), (1, 2)\}$.

$$(5, -7) = k\,(2, -3) + h\,(1, 2)$$

$$\left.\begin{array}{l} 5 = 2\,k + h \\ -7 = -3\,k + 2\,h \end{array}\right\} \quad k = \frac{17}{7};\ h = \frac{1}{7}$$

Els components del vector (5, −7) en la base B són $\left(\frac{17}{7}, \frac{1}{7}\right)$.

10. Donat el segment d'extrems els punts *P* (3, 5) i *Q* (6, −8), troba les coordenades del punt *R* d'aquest segment que verifica $PR = \frac{3}{10} \cdot PQ$.

Representem per (x, y) les coordenades de R:

$$10\,\overrightarrow{PR} = 3\,\overrightarrow{PQ} \rightarrow$$
$$\rightarrow 10\,(x - 3,\, y - 5) = 3\,(3,\, -13) \rightarrow$$
$$\rightarrow (10x - 30,\, 10y - 50) = (9,\, -39) \rightarrow$$
$$x = \frac{39}{10};\ y = \frac{11}{10}$$

Les coordenades de R són $\left(\frac{39}{10}, \frac{11}{10}\right)$.

11. **El baricentre d'un triangle se situa en el punt *G* (−2, 0) i dos dels seus vèrtexs, en els punts *A* (3, 4) i *B* (−6, 5). Troba les coordenades de l'altre vèrtex *C* del triangle.**

Anomenem $C\,(x, y)$ el tercer vèrtex.

$$-2 = \frac{3 + (-6) + x}{3} \rightarrow x = -3$$
$$0 = \frac{4 + 5 + y}{3} \rightarrow y = -9$$

Les coordenades de C són $(-3, -9)$.

12. **Donat el segment que té com a extrems els punts *A* (3, 6) i *B* (−6, −3), troba les coordenades del punt *C*, alineat amb *A* i *B*, que verifiqui $AC = \frac{2}{3} \cdot AB$. Quants punts hi ha que verifiquen aquesta condició?**

Hi ha dos punts que verifiquen aquesta condició:

a) El punt C_1 situat entre A i B ($C_1\,(x_1, y_1)$)

$$3\,\overrightarrow{AC_1} = 2\,\overrightarrow{AB} \rightarrow$$
$$\rightarrow 3\,(x_1 - 3,\, y_1 - 6) = 2\,(-9,\, -9) \rightarrow$$
$$\rightarrow x_1 = -3,\, y_1 = 0 \rightarrow C_1\,(-3, 0)$$

b) El punt C_2 situat a la recta determinada pels punts A i B i a la dreta del punt A ($C_2\,(x_2, y_2)$).

$$3\,\overrightarrow{C_2A} = 2\,\overrightarrow{AB} \rightarrow$$
$$\rightarrow 3\,(3 - x_2,\, 6 - y_2) = 2\,(-9,\, -9) \rightarrow$$
$$\rightarrow x_2 = 9,\, y_2 = 12 \rightarrow C_2\,(9, 12)$$

Els punts que verifiquen les condicions de l'enunciat del problema són $C_1\,(-3, 0)$ i $C_2\,(9, 12)$.

13. **Determina la mesura de cadascun dels angles del triangle de vèrtexs els punts *A* (0, 0), *B* (5, 1) i *C* (4, 2).**

Angle $\widehat{A} \rightarrow$ el més petit dels angles que formen els vectors $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{AB} = (5, 1);\ \overrightarrow{AC} = (4, 2)$$

$$\cos\widehat{A} = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \frac{22}{\sqrt{26} \cdot \sqrt{20}} \rightarrow$$
$$\rightarrow \widehat{A} = 15{,}26°$$

Angle $\widehat{B} \rightarrow$ el més petit dels angles que formen els vectors $\overrightarrow{BC}$ i $\overrightarrow{BA}$.

$$\overrightarrow{BC} = (-1, 1);\ \overrightarrow{BA} = (-5, -1)$$
$$\cos\widehat{B} = \frac{\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA}}{|\overrightarrow{BC}| \cdot |\overrightarrow{BA}|} = \frac{4}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{26}} = 56{,}31°$$

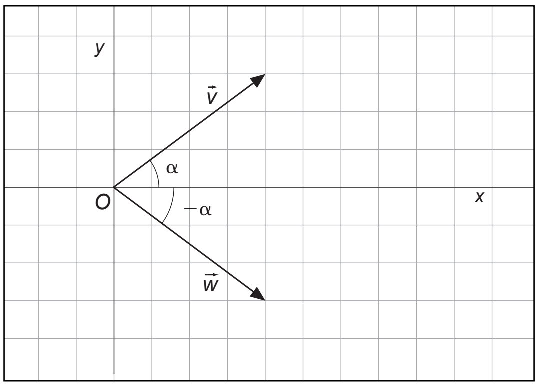
Angle $\widehat{C} \rightarrow \widehat{C} = 180° - (\widehat{A} + \widehat{B}) = 108{,}43°$

14. **Dues rectes perpendiculars *r* i *s* es tallen en el punt *P* (2, −3). Sabent que el punt *Q* (3, 5) pertany a la recta *r*, calcula *t* perquè la recta *s* passi pel punt *R* (*t*, −1).**

Els vectors $\overrightarrow{PQ}$ i $\overrightarrow{PR}$ han de ser perpendiculars $\rightarrow \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR} = 0$

$$\overrightarrow{PQ} = (1, 8);\ \overrightarrow{PR} = (t - 2,\, -1 + 3)$$
$$\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR} = t - 2 + 8\,(-1 + 3) = 0 \rightarrow$$
$$\rightarrow t + 14 = 0 \rightarrow t = -14$$

15. **Sabent que $|\vec{v}| = |\vec{w}| = 10$ i $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, calcula els components cartesians del vector $\vec{v} + \vec{w}$ (fig. 3.50).**



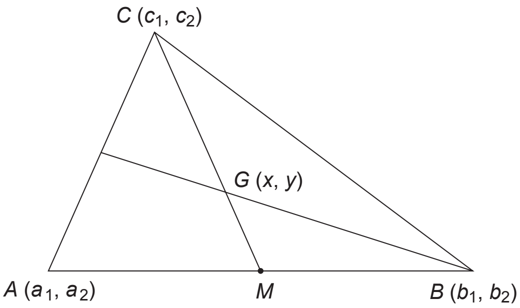
$$\vec{v} = (10\cos\alpha,\, 10\sin\alpha);$$
$$\vec{w} = (10\cos(-\alpha),\, 10\sin(-\alpha)) =$$
$$= (10\cos\alpha,\, -10\sin\alpha)$$
$$\vec{v} + \vec{w} =$$
$$= (10\cos\alpha + 10\cos\alpha,\, 10\sin\alpha - 10\sin\alpha) =$$
$$= (20\cos\alpha,\, 0)$$

Si $\sin\alpha = \frac{3}{5} \rightarrow \cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha} = \frac{4}{5}$

Aleshores, $\vec{v} + \vec{w} = \left(20 \cdot \frac{4}{5},\, 0\right) = (16, 0)$

16. **Demostra que el baricentre *G* d'un triangle de vèrtexs els punts *A* (a_1, a_2), *B* (b_1, b_2) i *C* (c_1, c_2) es troba en el punt de coordenades:**

$$\left(\frac{a_1 + b_1 + c_1}{3}, \frac{a_2 + b_2 + c_2}{3}\right)$$



$$\overrightarrow{GC} = 2\,\overrightarrow{MG} \rightarrow (c_1 - x, c_2 - y) =$$

$$= 2\left(x - \frac{a_1 + b_1}{2}, y - \frac{a_2 + b_2}{2}\right)$$

$$(c_1 - x, c_2 - y) =$$
$$= (2x - a_1 - b_1, 2y - a_2 - b_2)$$

$$c_1 - x = 2x - a_1 - b_1 \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \frac{a_1 + b_1 + c_1}{3}$$

$$c_2 - y = 2y - a_2 - b_2 \rightarrow$$

$$\rightarrow y = \frac{a_2 + b_2 + c_2}{3}$$