Comencem

- **Quants nombres de tres xifres diferents podem escriure amb els deu dígits? Cal que tinguis en compte que els grups 003, 031, per exemple, no són nombres de tres xifres.**

  Amb els 10 dígits es poden escriure $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$ agrupacions de 3 xifres, de les quals n'hi ha $9 \cdot 8 = 72$ que comencen per 0. Per tant, només es poden escriure $720 - 72 = 648$ nombres de 3 xifres.

- **Quants resultats diferents pots obtenir quan llances, de manera consecutiva, quatre monedes enlaire?**

  Per a cada moneda hi ha dos resultats possibles. Per a les quatre monedes, els resultats possibles són: $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 = 64$.

Exercicis

1. Forma totes les paraules possibles, tinguin o no sentit, amb les lletres de la paraula PERA. Quantes n'hi ha?

Hi ha $P_4 = 4! = 24$ paraules possibles. Són les següents:

AEPR, *AERP*, *APER*, *APRE*, *AREP*, *ARPE*, *EAPR*, *EARP*, *EPAR*, *EPRA*, *ERAP*, *ERPA*, *PAER*, *PARE*, *PEAR*, *PERA*, *PRAE*, *PREA*, *RAEP*, *RAPE*, *REAP*, *REPA*, *RPAE*, *RPEA*.

2. Quantes apostes diferents es poden fer a la travessa jugant al ple al quinze? I si es fixen 5 empats i 7 victòries de l'equip local?

Com que cal escriure 15 resultats amb els tres símbols 1, X, 2, es tracta de variacions amb repetició: $VR_{3,\,15} = 3^{15} = 14\,348\,907$. Si es fixen 12 resultats (5 empats i 7 victòries), només queden 3 caselles lliures, per tant:

$$VR_{3,\,3} = 3^3 = 27$$

3. En una festa acudeixen 20 joves i tots es donen la mà en saludar-se. Quantes encaixades de mans s'hi han produït?

Cada encaixada de mà equival a la tria de 2 persones entre 20, per tant:

$$C_{20,\,2} = \frac{VR_{20,\,2}}{P_2} = \frac{20 \cdot 19}{2!} = \frac{380}{2} = 190 \text{ encaixades}$$

4. Quants nombres diferents de nou xifres es poden escriure amb tres cinc, dos uns i quatre sisos. Quants comencen per cinc?

Es tracta de nombres com ara 555 116 666. Són permutacions amb repetició, per tant, de nombres de nou xifres que es puguin escriure amb tres cincs, dos uns i quatre sisos n'hi ha: $P_9^{3,\,2,\,4} = \dfrac{9!}{3!\,2!\,4!} = 1\,260$.

Hi ha $1\,260 : 9 = 140$ nombres que comencen per cadascuna de les nou xifres. Si els nombres tenen tres cincs, hi haura $3 \cdot 140 = 420$ nombres que començaran per 5.

5. Quantes diagonals té un heptàgon regular?

De cadascun dels 7 vèrtexs surten 4 diagonals, però hem de tenir en compte que la meitat són coincidents. Per tant, el nombre de diagonals que té un heptàgon regular és $\dfrac{7 \cdot 4}{2} = 14$ diagonals.

6. Resol l'equació següent:

$$\boldsymbol{V_{x,\,3} - VR_{x,\,3} + 65 = 0}$$

Recorda que *x* només pot ser un nombre natural.

$$V_{x,\,3} - VR_{x,\,3} + 65 = 0 \rightarrow$$
$$\rightarrow x(x-1)(x-2) - x^3 + 65 = 0$$

$$-3x^2 + 2x + 65 = 0 \rightarrow x = \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = -\dfrac{13}{3} \end{cases}$$

Només $x = 5$ és solució de l'equació proposada.

7. Per fer l'alineació d'un equip de futbol necessitem 11 jugadors i en tenim 22. Quantes alineacions es poden fer si cada jugador pot ocupar qualsevol posició? I si 2

d'ells només poden jugar de porter i 6 de defensa?

$C_{22,\,11} = 70\,432$ alineacions diferents

Si vuit jugadors ja estan fixats (2 porters i 6 defenses), en queden 14 dels quals cal triar-ne cinc: $C_{14,\,5} = 2\,002$ alineacions diferents.

8. **Quants nombres de quatre xifres es poden escriure amb les 9 xifres significatives, tenint en compte que han de ser diferents? I si es poden repetir xifres?**

Si les xifres són diferents:

$$V_{9,\,4} = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 3\,024 \text{ nombres}$$

Si les xifres es poden repetir:

$$VR_{9,\,4} = 9^4 = 6\,661 \text{ nombres}$$

9. **Calcula els nombres combinatoris següents:**

$$\binom{6}{2}, \binom{10}{0}, \binom{80}{5}, \binom{15}{7}, \binom{15}{8}$$

$$\binom{6}{2} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15; \quad \binom{10}{0} = 1;$$

$$\binom{80}{5} = \frac{80!}{75!\,5!} = 312\,203$$

$$\binom{15}{7} = \frac{15!}{8!\,7!} =$$

$$= \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 6\,435$$

$$\binom{15}{8} = \frac{15!}{7!\,8!} = 6\,435$$

10. **Simplifica aquestes fraccions:**

a) $\dfrac{10!}{2!\,8!}$

$$\frac{10!}{2!\,8!} = \frac{10 \cdot 9}{2} = 45$$

b) $\dfrac{15!}{3!\,12!}$

$$\frac{15!}{3!\,12!} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{3 \cdot 2} = 455$$

c) $\dfrac{50!}{2!\,48!}$

$$\frac{50!}{2!\,48!} = \frac{50 \cdot 49}{2} = 1\,225$$

d) $\dfrac{1\,000!}{3!\,997!}$

$$\frac{1\,000!}{3!\,997!} = \frac{1000 \cdot 999 \cdot 998}{3 \cdot 2} =$$

$$= 166\,167\,000$$

11. **Compara els nombres combinatoris $\binom{200}{3}$ i $\binom{200}{197}$. Simplifica les fraccions corresponents abans de realitzar-ne els càlculs.**

$$\binom{200}{3} = \frac{200!}{197!\,3!} = \frac{200 \cdot 199 \cdot 198}{3 \cdot 2} =$$

$$= 1\,313\,400$$

$$\binom{200}{197} = \frac{200!}{3!\,197!} = 1\,313\,400. \text{ Són iguals.}$$

12. **Simplifica aquestes expressions fraccionàries:**

a) $\dfrac{m!\,(n-1)!}{n!\,(m+1)!}$

$$\frac{m!\,(n-1)!}{n!\,(m+1)!} = \frac{1}{n\,(m+1)}$$

b) $\dfrac{(a+1)!\,(b-1)!}{a!\,(b+1)!}$

$$\frac{(a+1)!\,(b-1)!}{a!\,(b+1)!} = \frac{a+1}{b\,(b+1)}$$

c) $\dfrac{(m+1)!\,a!}{(m-1)!\,(a+1)!}$

$$\frac{(m+1)!\,a!}{(m-1)!\,(a+1)!} = \frac{m\,(m+1)}{a+1}$$

d) $\dfrac{7!\,(b+2)!\,8!}{9!\,b!\,6!}$

$$\frac{7!\,(b+2)!\,8!}{9!\,b!\,6!} = \frac{7\,(b+1)\,(b+2)}{9}$$

e) $\dfrac{25!\,150!}{23!\,145!}$

$$\frac{25!\,150!}{23!\,145!} =$$

$$= 25 \cdot 24 \cdot 150 \cdot 149 \cdot 148 \cdot 147 \cdot 146 =$$

$$= 4{,}2595 \cdot 10^{11}$$

f) $\dfrac{(m-n-1)!\,(n+1)!}{(n-1)!\,(m-n)!}$

$$\frac{(m-n-1)!\,(n+1)!}{(n-1)!\,(m-n)!} = \frac{n\,(n+1)}{m-n}$$

13. Resol les equacions:

a) $\dbinom{43}{x} = \dbinom{43}{x+7}$

$$\binom{43}{x} = \binom{43}{x+7} \rightarrow x + x + 7 = 43 \rightarrow$$
$$\rightarrow 2x = 36 \rightarrow x = 18$$

b) $\dbinom{25}{x+1} = \dbinom{25}{2x}$

$$\binom{25}{x+1} = \binom{25}{2x} \rightarrow x + 1 + 2x = 25 \rightarrow$$
$$\rightarrow 3x = 24 \rightarrow x = 8$$

c) $\dbinom{35}{x} = \dbinom{35}{x+3}$

$$\binom{35}{x} = \binom{35}{x+3} \rightarrow x + x + 3 = 35 \rightarrow$$
$$\rightarrow 2x = 32 \rightarrow x = 16$$

d) $\dbinom{12}{x} = \dbinom{12}{x^2}$

$$\binom{12}{x} = \binom{12}{x^2} \rightarrow x + x^2 = 12 \rightarrow$$
$$\rightarrow x^2 + x - 12 = 0 \rightarrow x = \begin{cases} x_1 = -4 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

$x = 3$, ja que ha de ser un nombre natural.

En els apartats *b*) i *d*) la solució també és $x = 1$.

14. Troba el valor de *x* en aquestes igualtats:

a) $\dbinom{21}{7} + \dbinom{21}{8} = \dbinom{22}{x}$

$$\binom{21}{7} + \binom{21}{8} = \binom{22}{x} \rightarrow x = 8$$

b) $\dbinom{19}{x} + \dbinom{19}{12} = \dbinom{20}{12}$

$$\binom{19}{x} + \binom{19}{12} = \binom{20}{12} \rightarrow x = 11$$

c) $\dbinom{10}{x-3} + \dbinom{10}{6} = \dbinom{11}{6}$

$$\binom{10}{x-3} + \binom{10}{6} = \binom{11}{6} \rightarrow$$
$$\rightarrow x - 3 = 5 \rightarrow x = 8$$

d) $\dbinom{99}{49} + \dbinom{99}{2x} = \dbinom{100}{50}$

$$\binom{99}{49} + \binom{99}{2x} = \binom{100}{50} \rightarrow$$
$$\rightarrow 2x = 50 \rightarrow x = 25$$

S'ha aplicat la segona propietat dels nombres combinatoris a cada apartat.

15. Desenvolupa les potències següents:

a) $(x-2)^5$

$$(x-2)^5 = \binom{5}{0} x^5 + \binom{5}{1} x^4 (-2) +$$
$$+ \binom{5}{2} x^3 (-2)^2 + \binom{5}{3} x^2 (-2)^3 +$$
$$+ \binom{5}{4} x (-2)^4 + \binom{5}{5} (-2)^5 =$$
$$= x^5 - 10x^4 + 40x^3 - 80x^2 + 80x - 32$$

b) $(3x + y)^6$

$$(3x+y)^6 = \binom{6}{0} (3x)^6 + \binom{6}{1} (3x)^5 y +$$
$$+ \binom{6}{2} (3x)^4 y^2 + \binom{6}{3} (3x)^3 y^3 +$$
$$+ \binom{6}{4} (3x)^2 y^4 + \binom{6}{5} (3x) y^5 + \binom{6}{6} y^6 =$$
$$= 729x^6 + 1458x^5 y + 1215x^4 y^2 +$$
$$+ 540x^3 y^3 + 135x^2 y^4 + 18xy^5 + y^6$$

c) $\left(\dfrac{a}{2} + \dfrac{b}{3}\right)^4$

$$\left(\frac{a}{2} + \frac{b}{3}\right)^4 = \binom{4}{0}\left(\frac{a}{2}\right)^4 +$$
$$+ \binom{4}{1}\left(\frac{a}{2}\right)^3 \frac{b}{3} + \binom{4}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^2\left(\frac{b}{3}\right)^2 +$$
$$+ \binom{4}{3}\left(\frac{a}{2}\right)\left(\frac{b}{3}\right)^3 + \binom{4}{4}\left(\frac{b}{3}\right)^4 =$$
$$= \frac{a^4}{16} + \frac{a^3 b}{6} + \frac{a^2 b^2}{6} + \frac{2ab^3}{27} + \frac{b^4}{81}$$

d) $\left(x - \dfrac{1}{x}\right)^7$

$$\left(x - \frac{1}{x}\right)^7 = \binom{7}{0} x^7 + \binom{7}{1} x^6 \left(-\frac{1}{x}\right) + \binom{7}{2} x^5 \left(-\frac{1}{x}\right)^2 + \binom{7}{3} x^4 \left(-\frac{1}{x}\right)^3 + \binom{7}{4} x^3 \left(-\frac{1}{x}\right)^4 + \binom{7}{5} x^2 \left(-\frac{1}{x}\right)^5 + \binom{7}{6} x \left(-\frac{1}{x}\right)^6 + \binom{7}{7} \left(-\frac{1}{x}\right)^7 =$$

$$= x^7 - 7x^5 + 21x^3 - 35x + \frac{35}{x} - \frac{21}{x^3} + \frac{7}{x^5} - \frac{1}{x^7}$$

16. Calcula el quart terme del desenvolupament de:

$$(x - 1)^{12}$$

Quart terme:

$$\binom{12}{3} x^9 (-1)^3 = -\frac{12!}{9!\,3!} x^9 = -220\, x^9$$

17. *a*) Determina el terme central en el desenvolupament $\left(x + \dfrac{1}{x}\right)^8$.

El terme central és el cinquè:

$$\binom{8}{4} x^4 \left(\frac{1}{x}\right)^4 = \binom{8}{4} = \frac{8!}{4!\,4!} = 70$$

***b*) Troba el coeficient de la potència x^{-2} en el desenvolupament anterior.**

$\binom{8}{h} x^{8-h} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^h$ és el terme que ocupa el lloc $h + 1$.

El producte de les potències:

$$\frac{x^{8-h}}{x^h} = x^{-2} \rightarrow$$

$$\rightarrow 8 - 2h = -2 \rightarrow h = 5$$

Coeficient: $\binom{8}{5} = \dfrac{8!}{5!\,3!} = 56$

18. Escriu l'expressió de $(1 - b)^{-2}$.

$$(1 - b)^{-2} = \frac{1}{(1-b)^2} = \frac{1}{1 - 2b + b^2}$$

Acabem

1. Quants nombres de tres xifres diferents es poden formar amb els dígits 1, 2, 3, 4, 5? Quants són parells? Quants són senars?

$V_{5,\,3} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ nombres de 3 xifres diferents.

$\dfrac{60}{5} \cdot 3 = 36$ seran imparells, és a dir, la xifra de les unitats serà 1, 3 o 5.

La resta: $60 - 36 = 24$ tindran 2 o 4 com a xifra de les unitats.

2. De quantes maneres es poden escollir 7 fitxes en un dòmino complet?

Triar 7 fitxes entre 28:

$$C_{28,\,7} = \frac{V_{28,\,7}}{P_7} = \frac{28 \cdot 27 \cdot 26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} =$$

$= 1\,184\,040$ maneres diferents

3. Considerem un pla on hi ha 10 rectes de manera que dues qualssevol d'aquestes rectes no són paral·leles i tres qualssevol no són concurrents. Quants punts d'intersecció determinen?

Cada dues rectes determinen un punt d'intersecció:

$$C_{10,\,2} = \frac{10 \cdot 9}{2} = 45 \text{ punts}$$

4. Es disposa de 16 jugadors de futbol i se n'han de seleccionar 11, però de manera que dos d'ells no estiguin en el mateix grup. De quantes maneres es pot fer?

Si dos jugadors no poden estar en el mateix grup és com si en descontéssim un dels setze. Són $C_{15,\,11} = C_{15,\,4} = \dfrac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 1\,365$ grups diferents.

5. Llancem un dau 4 vegades. Quants resultats diferents podem obtenir?

Es poden obtenir 6 resultats cada vegada. Són $VR_{6,\,4} = 6^4 = 1\,296$.

6. **Calcula: $\frac{16!}{14!}$, $\frac{15!}{12!}$, $\frac{20!}{22!}$, $\frac{90!}{88!}$. Simplifica prèviament les fraccions.**

$$\frac{16!}{14!} = 16 \cdot 15 = 240$$

$$\frac{15!}{12!} = 15 \cdot 14 \cdot 13 = 2\,730$$

$$\frac{20!}{22!} = \frac{1}{22 \cdot 21} = \frac{1}{462}$$

$$\frac{90!}{88!} = 90 \cdot 89 = 8\,010$$

7. **Simplifica les expressions següents:**

a) $\frac{(n-1)!}{(n+1)!}$

$$\frac{(n-1)!}{(n+1)!} = \frac{1}{n(n+1)}$$

b) $\frac{(n+2)!}{(n-1)!}$

$$\frac{(n+2)!}{(n-1)!} = n(n+1)(n+2)$$

c) $\frac{(n-r+1)!}{(n-r-1)!}$

$$\frac{(n-r+1)!}{(n-r-1)!} = (n-r)(n-r+1)$$

8. **En una cursa hi ha 7 participants de l'equip *A* i 10 de l'equip *B*. Si tots ells creuen la línia d'arribada, determina de quantes maneres diferents ho poden fer si:**

a) **Els dos primers són de l'equip *A*.**

Els dos de l'equip *A* poden arribar primers de $C_{7,\,2} = 21$ maneres diferents. Per a cadascuna d'aquestes arribades, els 15 restants hi poden arribar de $P_{15} = 15!$ maneres diferents. En total: $21 \cdot 15! = 2{,}74 \cdot 10^{13}$, aproximadament.

b) **Dos dels tres primers són de l'equip *A*.**

$P_{14} \cdot C_{7,\,2} = 14! \cdot 21 = 1{,}83 \cdot 10^{12}$, aproximadament.

c) **Com a mínim un dels tres primers és de l'equip *A*.**

$P_{14} \cdot 7 = 14! \cdot 7 = 6{,}01 \cdot 10^{11}$, aproximadament.

Cal tenir en compte que, a partir de 14!, a la calculadora científica els factorials apareixen en forma de notació científica.

9. **Quants nombres parells de quatre xifres hi ha que siguin més grans que el número 5 612?**

De 6 000 a 9 999, hi ha 2 000 nombres parells.

De 5 700 a 5 999, hi ha 150 nombres parells.

De 5 612 a 5 699 hi ha 43 nombres parells.

En total hi ha 2 193 nombres parells.

10. **Escriu tots els nombres combinatoris d'ordre 7. Calcula'ls i suma'ls. Comprova que la suma és 2^7.**

$$\binom{7}{0} = 1;\ \binom{7}{1} = 7;\ \binom{7}{2} = 21;\ \binom{7}{3} = 35;$$

$$\binom{7}{4} = 35;\ \binom{7}{5} = 21;\ \binom{7}{6} = 7;\ \binom{7}{7} = 1$$

La suma: $128 = 2^7$.

11. **Amb els dígits 1, 2, 3, 4, 5 i 6, quants nombres de quatre xifres diferents es poden formar? Calcula'n la suma.**

$V_{6,\,4} = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$ nombres. Cada xifra ocupa 360 : 6 = 60 vegades un lloc determinat.

La suma de les unitats és:

$$60 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 1260$$

igual que la suma de les desenes, les centenes i les unitats de mil. La suma total és:

$$1000 \cdot 1260 + 100 \cdot 1260 + 10 \cdot 1260 + 1260 = 1\,399\,860$$

12. **Suposem ordenats en successió creixent tots els nombres de quatre xifres diferents que es poden formar amb els dígits 6, 7, 8 i 9. Quin lloc ocupa en aquesta successió el número 7 896?**

Es poden formar $P_4 = 4! = 24$ nombres. N'hi ha 24 : 4 = 6 que comencen per 6. Dels 7 mil n'hi ha 2 que tenen el 6 o el 8 a les centenes.

Total:

$$6 + 2 + 2 = 10 \text{ nombres inferiors a } 7\,896$$

13. En un campionat de bàsquet a doble volta es juguen un total de 90 partits. Quants equips hi participen?

Anomenem x al nombre d'equips:

$V_{x,2} = x(x-1) = 90 \rightarrow x^2 - x - 90 = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow x = \begin{cases} 10 \\ -9 \end{cases}$$

Només pot ser solució $x = 10$ equips.

14. Desenvolupa la potència $(2x - y)^7$.

$$(2x-y)^7 = \binom{7}{0}(2x)^7 + \binom{7}{1}(2x)^6(-y) + \binom{7}{2}(2x)^5(-y)^2 + \binom{7}{3}(2x)^4(-y)^3 + \binom{7}{4}(2x)^3(-y)^4 + \binom{7}{5}(2x)^2(-y)^5 + \binom{7}{6}2x(-y)^6 + \binom{7}{7}(-y)^7 =$$

$$= 128x^7 - 448x^6y + 672x^5y^2 - 560x^4y^3 + 280x^3y^4 - 84x^2y^5 + 14xy^6 - y^7$$

15. Calcula el coeficient de x^5 en el desenvolupament de $(x + 2)^{12}$.

El coeficient de x^5 és el terme del desenvolupament:

$$\binom{12}{h} x^{12-h} \cdot 2^h \rightarrow 12 - h = 5 \rightarrow h = 7$$

Coeficient: $\binom{12}{7} \cdot 2^7 = 101\,376$

16. Determina el coeficient de x^{14} en el desenvolupament de $(x^2 - x)^{10}$.

De la mateixa manera que a l'exercici anterior:

$$\binom{10}{h}(x^2)^{10-h} \cdot (-x)^h \rightarrow$$

$$\rightarrow x^{20-2h} \cdot x^h = x^{20-h} = x^{14} \rightarrow$$

$$\rightarrow 20 - h = 14 \rightarrow h = 6$$

Coeficient: $\binom{10}{6}(-1)^6 = 210.$

17. Resol les equacions:

a) $\dfrac{\binom{x}{4}}{\binom{x}{5}} = \dfrac{5}{4}$

$$\frac{\binom{x}{4}}{\binom{x}{5}} = \frac{5}{4} \rightarrow$$

$$\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{4!} : \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{5!} = \frac{5}{4}$$

$$\rightarrow \frac{5!}{4!(x-4)} = \frac{5}{4} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{1}{x-4} = 1 \rightarrow x = 5$$

En simplificar s'ha tingut en compte que x ha de ser diferent de 0, 1, 2, i 3.

b) $\binom{x}{3} = \binom{x}{2} + 2\binom{x}{1}$

$$\binom{x}{3} = \binom{x}{2} + 2\binom{x}{1} \rightarrow \frac{x!}{3!(x-3)!} =$$

$$= \frac{x!}{2!(x-2)!} + \frac{x!}{1(x-1)!} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)!}{6(x-3)!} =$$

$$= \frac{x(x-1)(x-2)!}{2(x-2)!} + \frac{x(x-1)!}{(x-1)!} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{x(x-1)(x-2)}{6} = \frac{x(x-1)}{2} + x \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{(x^2-x)(x-2)}{6} = \frac{x(x-1)+2x}{2} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{x^3 - 2x^2 - x^2 + 2x}{3} = x^2 - x + 2x \rightarrow$$

$$\rightarrow x^3 - 3x^2 + 2x = 3(x^2 + x) \rightarrow$$

$$\rightarrow x(x^2 - 3x + 2) = x(3x + 1) \rightarrow$$

$$\rightarrow x^2 - 3x + 2 = 3x + 1 \rightarrow$$

$$\rightarrow x^2 - 6x + 1 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{36-4}}{2} \rightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{32}}{2}$$

18. Troba els valors de *x, y* i *z* sabent que el segon terme del desenvolupament de $(x + y)^z$ és de 15, el tercer és 90 i el quart, 270.

Segon terme: $\binom{z}{1} x^{z-1} y = 15$

Tercer terme: $\binom{z}{2} x^{z-2} y^2 = 90$

Quart terme: $\binom{z}{3} x^{z-3} y^3 = 270$

No es poden resoldre aquestes equacions. Però, tenint en compte que z ha de ser un nombre natural i que els resultats són nombres naturals, es pot deduir en la primera equació que $x = 1$ i, per tant, $z = 5$ i $y = 3$, valors que confirmen les altres dues igualtats.

19. **En el desenvolupament de $\left(2x^2 - \frac{1}{x}\right)^7$, escriu el coeficient de $\frac{1}{x}$.**

Un terme:

$$\binom{7}{h} (2x^2)^{7-h} \cdot \left(-\frac{1}{x}\right)^h$$

Terme en $\frac{1}{x} \to (x^2)^{7-h} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^h = \frac{1}{x}$

Igualant exponents:

$$2(7-h) - h = -1 \to h = 5$$

Coeficient: $\binom{7}{5} 2^2 (-1)^5 = -84$

20. **Calcula $(1 + \sqrt{x})^5 \cdot (1 - \sqrt{x})^5$.**

$$(1 + \sqrt{x})^5 = \binom{5}{0} 1^5 + \binom{5}{1} 1^4 \sqrt{x} + \binom{5}{2} 1^3 \sqrt{x^2} + \binom{5}{3} 1^2 \sqrt{x^3} + \binom{5}{4} 1 \sqrt{x^4} + \binom{5}{5} \sqrt{x^5} = 1 + 5\sqrt{x} + 10x + 10x\sqrt{x} + 5x^2 + x^2\sqrt{x}$$

$$(1 - \sqrt{x})^5 = 1 - 5\sqrt{x} + 10x - 10x\sqrt{x} + 5x^2 - x^2\sqrt{x}$$

ja que els termes que ocupen llocs parells són negatius.

$$(1 + \sqrt{x})^5 - (1 - \sqrt{x})^5 = 10\sqrt{x} + 20x\sqrt{x} + 2x^2\sqrt{x}$$