Comencem

- **Donats els punts $A(3, 2)$, $B(-1, -2)$ i $C(1, 3)$, el vector $\vec{v} = (1, 2)$ i l'angle $\alpha = 20°$, dibuixa en uns eixos de coordenades:**

  a) **La recta k que passa per A i B.**

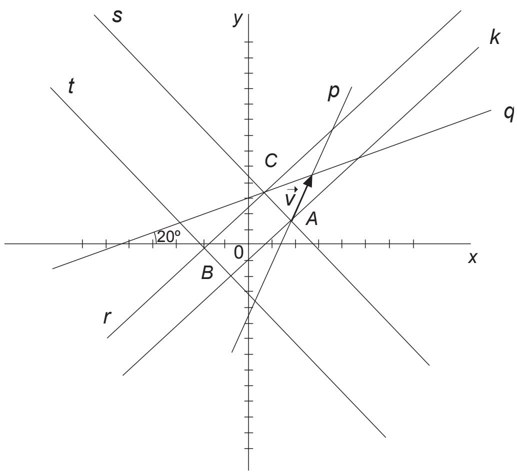
  b) **La recta p que passa per A i té la direcció de $\vec{v}$.**

  c) **La recta q que passa per C i té la inclinació de l'angle α.**

  d) **La recta r que passa per C i és paral·lela a k.**

  e) **La recta s que passa per C i és perpendicular a k.**

  f) **La recta t que passa per B i és perpendicular a k.**



  g) **Com són les rectes s i t?**

  Paral·leles.

Exercicis

1. Escriu les diferents equacions de la recta que passa pel punt $P(4, -1)$ i té com a vector director el vector $\vec{v} = (2, 5)$. Indica'n el pendent i l'abscissa i l'ordenada a l'origen.

Vectorial: $(x, y) = (4, -1) + k\,(2, 5)$

Paramètriques: $\begin{cases} x = 4 + 2k \\ y = -1 + 5k \end{cases}$

Contínua: $\dfrac{x-4}{2} = \dfrac{y+1}{5}$

General: $5x - 2y - 22 = 0$

Explícita: $y = \dfrac{5}{2}x - 11$

Canònica: $\dfrac{x}{\frac{22}{5}} = \dfrac{y}{-11} = 1$

$m = \dfrac{5}{2}$ $\qquad p = \dfrac{22}{5}$ $\qquad n = -11$

2. Considera la recta d'equació vectorial:

$$(x, y) = (-3, 2) + k \cdot (2, -1)$$

Determina quin és el valor de b per tal que el vector $\vec{v} = (-3, b)$ sigui un vector director de la recta.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{v} = (-3, b) \\ \vec{u} = (2, -1) \end{array}\right\} \; \vec{v} = k\vec{u} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{-3}{2} = \frac{b}{-1} \rightarrow b = \frac{3}{2}$$

3. Per a la recta d'equació $\dfrac{x}{-4} + \dfrac{y}{2} = 1$, escriu les equacions general i explícita. Indica'n un vector director.

$$\frac{x}{-4} + \frac{y}{2} = 1 \rightarrow x - 2y = -4 \rightarrow$$

$$\rightarrow x - 2y + 4 = 0$$

$$2y = x + 4 \rightarrow y = \frac{x+4}{2} \rightarrow y = \frac{1}{2}x + 2$$

$$m = \frac{1}{2} \rightarrow \vec{v} = (2, 1)$$

4. El punt $A(3, 1)$ és de la recta que passa pel punt $P(-2, -2)$ i té com a vector director $\vec{v} = (1, 3)$? Justifica'n la resposta.

$$\left.\begin{array}{l} P(-2, -2) \\ \vec{v} = (1, 3) \end{array}\right\} \; x + 2 = \frac{y+2}{3} \rightarrow$$

$$\rightarrow 3x - y + 4 = 0$$

$A = (3, 1) \rightarrow 3 \cdot 3 - 1 + 4 = 9 - 1 + 4 = 12 \neq 0$. No és de la recta.

5. Quin és el pendent de la recta $x = -3$? Per què?

No té pendent real, ja que és una recta vertical i, per tant, $m = \text{tg } 90° \notin \mathbb{R}$.

6. Escriu l'equació canònica de la recta que té per equació explícita:

$$y = -\frac{1}{5}x + \frac{3}{10}$$

$$\left.\begin{array}{l} y = -\dfrac{1}{5}x + \dfrac{3}{10} \rightarrow n = \dfrac{3}{10} \\ y = 0 \rightarrow -\dfrac{1}{5}x + \dfrac{3}{10} = 0 \rightarrow \\ \quad \rightarrow x = \dfrac{3}{2} \rightarrow p = \dfrac{3}{2} \end{array}\right\}$$

$$\rightarrow \frac{x}{\frac{3}{2}} + \frac{y}{\frac{3}{10}} = 1$$

7. Considera la recta d'equació: $\frac{2 - x}{-3} = \frac{y}{2}$

Es demana: un vector director, el pendent i els punts de tall amb els eixos de coordenades.

$$\frac{2 - x}{-3} = \frac{y}{2} \rightarrow \frac{x - 2}{3} = \frac{y}{2} \rightarrow$$
$$\rightarrow \vec{v} = (3, 2)$$
$$\rightarrow m = \frac{2}{3}$$

$$y = 0 \rightarrow \frac{x - 2}{3} = 0 \rightarrow x = 2 \rightarrow$$
$$\rightarrow P(2, 0) \text{ a l'eix } OX$$

$$x = 0 \rightarrow -\frac{2}{3} = \frac{y}{2} \rightarrow y = -\frac{4}{3} \rightarrow$$
$$\rightarrow Q\left(0, -\frac{4}{3}\right) \text{ a l'eix } OY$$

8. Esbrina si el punt $P(5, 1)$ pertany o no a cadascuna de les rectes. Justifica'n les respostes.

a) $(x, y) = (1, -1) + k \cdot (2, 1)$

$$(x, y) = (1, -1) + k \cdot (2, 1) \rightarrow$$
$$\rightarrow \begin{cases} x = 1 + 2k \\ y = -1 + k \end{cases}$$

$$P(5, 1) \rightarrow \begin{cases} 5 = 1 + 2k \rightarrow k = 2 \\ 1 = -1 + k \rightarrow k = 2 \end{cases}$$

Sí és de la recta.

b) $\begin{cases} x = 3 + 2k \\ y = 1 + k \end{cases}$

$$P(5, 1) \rightarrow \begin{cases} 5 = 3 + 2k \rightarrow k = 1 \\ 1 = 1 + k \rightarrow k = 0 \end{cases}$$

No és de la recta.

c) $x + 2y - 3 = 0$

$$P(5, 1) \rightarrow 5 + 2 - 3 = 4 \neq 0$$

No és de la recta.

d) $\frac{x - 1}{4} = \frac{y + 1}{2}$

$$P(5, 1) \rightarrow \begin{cases} \dfrac{5 - 1}{4} = 1 \\ \dfrac{1 + 1}{2} = 1 \end{cases}$$

Sí és de la recta.

e) $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$

$$P(5, 1) \rightarrow \frac{1}{2} \cdot 5 - \frac{3}{2} = \frac{5}{2} - \frac{3}{2} = 1$$

Sí és de la recta.

f) $\frac{x}{3} + \frac{y}{\frac{3}{2}} = 1$

$$P(5, 1) \rightarrow \frac{5}{3} + \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{5}{3} + \frac{2}{3} = \frac{7}{3} \neq 1$$

No és de la recta.

9. Escriu l'equació general de la recta que passa pels punts $P(4, 5)$ i $Q(-3, 2)$.

$$\left.\begin{array}{l} P(4, 5) \\ Q(-3, 2) \end{array}\right\} \rightarrow \overrightarrow{PQ} = \vec{q} - \vec{p} = (-7, -3) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{l} \vec{v} = (7, 3) \\ P(4, 5) \end{array}\right\} \frac{x - 4}{7} = \frac{y - 5}{3} \rightarrow$$

$$\rightarrow 3x - 7y + 23 = 0$$

10. Sense fer-ne la representació gràfica, esbrina si *A* (1, 2), *B* (3, 3) i *C* (−1, 1) estan alineats.

$$\left.\begin{array}{l} A(1,2) \\ B(3,3) \end{array}\right\} \overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a} = (2, 1) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{l} \vec{v} = (2,1) \\ A(1,2) \end{array}\right\} \frac{x-1}{2} = y - 2 \rightarrow$$

$$\rightarrow x - 2y + 3 = 0$$

$$C(-1, 1) \rightarrow -1 - 2 + 3 = 0$$

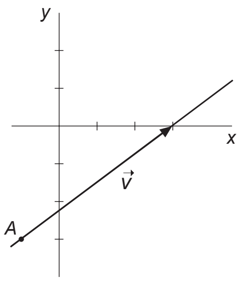
Estan alineats.

11. Determina l'equació de la recta de pendent $m = \frac{3}{4}$ que passa pel punt *A* (−1, −3). Tot seguit representa-la gràficament.

$$y = mx + n \rightarrow y = \frac{3}{4}x + n$$

$$A(-1, -3) \rightarrow -3 = \frac{3}{4}(-1) + n \rightarrow n = -\frac{9}{4}$$

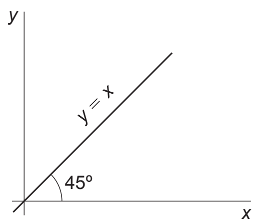
$$y = \frac{3}{4}x - \frac{9}{4}$$



12. Troba l'equació de la recta que passa per l'origen i té un angle d'inclinació α = 45°. Dibuixa-la.

$$m = \text{tg}\,\alpha = \text{tg}\,45° = 1 \rightarrow y = x + n$$

$$0\,(0, 0) \rightarrow y = x$$



13. Comprova que els punts *A* (2, 3), *B* (−2, 1) i *C* (5, −1) no estan alineats. Troba les equacions de les rectes que determinen el triangle, els vèrtexs del qual són els punts *A*, *B* i *C*.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a} = (-4, -2) \\ \overrightarrow{AC} = \vec{c} - \vec{a} = (3, -4) \end{array}\right\} \overrightarrow{AB} \neq k\,\overrightarrow{AC}$$

No estan alineats.

Costat *AB*:

$$\left.\begin{array}{r} \overrightarrow{AB} = (-4, -2) \rightarrow \vec{v} = (2, 1) \\ A(2, 3) \end{array}\right\}$$

$$\frac{x-2}{2} = y - 3 \rightarrow x - 2y + 4 = 0$$

Costat *AC*:

$$\left.\begin{array}{r} \overrightarrow{AC} = (3, -4) \rightarrow \vec{u} = (3, -4) \\ A(2, 3) \end{array}\right\}$$

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{-4} \rightarrow 4x + 3y - 17 = 0$$

Costat *BC*:

$$\left.\begin{array}{r} \overrightarrow{BC} = \vec{c} - \vec{b} = (7, -2) \rightarrow \vec{w} = (7, -2) \\ B(-2, 1) \end{array}\right\}$$

$$\frac{x+2}{7} = \frac{y-1}{-2} \rightarrow 2x + 7y - 3 = 0$$

14. Determina l'equació explícita de la recta que passa pels punts *P* (0, 2) i *Q* (5, −1). Quin és el seu pendent?

$$\overrightarrow{PQ} = \vec{q} - \vec{p} = (5, -3) \rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \rightarrow \vec{v} = (5, -3) \rightarrow m = -\frac{3}{5} \\ P(0, 2) \rightarrow n = 2 \end{array}\right\} y = -\frac{3}{5}x + 2$$

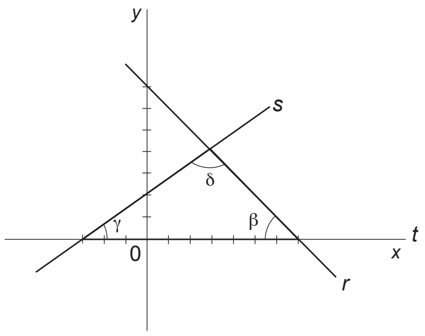
15. Escriu l'equació canònica de la recta anterior.

$$\left.\begin{array}{l} y = -\frac{3}{5}x + 2 \rightarrow n = 2 \\ y = 0 \rightarrow -\frac{3}{5}x + 2 = 0 \rightarrow x = \frac{10}{3} \rightarrow \\ \rightarrow p = \frac{10}{3} \end{array}\right\}$$

$$\frac{x}{\frac{10}{3}} + \frac{y}{2} = 1$$

16. Troba la mesura dels angles del triangle que formen les rectes *r*: *x* + *y* − 7 = 0;

s: $2x - 3y + 6 = 0$ i t: $y = 0$. Fes-ne el dibuix corresponent.



$x + y - 7 = 0 \rightarrow m = -1 \rightarrow \text{tg}\,\alpha = -1 \rightarrow$
$\rightarrow \alpha = 135° \rightarrow \beta = 45°$

$2x - 3y + 6 = 0 \rightarrow m = \dfrac{2}{3} \rightarrow \text{tg}\,\gamma = \dfrac{2}{3} \rightarrow$
$\rightarrow \gamma = 33{,}7°$

$\delta = 180° - (\beta + \gamma) = 180° - 78{,}7° = 101{,}3°$

17. **Troba l'equació de la recta que passa pel punt de tall de les rectes $3x + 2y - 8 = 0$ i $5x - 7y - 3 = 0$, i és paral·lela a la recta $\dfrac{8 - x}{-5} = \dfrac{y + 2}{7}$.**

$\left.\begin{matrix} 3x + 2y - 8 = 0 \\ 5x - 7y - 3 = 0 \end{matrix}\right\} x = 2, y = 1 \rightarrow P(2, 1)$

$\dfrac{8 - x}{-5} = \dfrac{y + 2}{7} \rightarrow \dfrac{x - 8}{5} = \dfrac{y + 2}{7}$

$\left.\begin{matrix} \vec{v} = (5, 7) \\ P(2, 1) \end{matrix}\right\} \dfrac{x - 2}{5} = \dfrac{y - 1}{7}$

$7x - 5y - 9 = 0$

18. **Esbrina si les tres rectes $2x - y = 0$, $x + y - 3 = 0$ i $5x - 4y + 3 = 0$ es tallen o no en un mateix punt.**

$\left.\begin{matrix} 2x - y = 0 \\ x + y - 3 = 0 \end{matrix}\right\} x = 1, y = 2 \rightarrow P(1, 2)$

$\left.\begin{matrix} 2x - y = 0 \\ 5x - 4y + 3 = 0 \end{matrix}\right\} x = 1, y = 2 \rightarrow P(1, 2)$

Sí, es tallen en el punt $P(1, 2)$.

19. **Troba el baricentre del triangle de vèrtexs $A(-3, 0)$, $B(3, 4)$ i $C(6, -1)$.**

$\left.\begin{matrix} M \text{ punt mitjà del segment } AB \rightarrow M(0, 2) \\ C(6, -1) \end{matrix}\right\}$

$\overrightarrow{MC} = (6, -3)$

$\left.\begin{matrix} \vec{v} = (2, -1) \\ M(0, 2) \end{matrix}\right\} \dfrac{x}{2} = \dfrac{y - 2}{-1} \rightarrow x + 2y - 4 = 0$

Mediana des de C.

$\left.\begin{matrix} N \text{ punt mitjà del segment } BC \rightarrow N\left(\dfrac{9}{2}, \dfrac{3}{2}\right) \\ A(-3, 0) \end{matrix}\right\}$

$\overrightarrow{NA} = \left(-\dfrac{15}{2}, -\dfrac{3}{2}\right)$

$\left.\begin{matrix} \vec{u} = (5, 1) \\ A(-3, 0) \end{matrix}\right\} \dfrac{x + 3}{5} = y \rightarrow x - 5y + 3 = 0$

Mediana des de A.

$\left.\begin{matrix} x + 2y - 4 = 0 \\ x - 5y + 3 = 0 \end{matrix}\right\} x = 2, y = 1 \rightarrow G(2, 1)$

20. **Classifica aquests parells de rectes en incidents, coincidents o paral·leles. En cas que siguin incidents, troba'n el punt on es tallen.**

a) $\boldsymbol{y = \dfrac{1}{2}x + 3, \qquad x - 3 = \dfrac{y + 2}{2}}$

$\left.\begin{matrix} y = \dfrac{1}{2}x + 3 \rightarrow x - 2y + 6 = 0 \\ x - 3 = \dfrac{y + 2}{2} \rightarrow 2x - y - 8 = 0 \end{matrix}\right\} \rightarrow$

$\rightarrow$ Incidents; $P\left(\dfrac{22}{3}, \dfrac{20}{3}\right)$

b) $\boldsymbol{x - 3y + 3 = 0, \qquad -2x + 6y - 6 = 0}$

$\left.\begin{matrix} x - 3y + 3 = 0 \\ -2x + 6y - 6 = 0 \rightarrow x - 3y + 3 = 0 \end{matrix}\right\} \rightarrow$

$\rightarrow$ Coincidents

c) $\boldsymbol{3x - 3y + 7 = 0, \qquad x - y - 3 = 0}$

$\left.\begin{matrix} 3x - 3y + 7 = 0 \\ x - y - 3 = 0 \rightarrow 3x - 3y - 9 = 0 \end{matrix}\right\} \rightarrow$

$\rightarrow$ Paral·leles

d) $\boldsymbol{(x, y) = (1, 2) + k \cdot (2, -3),}$
$\boldsymbol{3x + 2y - 6 = 0}$

$(x, y) = (1, 2) + k \cdot (2, -3) \rightarrow$

$\rightarrow \dfrac{x - 1}{2} = \dfrac{y - 2}{-3} \rightarrow$

$\left.\begin{matrix} \rightarrow 3x + 2y - 8 = 0 \\ 3x + 2y - 6 = 0 \end{matrix}\right\}$ Paral·leles

21. **Determina el punt d'intersecció de les rectes:**

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} \text{ i } (x, y) = (1, 2) + k \cdot (-1, 1)$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{x}{2} = \frac{y}{3} \rightarrow 3x - 2y = 0 \\ (x, y) = (1, 2) + k(-1, 1) \rightarrow \\ \rightarrow \frac{x-1}{-1} = y - 2 \rightarrow x + y - 3 = 0 \end{array}\right\}$$

$$x = \frac{6}{5},\ y = \frac{9}{5}$$

$$P\left(\frac{6}{5}, \frac{9}{5}\right)$$

22. **Considera els punts $P(3, 1)$ i $Q(1, 2)$ i les rectes r: $3x - 4y - 12 = 0$ i s: $x + y + 1 = 0$. Troba l'equació de:**

a) **La recta paral·lela a r que passi pel punt mitjà del segment PQ.**

M, punt mitjà del segment $PQ \rightarrow M\left(2, \frac{3}{2}\right)$

r: $3x - 4y - 12 = 0$

Paral·lela $\rightarrow 3x - 4y + C = 0$

$M\left(2, \frac{3}{2}\right) \rightarrow 6 - 6 + C = 0 \rightarrow C = 0$

$$3x - 4y = 0$$

b) **La recta que passa pel punt d'intersecció de r i s i té pendent $m = 2$.**

$$\left.\begin{array}{l} 3x - 4y - 12 = 0 \\ x + y + 1 = 0 \end{array}\right\} x = \frac{8}{7},\ y = -\frac{15}{7};$$

$$A\left(\frac{8}{7}, -\frac{15}{7}\right)$$

$$m = 2 \rightarrow y = 2x + n$$

$$A\left(\frac{8}{7}, -\frac{15}{7}\right) \rightarrow -\frac{15}{7} = \frac{16}{7} + n \rightarrow$$

$$\rightarrow n = -\frac{31}{7}$$

$$y = 2x - \frac{31}{7} \rightarrow 14x - 7y - 31 = 0$$

c) **La recta que passa per Q i és paral·lela a s.**

s: $x + y + 1 = 0$

Paral·lela $\rightarrow x + y + C = 0$

$Q(1, 2) \rightarrow 1 + 2 + C = 0 \rightarrow C = -3$

$$x + y - 3 = 0$$

d) **La recta que passa per P i és paral·lela a r.**

r: $3x - 4y - 12 = 0$

Paral·lela $\rightarrow 3x - 4y + C = 0$

$P(3, 1) \rightarrow 9 - 4 + C = 0 \rightarrow C = -5$

$$3x - 4y - 5 = 0$$

Determina també les coordenades del punt on es tallen les rectes corresponents als apartats *c*) i *d*).

$$\left.\begin{array}{l} x + y - 3 = 0 \\ 3x - 4y - 5 = 0 \end{array}\right\} x = \frac{17}{7},\ y = \frac{4}{7}$$

$$B\left(\frac{17}{7}, \frac{4}{7}\right)$$

23. **Calcula els valors de q per tal que les rectes r i s siguin paral·leles:**

r: $qx - 2y + 4 = 0$

s: $x + (q - 3)y - 7 = 0$

$$q = \frac{-2}{q-3}$$

$$q^2 - 3q + 2 = 0 \rightarrow q_1 = 1,\ q_2 = 2$$

24. **Comprova que els punts $A(1, 2)$, $B(-1, 0)$ i $C(3, -4)$ són els vèrtexs d'un triangle rectangle. En quin dels tres punts està el vèrtex corresponent a l'angle recte? Justifica'n la resposta.**

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a} = (-2, -2) \\ \overrightarrow{AC} = \vec{c} - \vec{a} = (2, -6) \end{array}\right\}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -4 + 12 = 8 \neq 0 \rightarrow \widehat{A} \neq 90°$$

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB} = (2, 2) \\ \overrightarrow{BC} = \vec{c} - \vec{b} = (4, -4) \end{array}\right\}$$

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 8 - 8 = 0 \rightarrow \widehat{B} = 90°$$

25. **Determina l'equació de la recta perpendicular a la recta $y = \frac{3}{4}x - 6$ i que passa pel punt on es tallen les rectes $x + y + 9 = 0$ i $x - 2y + 3 = 0$.**

$$\left.\begin{array}{l} x + y + 9 = 0 \\ x - 2y + 3 = 0 \end{array}\right\} x = -7,\ y = -2 \rightarrow$$

$$\rightarrow P(-7, -2)$$

$$y = \frac{3}{4}x - 6$$

Perpendicular: $y = -\frac{4}{3}x + n$

$$P(-7, -2) \rightarrow -2 = -\frac{4}{3}(-7) + n \rightarrow$$

$$\rightarrow n = -\frac{34}{3}$$

$$y = -\frac{4}{3}x - \frac{34}{3} \rightarrow 4x + 3y + 34 = 0$$

26. Classifica els següents parells de rectes incidents segons siguin o no perpendiculars. Justifica'n les respostes.

a) $\mathbf{3x - 5y + 3 = 0 \qquad -3x - 5y + 7 = 0}$

$$\left.\begin{array}{l} 3x - 5y + 3 = 0 \rightarrow \vec{u} = (5, 3) \\ -3x - 5y + 7 = 0 \rightarrow \vec{v} = (5, -3) \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = 25 - 9 = 16 \neq 0$$

No són perpendiculars.

b) $\mathbf{y = -\frac{1}{7}x - 4 \qquad -x - 2 = \frac{y-1}{7}}$

$$\left.\begin{array}{l} y = -\frac{1}{7}x - 4 \rightarrow m = -\frac{1}{7} \rightarrow \\ \rightarrow \vec{u} = (7, -1) \\ -x - 2 = \frac{y-1}{7} \rightarrow \frac{x+2}{-1} = \\ = \frac{y-1}{7} \rightarrow \vec{v}(-1, 7) \end{array}\right\}$$

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = -7 - 7 = -14 \neq 0$$

No són perpendiculars.

c) $\mathbf{\left\{\begin{array}{l} x = -7 + 2h \\ y = -1 + 5h \end{array}\right. \qquad (x, y) = k\cdot(-5, 2)}$

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} x = -7 + 2h \\ y = -1 + 5h \end{array}\right\} \rightarrow \vec{u} = (2, 5) \\ (x, y) = k\cdot(-5, 2) \rightarrow \vec{v} = (-5, 2) \end{array}\right\}$$

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = -10 + 10 = 0$$

Són perpendiculars.

d) $\mathbf{x + 3y - 8 = 0 \qquad 9x - 3y + 13 = 0}$

$$\left.\begin{array}{l} x + 3y - 8 = 0 \rightarrow \vec{u} = (-3, 1) \\ 9x - 3y + 13 = 0 \rightarrow \vec{v} = (1, 3) \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \vec{u} - \vec{v} = -3 + 3 = 0$$

Són perpendiculars.

27. Determina l'equació de la mediatriu del segment d'extrems els punts *A* (−2, 3) i *B* (6, −1). Recorda que la mediatriu d'un segment és la recta perpendicular pel punt mitjà.

M, punt mitjà del segment *AB* $\rightarrow M(2, 1)$

$$\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a} = (8, -4) \rightarrow \vec{n} = (2, -1) \rightarrow$$
$$\rightarrow 2x - y + C = 0$$

$$M(2, 1) \rightarrow 4 - 1 + C = 0 \rightarrow C = -3$$

$$2x - y - 3 = 0$$

28. Determina les coordenades del circumcentre i de l'ortocentre del triangle de vèrtexs *A* (2, 5), *B* (1, 1) i *C* (3, 2). El circumcentre és el punt on es tallen les mediatrius del triangle. L'ortocentre és el punt on es tallen les rectes que determinen les altures del triangle.

M, punt mitjà del segment *AB* $\rightarrow M\left(\frac{3}{2}, 3\right)$

$$\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a} = (-1, -4) \rightarrow \vec{n}_1 = (1, 4) \rightarrow$$
$$\rightarrow x + 4y + C = 0$$

$$M\left(\frac{3}{2}, 3\right) \rightarrow \frac{3}{2} + 12 + C = 0 \rightarrow C = -\frac{27}{2}$$

$$x - 4y - \frac{27}{2} = 0 \rightarrow 2x + 8y - 27 = 0$$

Mediatriu *AB*.

N, punt mitjà del segment *BC* $\rightarrow N\left(2, \frac{3}{2}\right)$

$$\overrightarrow{BC} = \vec{c} - \vec{b} = (2, 1) \rightarrow \vec{n}_2 = (2, 1) \rightarrow$$
$$\rightarrow 2x + y + C = 0$$

$$N\left(2, \frac{3}{2}\right) \rightarrow 4 + \frac{3}{2} + C = 0 \rightarrow C = -\frac{11}{2}$$

$$2x + y - \frac{11}{2} = 0 \rightarrow 4x + 2y - 11 = 0$$

Mediatriu *BC*.

$$\left.\begin{array}{l} 2x + 8y - 27 = 0 \\ 4x + 2y - 11 = 0 \end{array}\right\} x = \frac{17}{14}, y = \frac{43}{14}$$

Circumcentre: $\left(\frac{17}{14}, \frac{43}{14}\right)$

$$2x + 8y - 27 = 0$$

Paral·lela: $2x + 8y + C = 0$

$$C(3, 2) \rightarrow 6 + 16 + C = 0 \rightarrow C = -22$$

$$2x + 8y - 22 = 0 \rightarrow x + 4y - 11 = 0$$

Alçada desde *C*.

$$4x + 2y - 11 = 0$$

Paral·lela: $4x + 2y + C = 0$

$A(2, 5) \rightarrow 8 + 10 + C = 0 \rightarrow C = -18$

$4x + 2y - 18 = 0 \rightarrow 2x + y - 9 = 0$

Alçada desde A.

$$\left.\begin{array}{l} x + 4y - 11 = 0 \\ 4x + 2y - 18 = 0 \end{array}\right\} x = \frac{25}{7},\ y = \frac{13}{7}$$

Ortocentre: $\left(\frac{25}{7}, \frac{13}{7}\right)$

29. **Donat el punt *P* (3, 4):**

a) **Determina la projecció ortogonal de *P* sobre la recta *r*: 4*x* + *y* = 1.**

$r: 4x + y - 1 = 0$

$s \perp r \rightarrow s: x - 4y + C = 0$

$P(3, 4) \rightarrow 3 - 16 + C = 0 \rightarrow C = 13$

$$\left.\begin{array}{l} x - 4y + 13 = 0 \\ 4x + y - 1 = 0 \end{array}\right\} x = -\frac{9}{17},\ y = \frac{53}{17} \rightarrow$$

$$\rightarrow P'\left(-\frac{9}{17}, \frac{53}{17}\right)$$

b) **Troba les coordenades del punt simètric de *P* respecte de la recta *r*.**

$$\left.\begin{array}{l} P(3, 4) \\ P'\left(-\frac{9}{17}, \frac{53}{17}\right) \\ S(x, y) \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{3 + x}{2} = -\frac{9}{17} \rightarrow x = -\frac{69}{17} \\ \frac{4 + y}{2} = \frac{53}{17} \rightarrow y = \frac{38}{17} \end{array}\right\}$$

$$S\left(-\frac{69}{17}, \frac{38}{17}\right)$$

30. **Dedueix els valors de *q* perquè les rectes *r* i *s* siguin perpendiculars:**

***r*: *qx* − *y* + 2 = 0**

***s*: (*q* + 2) *x* + (2*q* + 1) *y* = 0**

$$\left.\begin{array}{l} r: qx - y + 2 = 0 \rightarrow \vec{u} = (1, q) \\ s: (q + 2)x + (2q + 1)y = 0 \rightarrow \\ \rightarrow \vec{v} = (-2q - 1, q + 2) \end{array}\right\}$$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \rightarrow -2q - 1 + q^2 + 2q = 0 \rightarrow$

$\rightarrow q^2 - 1 = 0 \rightarrow q_1 = 1, q_2 = -1$

31. **Calcula l'angle que formen les rectes:**

***r*: *x* + *y* + 4 = 0**

***s*: *y* = −4*x* − 2**

$$\left.\begin{array}{l} r: x + y + 4 = 0 \rightarrow \vec{u} = (1, -1) \\ s: y = -4x - 2 \rightarrow m = -4 \rightarrow \vec{v} = (1, -4) \end{array}\right\}$$

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{1 + 4}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{17}} = \frac{5}{\sqrt{34}} \rightarrow$$

$$\rightarrow \alpha = \text{arc cos}\, \frac{5}{\sqrt{34}} = 30{,}96°$$

32. **Considera la recta *r*: *x* − *y* + 4 = 0 i el punt $P\left(2, -\frac{1}{2}\right)$. Troba l'equació de les rectes que passen per *P* i formen un angle de 60° amb la recta *r*.**

$$\left.\begin{array}{l} r: x - y + 4 = 0 \rightarrow \vec{u} = (1, 1) \\ \vec{v} = (1, m) \end{array}\right\}$$

$$\frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \cos 60° \rightarrow \frac{|1 + m|}{\sqrt{2}\sqrt{1 + m^2}} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1 + 2m + m^2}{2(1 + m^2)} = \frac{1}{4} \rightarrow 4 + 8m + 4m^2 =$$

$$= 2 + 2m^2 \rightarrow 2m^2 + 8m + 2 = 0$$

$$m^2 + 4m + 1 = 0 \rightarrow m = -2 \pm \sqrt{3}$$

$$\left.\begin{array}{l} m_1 = -2 + \sqrt{3} \\ P\left(2, -\frac{1}{2}\right) \end{array}\right\} y + \frac{1}{2} = (-2 + \sqrt{3})(x - 2)$$

$$\left.\begin{array}{l} m_2 = -2 - \sqrt{3} \\ P\left(2, -\frac{1}{2}\right) \end{array}\right\} y + \frac{1}{2} = (-2 - \sqrt{3})(x - 2)$$

33. **Quant mesuren els angles del triangle de vèrtexs els punts *A* (2, 4), *B* (−3, −1) i *C* (−1, 6)?**

$$\left.\begin{array}{l} A(2, 4) \\ B(-3, -1) \end{array}\right\} \overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a} = (-5, -5)$$

$$\left.\begin{array}{l} A(2, 4) \\ C(-1, 6) \end{array}\right\} \overrightarrow{AC} = \vec{c} - \vec{a} = (-3, 2)$$

$$\cos\widehat{A} = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \frac{15 - 10}{\sqrt{50}\sqrt{13}} =$$

$$= \frac{5}{5\sqrt{2}\sqrt{13}} = \frac{1}{\sqrt{26}} \rightarrow$$

$$\rightarrow \widehat{A} = \text{arc cos}\, \frac{1}{\sqrt{26}} = 78{,}7°$$

$\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB} = (5, 5)$

$\left.\begin{array}{l} B(-3, -1) \\ C(-1, 6) \end{array}\right\} \overrightarrow{BC} = (2, 7)$

$$\cos \widehat{B} = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}|} = \frac{10 + 35}{\sqrt{50}\sqrt{53}} =$$

$$= \frac{45}{5\sqrt{2}\sqrt{53}} = \frac{9}{\sqrt{106}} \rightarrow$$

$$\rightarrow \widehat{B} = \text{arc cos } \frac{1}{\sqrt{106}} = 29°$$

$\widehat{C} = 180° - (\widehat{A} + \widehat{B}) = 180° - 107{,}7° = 72{,}3°$

34. Determina les equacions de les rectes que formen un angle de 30° amb la recta $5x - 2y + 3 = 0$ i passen pel punt $P(x, -6)$, on P és un punt de la recta donada. Troba l'angle que formen aquestes rectes.

$P(x, -6) \rightarrow 5x - 2y + 3 = 0$

$P(x, 6) \rightarrow 5x + 12 + 3 = 0 \rightarrow x = -3 \rightarrow$
$\rightarrow P(-3, -6)$

$\left.\begin{array}{r} 5x - 2y + 3 = 0 \rightarrow \vec{u} = (2, 5) \\ \vec{v} = (1, m) \end{array}\right\}$

$$\frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \cos 30° \rightarrow \frac{|2 + 5m|}{\sqrt{29}\sqrt{1 + m^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{4 + 20m + 25m^2}{29(1 + m^2)} = \frac{3}{4} \rightarrow$$

$$\rightarrow 16 + 80m + 100m^2 = 87 + 87m^2$$

$$13m^2 + 80m - 71 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow m = \frac{-40 \pm 29\sqrt{3}}{13}$$

$\left.\begin{array}{l} m_1 = \dfrac{-40 + 29\sqrt{3}}{13} \\ P(-3, -6) \end{array}\right\}$

$$y + 6 = \frac{-40 + 29\sqrt{3}}{13}(x + 3)$$

$\left.\begin{array}{l} m_2 = \dfrac{-40 - 29\sqrt{3}}{13} \\ P(-3, -6) \end{array}\right\}$

$$y + 6 = \frac{-40 - 29\sqrt{3}}{13}(x + 3)$$

35. Donades les rectes

$$\boldsymbol{r: x - 2 = \frac{y}{3} \text{ i } s: -y - 3 = \frac{x - 3}{2},}$$

determina l'angle que formen.

$\left.\begin{array}{l} r: x - 2 = \dfrac{y}{3} \rightarrow \vec{u} = (1, 3) \\ s: -y - 3 = \dfrac{x - 3}{2} \rightarrow \dfrac{x - 3}{2} = \dfrac{y + 3}{-1} \rightarrow \\ \rightarrow \vec{v} = (2, -1) \end{array}\right\}$

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{|2 - 3|}{\sqrt{10}\sqrt{5}} = \frac{1}{5\sqrt{2}} \rightarrow$$

$$\rightarrow \alpha = \text{arc cos } \frac{1}{5\sqrt{2}} = 81{,}87°$$

36. Calcula de dues maneres diferents la distància de l'origen de coordenades a la recta $x - 3y - 7 = 0$.

a) $\left.\begin{array}{l} r: x - 3y - 7 = 0 \\ O(0, 0) \end{array}\right\}$

$$d(0, r) = \frac{|-7|}{\sqrt{1 + 9}} = \frac{7}{\sqrt{10}} = \frac{7\sqrt{10}}{10}\, u$$

b) $r: x - 3y - 7 = 0$

$s \perp r \rightarrow s: 3x + y + C = 0$

$$O(0, 0) \rightarrow C = 0 \rightarrow$$

$\left.\begin{array}{l} \rightarrow s: 3x + y = 0 \\ r: x - 3y - 7 = 0 \end{array}\right\} x = \dfrac{7}{10}, y = -\dfrac{21}{10}$

$O'\left(\dfrac{7}{10}, -\dfrac{21}{10}\right)$ és el projectat de O sobre r.

$\overrightarrow{OO'} = \left(\dfrac{7}{10}, -\dfrac{21}{10}\right)$

$$d(O, r) = d(O, O') = |\overrightarrow{OO'}| =$$

$$= \sqrt{\frac{49}{100} + \frac{441}{100}} = \sqrt{\frac{490}{100}} = \frac{7\sqrt{10}}{10}\, u$$

37. Troba la distància entre les rectes:

$$\boldsymbol{2x - 3y + 5 = 0 \text{ i } 4x - 6y + 3 = 0}$$

$\left.\begin{array}{l} r: 2x - 3y + 5 = 0 \\ s: 4x - 6y + 3 = 0 \end{array}\right\}$ r i s són paral·leles

$P(2, 3)$ és un punt de r, aleshores:

$$d(r, s) = d(P, s) = \frac{|8 - 18 + 3|}{\sqrt{16 + 36}} =$$

$$= \frac{7}{\sqrt{52}} = \frac{7}{2\sqrt{13}} = \frac{7\sqrt{13}}{26}\, u$$

38. Els punts de la mediatriu d'un segment equidisten dels seus extrems. Tenint en

compte aquesta propietat, determina l'equació de la mediatriu del segment d'extrems *A* (−2, −5) i *B* (4, 7).

$$\left.\begin{matrix} A(-2,-5) \\ X(x,y)\end{matrix}\right\} \overrightarrow{AX} = \vec{x} - \vec{a} = (x+2, y+5)$$

$$\left.\begin{matrix} B(4,7) \\ X(x,y)\end{matrix}\right\} \overrightarrow{BX} = \vec{x} - \vec{b} = (x-4, y-7)$$

$$|\overrightarrow{AX}| = |\overrightarrow{BX}| \rightarrow \sqrt{(x+2)^2 + (y+5)^2} = \sqrt{(x-4)^2 + (y-7)^2}$$

$$x^2 + 4x + 4 + y^2 + 10y + 25 = x^2 - 8x + 16 + y^2 - 14y + 49$$

$$12x + 24y - 36 = 0 \rightarrow x + 2y - 3 = 0$$

39. **Determina les equacions de les bisectrius dels angles que formen les rectes *r*: *x* + 2*y* + 5 = 0 i *s*: 2*x* + *y* − 3 = 0. Comprova que són perpendiculars.**

$$\left.\begin{matrix} r\colon x + 2y + 5 = 0 \\ s\colon 2x + y - 3 = 0\end{matrix}\right\}$$

$$\frac{x + 2y + 5}{\sqrt{5}} = \pm\frac{2x + y - 3}{\sqrt{5}}$$

$$\left.\begin{matrix} x + 2y + 5 = 2x + y - 3 \rightarrow \\ \rightarrow x - y - 8 = 0 \rightarrow \vec{u} = (1, 1) \\ x + 2y + 5 = -2x - y + 3 \rightarrow \\ \rightarrow 3x + 3y + 2 = 0 \rightarrow \vec{v} = (3, -3)\end{matrix}\right\}$$

$$\vec{u} + \vec{v} = 3 - 3 = 0$$

40. **Demostra que les dues bisectrius dels angles que formen dues rectes que es tallen són perpendiculars.**

$$\frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \pm\frac{A'x + B'y + C'}{\sqrt{A'^2 + B'^2}}$$

$$A\sqrt{A'^2 + B'^2}\,x + B\sqrt{A'^2 + B'^2}\,y + C\sqrt{A'^2 + B'^2} = A'\sqrt{A^2 + B^2}\,x + B'\sqrt{A^2 + B^2}\,y + C'\sqrt{A^2 + B^2}$$

$$\left(A\sqrt{A'^2 + B'^2} - A'\sqrt{A^2 + B^2}\right)x + \left(B\sqrt{A'^2 + B'^2} - B'\sqrt{A^2 + B^2}\right)y + C\sqrt{A'^2 + B'^2} - C'\sqrt{A^2 + B^2} = 0$$

$$\vec{u} = \left(-B\sqrt{A'^2 + B'^2} + B'\sqrt{A^2 + B^2},\ A\sqrt{A'^2 + B'^2} - A'\sqrt{A^2 + B^2}\right)$$

$$A\sqrt{A'^2 + B'^2}\,x + B\sqrt{A'^2 + B'^2}\,y + C\sqrt{A'^2 + B'^2} = -A'\sqrt{A^2 + B^2}\,x - B'\sqrt{A^2 + B^2}\,y - C'\sqrt{A^2 + B^2}$$

$$\left(A\sqrt{A'^2 + B'^2} + A'\sqrt{A^2 + B^2}\right)x + \left(B\sqrt{A'^2 + B'^2} + B'\sqrt{A^2 + B^2}\right)y + C\sqrt{A'^2 + B'^2} + C'\sqrt{A^2 + B^2} = 0$$

$$\vec{v} = \left(-B\sqrt{A'^2 + B'^2} - B'\sqrt{A^2 + B^2},\ A\sqrt{A'^2 + B'^2} + A'\sqrt{A^2 + B^2}\right)$$

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \left(-B\sqrt{A'^2 + B'^2} + B'\sqrt{A^2 + B^2}\right)\cdot\left(-B\sqrt{A'^2 + B'^2} - B'\sqrt{A^2 + B^2}\right) + \left(A\sqrt{A'^2 + B'^2} - A'\sqrt{A^2 + B^2}\right)\cdot\left(A\sqrt{A'^2 + B'^2} + A'\sqrt{A^2 + B^2}\right) =$$

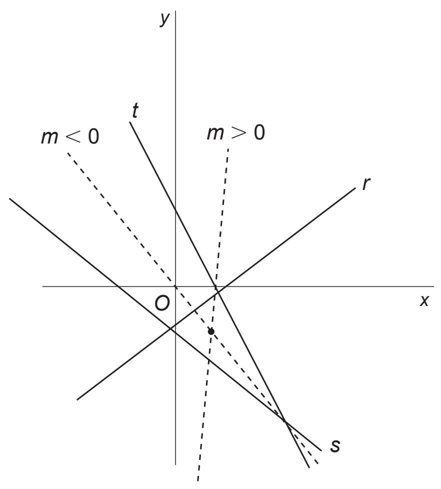
$$= \left(-B\sqrt{A'^2 + B'^2}\right)^2 - \left(B'\sqrt{A^2 + B^2}\right)^2 + \left(A\sqrt{A'^2 + B'^2}\right)^2 - \left(A'\sqrt{A^2 + B^2}\right)^2 =$$

$$= B^2(A'^2 + B'^2) - B'^2(A^2 + B^2) + A^2(A'^2 + B'^2) - A'^2(A^2 + B^2) =$$

$$= \boldsymbol{B^2A'^2} + \boldsymbol{B^2B'^2} - \boldsymbol{B'^2A^2} + \boldsymbol{B'^2B'} + \boldsymbol{A^2A'^2} + \boldsymbol{A^2B'^2} - \boldsymbol{A'^2A^2} - \boldsymbol{A'^2B^2} = 0$$

41. **L'incentre d'un triangle és el punt on es tallen les bisectrius dels angles interiors del triangle. Troba les coordenades de l'incentre del triangle determinat per les rectes:**

***r*: 3*x* − 4*y* − 5 = 0, *s*: 3*x* + 4*y* + 7 = 0 i *t*: 4*x* + 3*y* − 6 = 0.**



$$\left.\begin{array}{l} r\colon\ 3x - 4y - 5 = 0 \\ t\colon\ 4x + 3y - 6 = 0 \end{array}\right\}$$

$$\frac{3x - 4y - 5}{5} = \pm\frac{4x + 3y - 6}{5}$$

$$3x - 4y - 5 = 4x + 3y - 6$$
$$x + 7y - 1 = 0 \rightarrow m < 0 \rightarrow \text{no}$$

$$3x - 4y - 5 = -4x - 3y + 6$$
$$7x - y - 11 = 0 \rightarrow m > 0$$

$$\left.\begin{array}{l} s\colon\ 3x + 4y + 7 = 0 \\ t\colon\ 4x + 3y - 6 = 0 \end{array}\right\}$$

$$\frac{3x + 4y + 7 = 0}{5} = \pm\frac{4x + 3y - 6}{5}$$

$$3x + 4y + 7 = 4x + 3y - 6$$
$$x - y - 13 = 0 \rightarrow m > 0 \rightarrow \text{no}$$

$$3x + 4y + 7 = -4x - 3y + 6$$
$$7x + 7y + 1 = 0 \rightarrow m < 0$$

$$\left.\begin{array}{l} 7x - y - 11 = 0 \\ 7x + 7y + 1 = 0 \end{array}\right\}$$

$$x = \frac{19}{14},\ y = -\frac{3}{2}$$

Incentre: $\left(\frac{19}{14}, -\frac{3}{2}\right)$

42. **Donades dues rectes de pendents $m = 2$ i $m' = -3$, calcula els pendents de les dues rectes bisectrius dels angles que determinen.**

$$\left.\begin{array}{l} m = 2 \rightarrow y = 2x + n \rightarrow 2x - y + n = 0 \\ m' = -3 \rightarrow y = -3x + n' \rightarrow \\ \rightarrow 3x + y - n' = 0 \end{array}\right\}$$

$$\frac{2x - y + n}{\sqrt{5}} = \pm\frac{3x + y - n'}{\sqrt{10}} \rightarrow$$

$$\rightarrow 2x - y + n = \pm\frac{3x + y - n'}{\sqrt{2}}$$

b_1: $2\sqrt{2}\,x - \sqrt{2}\,y + \sqrt{2}\,n = 3x + y - n'$

b_1: $(3 - 2\sqrt{2})x + (1 + \sqrt{2})y - \sqrt{2}\,n - n' = 0$

$$m_1 = \frac{2\sqrt{2} - 3}{1 + \sqrt{2}} = \frac{(2\sqrt{2} - 3)(1 - \sqrt{2})}{1 - 2} =$$
$$= \frac{5\sqrt{2} - 7}{-1} = 7 - 5\sqrt{2}$$

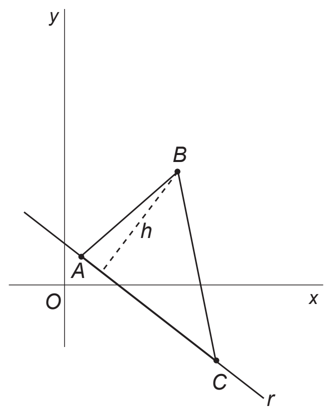
b_2: $2\sqrt{2}\,x - \sqrt{2}\,y + \sqrt{2}\,n = -3x - y + n'$

b_2: $(3 + 2\sqrt{2})x + (1 - \sqrt{2})y + \sqrt{2}\,n + n' = 0$

$$m_2 = \frac{3 + 2\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} = \frac{(3 + 2\sqrt{2})(\sqrt{2} + 1)}{2 - 1} =$$
$$= 7 + 5\sqrt{2}$$

Acabem

1. **Calcula l'àrea del triangle de vèrtexs els punts $A(1, 1)$, $B(3, 4)$ i $C(5, -2)$.**



$$\overrightarrow{AC} = \vec{c} - \vec{a} = (4, -3)$$
$$b = |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5\ u$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{v} = (4, -3) \\ A(1, 1) \end{array}\right\}$$

$$\frac{x - 1}{4} = \frac{y - 1}{-3} \rightarrow r\colon 3x + 4y - 7 = 0$$

$$h = d(B, r) = \frac{9 + 16 - 7}{\sqrt{25}} = \frac{18}{5}\ u$$

$$S = \frac{1}{2}\,b\,h = \frac{1}{2}\,5 \cdot \frac{18}{5} = 9\ u^2$$

2. **Determina el valor de k per tal que les rectes: r: $kx + (k - 1)\,y - 2 = 0$ i s: $3kx - (3k + 1)\,y + 5 = 0$ siguin:**

a) **Paral·leles.**

$$\frac{k}{3k} = \frac{k - 1}{-3k - 1}$$
$$-3k^2 - k = 3k^2 - 3k$$
$$6k^2 - 2k = 0 \rightarrow 2k(3k - 1) = 0 \rightarrow$$
$$\rightarrow k_1 = 0,\ k_2 = \frac{1}{3}$$

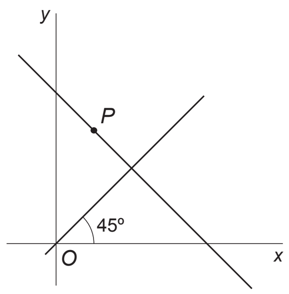
b) **Perpendiculars.**

$$\left.\begin{array}{l} \vec{u} = (1 - k, k) \\ \vec{v} = (3k + 1, 3k) \end{array}\right\}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \rightarrow (1 - k)(3k + 1) + k \cdot 3k = 0$$

$$-3k^2 + 2k + 1 + 3k^2 = 0 \rightarrow$$
$$\rightarrow 2k + 1 = 0 \rightarrow k = -\frac{1}{2}$$

3. **Determina l'equació de la recta que passa pel punt $P(2, 4)$, tal que la seva perpendicular per l'origen de coordenades forma un angle de 45° amb l'eix d'abscisses.**



$$\left.\begin{array}{r} \alpha = 45° \rightarrow m = \text{tg}\,\alpha = \text{tg}\,45° = 1 \\ O = (0, 0) \end{array}\right\} \; y = x$$

$r: x - y = 0$

$s \perp r,\ s: x + y + C = 0$

$$P = (2, 4) \rightarrow 2 + 4 + C = 0 \rightarrow C = -6$$
$$x + y - 6 = 0$$

4. **Els punts $O(0, 0)$, $P(4, 2)$ i $Q(2, 6)$ són els vèrtexs d'un triangle. Troba el baricentre (B), el circumcentre (C) i l'ortocentre (A).**

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{PO} = (-4, -2) \\ \overrightarrow{PQ} = (-2, 4) \end{array}\right\} \; \overrightarrow{PO} \cdot \overrightarrow{PQ} = 8 - 8 = 0 \rightarrow$$
$$\rightarrow \widehat{P} = 90°$$

És un triangle rectangle en P.

Baricentre: $B\left(\dfrac{4+2}{3}, \dfrac{2+6}{3}\right) \rightarrow B\left(2, \dfrac{8}{3}\right)$

Circumcentre: punt mitjà del segment OQ $\rightarrow$ $\rightarrow C(1, 3)$

Ortocentre: vèrtex P $\rightarrow A(4, 2)$

Comprova que:

a) **B, C i A estan alineats.**

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = \left(-2, \dfrac{2}{3}\right) \\ \overrightarrow{AC} = (-3, 1) \end{array}\right\}$$

Són linealment dependents, per tant els punts A, B i C, estan alineats.

b) **$\overrightarrow{AB} = 2 \cdot \overrightarrow{AC}$.**

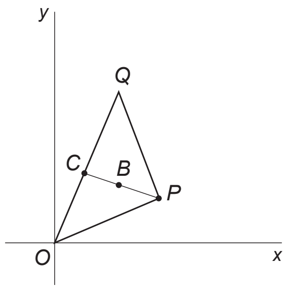
$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = \left(-2, \dfrac{2}{3}\right) \\ \overrightarrow{BC} = \left(-1, \dfrac{1}{3}\right) \rightarrow 2\,\overrightarrow{BC} = \\ = 2\left(-1, \dfrac{1}{3}\right) = \left(-2, \dfrac{2}{3}\right) \end{array}\right\} \overrightarrow{AB} = 2\,\overrightarrow{BC}$$

c) **La distància de C a cada vèrtex és la mateixa.**

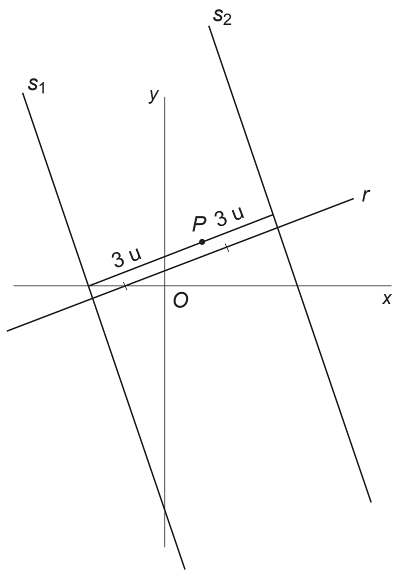
$$\overrightarrow{CO} = (-1, -3),\ d(C, O) = |\overrightarrow{CO}| =$$
$$= \sqrt{1 + 9} = \sqrt{10}\,u$$

$$\overrightarrow{CP} = (3, -1),\ d(C, P) = |\overrightarrow{CP}| =$$
$$= \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10}\,u$$

$$\overrightarrow{CQ} = (1, 3),\ d(C, Q) = |\overrightarrow{CQ}| =$$
$$= \sqrt{1 + 9} = \sqrt{10}\,u$$



5. **Escriu l'equació de la recta perpendicular a $x - 3y + 1 = 0$ que es troba a distància 3 del punt $P(1, 1)$.**



$r: x - 3y + 1 = 0$

$s \perp r,\ s: 3x + y + C = 0$

$$d(P, s) = 3 \rightarrow \frac{|3 + 1 + C|}{\sqrt{10}} = 3 \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{4 + C}{\sqrt{10}} = \pm 3 \begin{cases} C_1 = 3\sqrt{10} - 4 \\ C_2 = -3\sqrt{10} - 4 \end{cases}$$

$$s_1 = 3x + y + 3\sqrt{10} - 4 = 0$$
$$s_2 = 3x + y - 3\sqrt{10} - 4 = 0$$

6. Els punts *A* (0, 2) i *B* (4, 0) són dos vèrtexs d'un triangle rectangle isòsceles d'hipotenusa *AB*. Calcula les coordenades del tercer vèrtex *C* i l'àrea del triangle.

$A(0, 2)$, $B(4, 0)$, $C(x, y)$

$\overrightarrow{CA} = (-x, 2 - y)$

$\overrightarrow{CB} = (4 - x, -y)$

$$|\overrightarrow{CA}| = |\overrightarrow{CB}| \rightarrow$$
$$\rightarrow \sqrt{(-x)^2 + (2 - y)^2} = \sqrt{(4 - x)^2 + (-y)^2}$$

$$x^2 + 4 - 4y + y^2 = 16 - 8x + x^2 + y^2 \rightarrow$$
$$\rightarrow 8x - 4y - 12 = 0 \rightarrow 2x - y - 3 = 0$$

$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 0 \rightarrow -x(4 - x) + (2 - y)(-y) = 0$$
$$-4x + x^2 - 2y + y^2 = 0 \rightarrow$$
$$\rightarrow x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$$

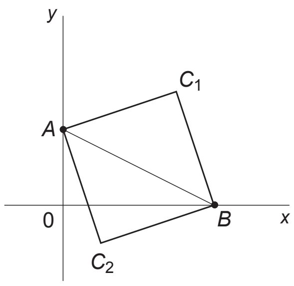
$$\left.\begin{array}{l} 2x - y - 3 = 0 \\ x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0 \end{array}\right\}$$

Dues solucions:

$$x_1 = 3,\ y_1 = 3 \rightarrow C_1(3, 3)$$
$$x_2 = 1,\ y_2 = -1 \rightarrow C_2(1, -1)$$

$$\left.\begin{array}{l} C(3, 3) \\ A(0, 2) \end{array}\right\} \overrightarrow{CA} = (-3, -1) \rightarrow$$
$$\rightarrow |\overrightarrow{CA}| = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10}\, u$$
$$|\overrightarrow{CB}| = |\overrightarrow{CA}| = \sqrt{10}\, u$$

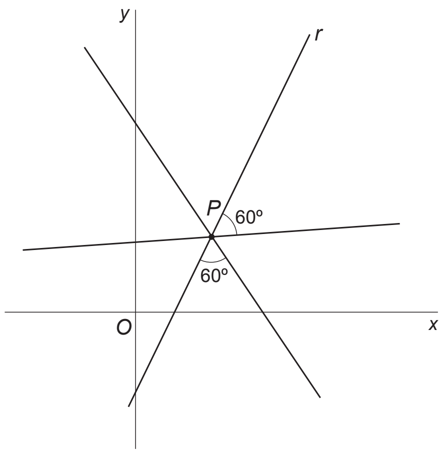
$$S = \frac{1}{2} |\overrightarrow{CA}| \cdot |\overrightarrow{CB}| = \frac{1}{2} \sqrt{10} \cdot \sqrt{10} = 5u^2$$



7. Determina les equacions de les rectes que tallen la recta $2x - y - 3 = 0$ en el punt d'abscissa $x = 3$ i formen amb ella un angle de 60°.

$x = 3 \rightarrow 6 - y - 3 = 0 \rightarrow y = 3$

$P(3, 3)$



$$r: 2x - y - 3 = 0 \rightarrow \left.\begin{array}{l} \vec{u} = (1, 2) \\ \vec{v} = (1, m) \end{array}\right\}$$

$$\frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \cos 60° \rightarrow \frac{|1 + 2m|}{\sqrt{5}\sqrt{1 + m^2}} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1 + 4m + 4m^2}{5(1 + m^2)} = \frac{1}{4} \rightarrow$$
$$\rightarrow 4 + 16m + 16m^2 = 5 + 5m^2$$

$$11m^2 + 16m - 1 = 0 \rightarrow m = \frac{-8 \pm 5\sqrt{3}}{11}$$

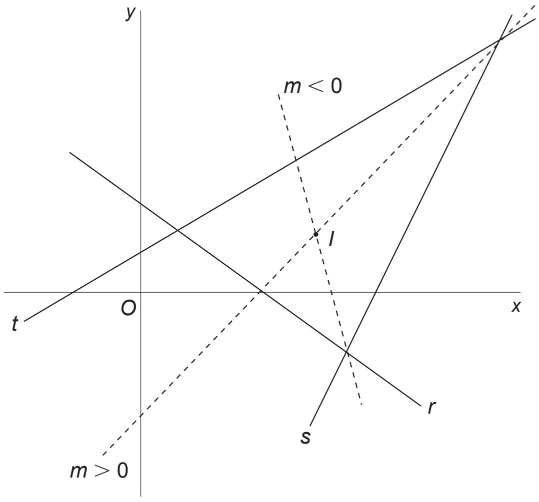
$$\left.\begin{array}{l} P(3, 3) \\ m_1 = \dfrac{-8 + 5\sqrt{3}}{11} \end{array}\right\}$$

$$y - 3 = \frac{-8 \pm 5\sqrt{3}}{11}(x - 3)$$

$$\left.\begin{array}{l} P(3, 3) \\ m_2 = \dfrac{-8 - 5\sqrt{3}}{11} \end{array}\right\}$$

$$y - 3 = \frac{-8 - 5\sqrt{3}}{11}(x - 3)$$

8. Troba l'incentre del triangle determinat per les rectes $2x + 3y - 8 = 0$, $3x - 2y - 25 = 0$ i $2x - 3y + 4 = 0$. Comprova que l'incentre equidista dels tres costats del triangle.



$$\left.\begin{array}{l} s\colon\ 3x - 2y - 25 = 0 \\ t\colon\ 2x - 3y + 4 = 0 \end{array}\right\}$$

$$\frac{3x - 2y - 25}{\sqrt{13}} = \pm\frac{2x - 3y + 4}{\sqrt{13}}$$

$$3x - 2y - 25 = 2x - 3y + 4$$

$$x + y - 29 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow m < 0 \rightarrow \text{No}$$

$$3x - 2y - 25 = -2x + 3y - 4$$

$$5x - 5y - 21 = 0 \quad m > 0$$

$$\left.\begin{array}{l} r\colon\ 2x + 3y - 8 = 0 \\ s\colon\ 3x - 2y - 25 = 0 \end{array}\right\}$$

$$\frac{2x + 3y - 8}{\sqrt{13}} = \pm\frac{3x - 2y - 25}{\sqrt{13}}$$

$$2x + 3y - 8 = 3x - 2y - 25$$

$$x - 5y - 17 = 0$$

$$m > 0 \rightarrow \text{No}$$

$$2x + 3y - 8 = -3x + 2y + 25$$

$$5x + y - 33 = 0 \quad m < 0$$

$$\left.\begin{array}{l} 5x - 5y - 21 = 0 \\ 5x + y - 33 = 0 \end{array}\right\} x = \frac{31}{5},\ y = 2$$

Incentre: $I\left(\frac{31}{5}, 2\right)$

$$d(I, r) = \frac{\left|\frac{62}{5} + 6 - 8\right|}{\sqrt{13}} = \frac{\frac{52}{5}}{\sqrt{13}} =$$

$$= \frac{52}{5\sqrt{13}} = \frac{52\sqrt{13}}{5 \cdot 13} = \frac{4\sqrt{13}}{5}\, u$$

$$d(I, s) = \frac{\left|\frac{93}{5} - 4 - 25\right|}{\sqrt{13}} = \frac{\frac{52}{5}}{\sqrt{13}} =$$

$$= \frac{4\sqrt{13}}{5}\, u$$

$$d(I, t) = \frac{\left|\frac{62}{5} - 6 + 4\right|}{\sqrt{13}} = \frac{\frac{52}{5}}{\sqrt{13}} =$$

$$= \frac{4\sqrt{13}}{5}\, u$$

9. Calcula l'àrea del triangle determinat per les rectes: *r*: $4x + y - 5 = 0$; *s*: $x + 3y - 4 = 0$ i *t*: $3x - 2y - 12 = 0$.

$$\left.\begin{array}{l} r\colon\ 4x + y - 5 = 0 \\ s\colon\ x + 3y - 4 = 0 \end{array}\right\} x = 1,\ y = 1 \rightarrow A(1, 1)$$

$$\left.\begin{array}{l} r\colon\ 4x + y - 5 = 0 \\ t\colon\ 3x - 2y - 12 = 0 \end{array}\right\} x = 2,\ y = -3 \rightarrow$$

$$\rightarrow B(2, -3)$$

$$\left.\begin{array}{l} s\colon\ x + 3y - 4 = 0 \\ t\colon\ 3x - 2y - 12 = 0 \end{array}\right\} x = 4,\ y = 0 \rightarrow$$

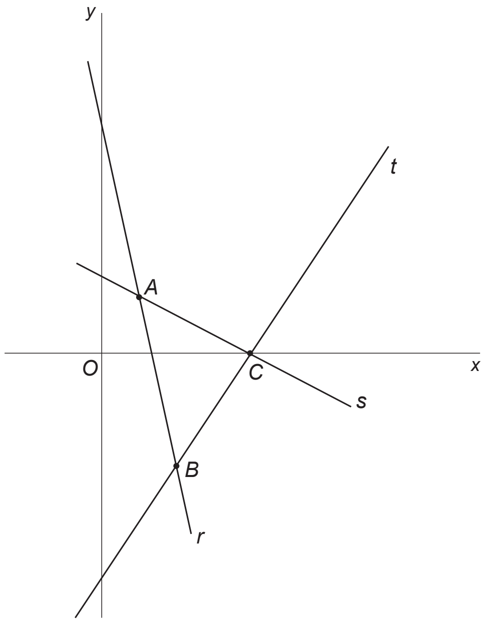
$$\rightarrow C(4, 0)$$

$$\overrightarrow{AC} = \vec{c} - \vec{a} = (3, -1)$$

$$b = |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10}\, u$$

$$h = d(B, s) = \frac{|2 - 9 - 4|}{\sqrt{10}} = \frac{11}{\sqrt{10}}\, u$$

$$S = \frac{1}{2}\, bh = \frac{1}{2}\sqrt{10} \cdot \frac{11}{\sqrt{10}} = \frac{11}{2}\, u^2$$



10. Determina l'equació de les rectes paral·leles a la recta: $2x + y + 3 = 0$ que es troben a distància 5 del punt $P(1, -2)$.

r: $2x + y + 3 = 0$

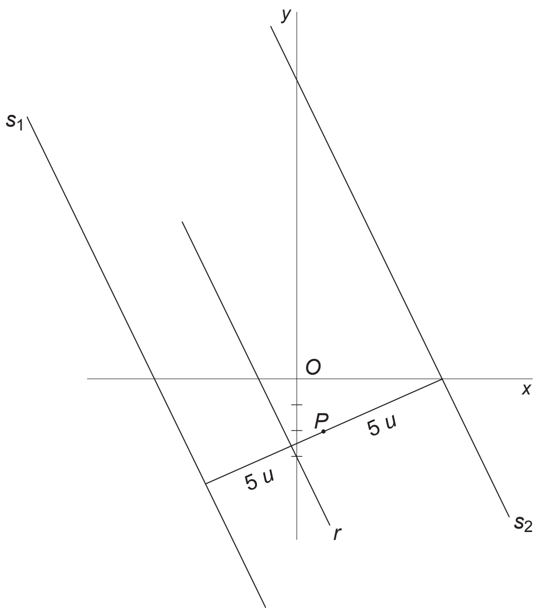
s paral·lela a $r \rightarrow s$: $2x + y + C = 0$

$$d(P, s) = 5 \rightarrow \frac{|2 - 2 + C|}{\sqrt{5}} = 5 \rightarrow$$

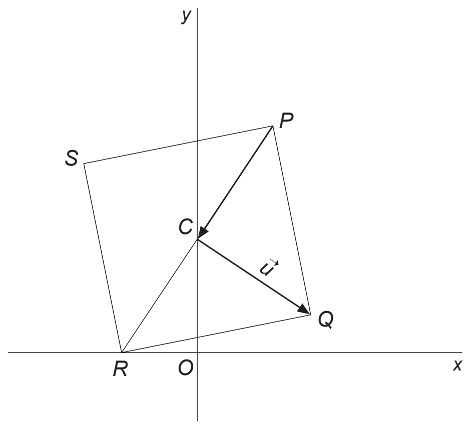
$$\rightarrow |C| = 5\sqrt{5} \rightarrow C = \pm 5\sqrt{5}$$

s_1: $2x + y + 5\sqrt{5} = 0$

s_2: $2x + y - 5\sqrt{5} = 0$



11. El centre d'un quadrat és el punt $C(0, 3)$ i el punt $P(2, 6)$ n'és un vèrtex. Troba els tres vèrtexs restants, el perímetre i l'àrea del quadrat.



$$\left.\begin{array}{l} P(2, 6) \\ C(0, 3) \\ R(x, y) \end{array}\right\} \begin{array}{l} \dfrac{x+2}{2} = 0 \rightarrow x = -2 \\ \dfrac{6+y}{2} = 3 \rightarrow y = 0 \end{array} \Bigg\} R(-2, 0)$$

$$\overrightarrow{PC} = \vec{c} - \vec{p} = (-2, -3)$$

$$\vec{u} \perp \overrightarrow{PC} \rightarrow \vec{u} = (3, -2)$$

$$\left.\begin{array}{l} C(0, 3) \\ \vec{u} = (3, -2) \\ Q(x, y) \end{array}\right\} \overrightarrow{CQ} = \vec{u} \rightarrow (x, y - 3) = (3, -2)$$

$$\left.\begin{array}{l} x = 3 \\ y - 3 = -2 \rightarrow y = 1 \end{array}\right\} Q(3, 1)$$

$$\left.\begin{array}{l} Q(3, 1) \\ C(0, 3) \\ S(x, y) \end{array}\right\} \begin{array}{l} \dfrac{3+x}{2} = 0 \rightarrow x = -3 \\ \dfrac{1+y}{2} = 3 \rightarrow y = 5 \end{array} \Bigg\} S(-3, 5)$$

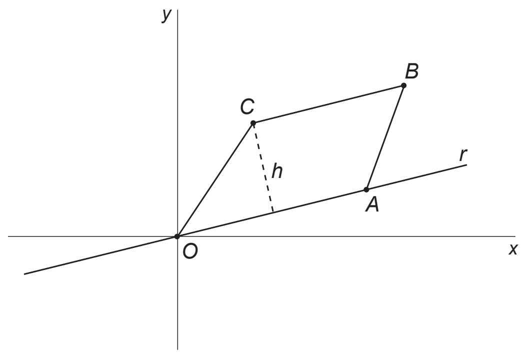
$$\overrightarrow{PQ} = \vec{q} - \vec{p} = (1, -5) \rightarrow$$

$$\rightarrow |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{1 + 25} = \sqrt{26}\ u$$

$$p = 4\,|\overrightarrow{PQ}| = 4\sqrt{26}\ u$$

$$S = |\overrightarrow{PQ}|^2 = \sqrt{26^2} = 26\ u^2$$

12. Un paral·lelogram *OABC* té els seus vèrtexs en els punts $O(0, 0)$, $A(3, 1)$ i $C(1, 2)$. Calcula les coordenades del vèrtex B i l'àrea del paral·lelogram.



$$\overrightarrow{OA} = (3, 1)$$

$$\left.\begin{array}{l} C(1, 2) \\ B(x, y) \end{array}\right\}$$

$$\overrightarrow{CB} = \vec{b} - \vec{c} = (x - 1, y - 2)$$

$$\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{OA} \rightarrow (x - 1, y - 2) = (3, 1)$$

$$\left.\begin{array}{l} x - 1 = 3 \rightarrow x = 4 \\ y - 2 = 1 \rightarrow y = 3 \end{array}\right\} B(4, 3)$$

$$b = |\overrightarrow{OA}| = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10}\ u$$

$$\left.\begin{array}{r} \vec{u} = \overrightarrow{OA} = (3, 1) \\ O(0, 0) \end{array}\right\} \frac{x}{3} = y \rightarrow r\!: x - 3y = 0$$

$$h = d(C, r) \rightarrow \frac{|1 - 6|}{\sqrt{10}} = \frac{5}{\sqrt{10}}\ u$$

$$S = b\,h = \sqrt{10} \cdot \frac{5}{\sqrt{10}} = 5\ u^2$$

13. **Determina l'equació de les rectes que contenen les altures del triangle de vèrtexs *A* (−2, 1), *B* (0, 2) i *C* (4, 0).**

$$\left.\begin{array}{l} A\,(-2, 1) \\ B\,(0, 2) \end{array}\right\} \overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a} = (2, 1)$$
$$\vec{n}_1 = (2, 1) \rightarrow 2x + y + C = 0$$

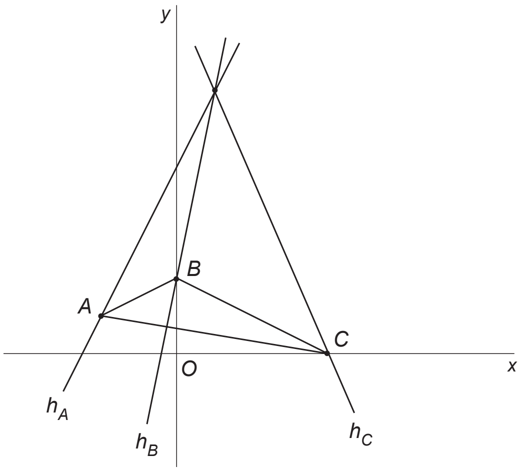
$$C\,(4, 0) \rightarrow 8 + C = 0 \rightarrow C = -8$$
$$h_c\!: 2x + y - 8 = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} B\,(0, 2) \\ C\,(4, 0) \end{array}\right\} \overrightarrow{BC} = \vec{c} - \vec{b} = (4, -2)$$
$$\vec{n}_2 = (2, -1) \rightarrow 2x - y + C = 0$$

$$A\,(-2, 1) \rightarrow -4 - 1 + C = 0 \rightarrow C = 5$$
$$h_A\!: 2x - y + 5 = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} A\,(-2, 1) \\ B\,(4, 0) \end{array}\right\} \overrightarrow{AC} = \vec{c} - \vec{a} = (6, -1)$$
$$\vec{n}_3 = (6, -1) \rightarrow 6x - y + C = 0$$

$$B\,(0, 2) \rightarrow -2 + C = 0 \rightarrow C = 2$$
$$h_B\!: 6x - y + 2 = 0$$



14. **Dos dels vèrtexs oposats d'un rombe es troben situats en els punts *A* (2, 4) i *C* (0, 2) i el vèrtex *B* és un punt de l'eix d'abscisses. Determina les coordenades dels vèrtexs *B* i *D* i calcula l'àrea del rombe.**

M, punt mitjà del segment $AC \rightarrow M\,(1, 3)$

$$\overrightarrow{AC} = \vec{c} - \vec{a} = (-2, -2), \vec{n} = (1, 1)$$
$$x + y + C = 0$$
$$M\,(1, 3) \rightarrow 1 + 3 + C = 0 \rightarrow C = -4$$

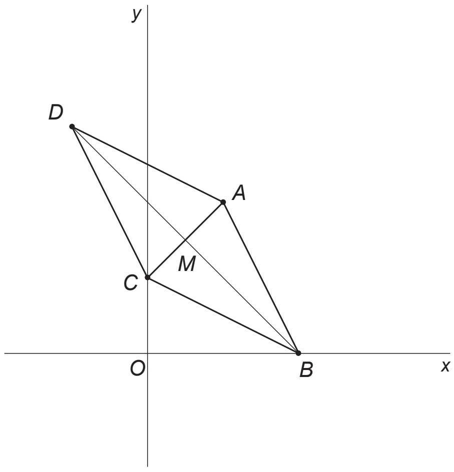
$$\left.\begin{array}{l} x + y - 4 = 0 \\ y = 0 \end{array}\right\} x = 4, y = 0 \rightarrow B\,(4, 0)$$

$$\left.\begin{array}{l} B\,(4, 0) \\ M\,(1, 3) \\ D\,(x, y) \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} \dfrac{4 + x}{2} = 1 \rightarrow x = -2 \\ \dfrac{y}{2} = 3 \rightarrow y = 6 \end{array}\right\} D\,(-2, 6)$$

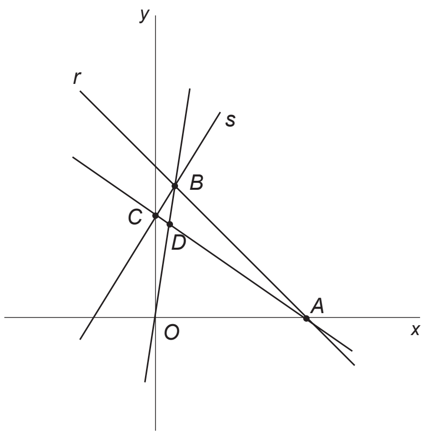
$$d = |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}\,u;$$
$$\overrightarrow{BD} = \vec{d} - \vec{b} = (-6, 6)$$

$$d' = |\overrightarrow{BD}| = \sqrt{36 + 36} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}\,u$$

$$S = \frac{1}{2}\,d \cdot d' = \frac{1}{2}\,2\sqrt{2} \cdot 6\sqrt{2} = 12\ u^2$$



15. **Troba el punt en què es tallen les diagonals del quadrilàter que està format pels eixos de coordenades i les rectes $x + y - 4 = 0$ i $2x - y + 3 = 0$.**



$O\,(0, 0)$

$$\left.\begin{array}{l} r\!: x + y - 4 = 0 \\ y = 0 \end{array}\right\} x = 4, y = 0 \rightarrow A\,(4, 0)$$

$$\left.\begin{array}{r} x + y - 4 = 0 \\ s\!: 2x - y + 3 = 0 \end{array}\right\} x = \frac{1}{3}, y = \frac{11}{3} \rightarrow$$

$$\rightarrow B\left(\frac{1}{3}, \frac{11}{3}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} 2x - y + 3 = 0 \\ x = 0 \end{array}\right\} \; x = 0,\ y = 3 \;\rightarrow\; C\,(0, 3)$$

$$\overrightarrow{OB} = \left(\frac{1}{3}, \frac{11}{3}\right) \rightarrow \left.\begin{array}{l} \vec{u} = (1, 11) \\ O\,(0, 0) \end{array}\right\}$$

$$x = \frac{y}{11} \rightarrow 11x - y = 0$$

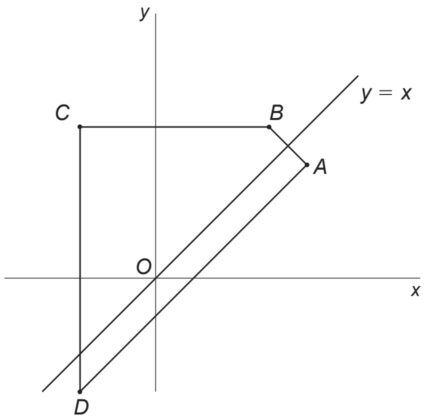
$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AC} = \vec{c} - \vec{a} = (-4, 3) \rightarrow \vec{v} = (-4, 3) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad A\,(4, 0) \end{array}\right\}$$

$$\frac{x-4}{-4} = \frac{y}{3} \rightarrow 3x + 4y - 12 = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} 11x - y = 0 \\ 3x + 4y - 12 = 0 \end{array}\right\} \; x = \frac{12}{47},\ y = \frac{132}{47} \rightarrow$$

$$\rightarrow D\left(\frac{12}{47}, \frac{132}{47}\right)$$

16. Calcula l'àrea del quadrilàter de vèrtexs els punts: *A* (3, 2); *B*, simètric del punt *A* respecte de la recta *x* = *y*; *C*, simètric del punt *B* respecte de l'eix d'ordenades, i *D*, simètric de *C* respecte de l'eix d'abscisses.



$$A\,(3, 2) \rightarrow B\,(2, 3) \rightarrow C\,(-2, 3) \rightarrow$$
$$\rightarrow D\,(-2, -3)$$

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AD} = \vec{d} - \vec{a} = (-5, -5) \\ \overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a} = (-1, 1) \end{array}\right\}$$

$$S_1 = \frac{1}{2}\,|\overrightarrow{AD}| \cdot |\overrightarrow{AB}| = \frac{1}{2}\sqrt{50}\sqrt{2} = 5\ u^2$$

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{CB} = \vec{b} - \vec{c} = (4, 0) \\ \overrightarrow{CD} = \vec{d} - \vec{c} = (0, -6) \end{array}\right\}$$

$$S_2 = \frac{1}{2}\,|\overrightarrow{CB}| \cdot |\overrightarrow{CD}| = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 = 12\ u^2$$

$$S = S_1 + S_2 = 5 + 12 = 17\ u^2$$

17. Els vèrtexs corresponents al costat desigual d'un triangle isòsceles se situen en els punts *A* (−1, −1) i *B* (4, 0). El tercer vèrtex *C* és un punt de la recta *x* − 2*y* + 8 = = 0. Troba les coordenades de *C* i calcula el perímetre i l'àrea del triangle.

$$\left.\begin{array}{l} A\,(-1, -1) \\ B\,(4, 0) \end{array}\right\} \; \overrightarrow{AB} = (5, 1)$$

M, punt mitjà del segment AB, $\rightarrow$

$$\rightarrow M\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

$$\vec{n} = (5, 1) \rightarrow 5x + y + C = 0$$

$$M\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right) \rightarrow \frac{15}{2} - \frac{1}{2} + C = 0 \rightarrow$$
$$\rightarrow C = -7$$

$$\left.\begin{array}{r} 5x + y - 7 = 0 \\ r\!: x - 2y + 8 = 0 \end{array}\right\}$$

$$x = \frac{6}{11},\ y = \frac{47}{11} \rightarrow C\left(\frac{6}{11}, \frac{47}{11}\right)$$

$$\overrightarrow{AC} = \vec{c} - \vec{a} = \left(\frac{17}{11}, \frac{58}{11}\right)$$

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{\left(\frac{17}{11}\right)^2 + \left(\frac{58}{11}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{289 + 3\,364}{11^2}} = \frac{\sqrt{3\,653}}{11}\ u$$

$$b\,|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{25 + 1} = \sqrt{26}\ u$$

$$p = |\overrightarrow{AB}| + 2\,|\overrightarrow{AC}| =$$

$$= \left(\sqrt{26} + \frac{2\sqrt{3\,653}}{11}\right) u$$

$$\overrightarrow{MC} = \vec{c} - \vec{m} = \left(-\frac{21}{22}, \frac{105}{22}\right)$$

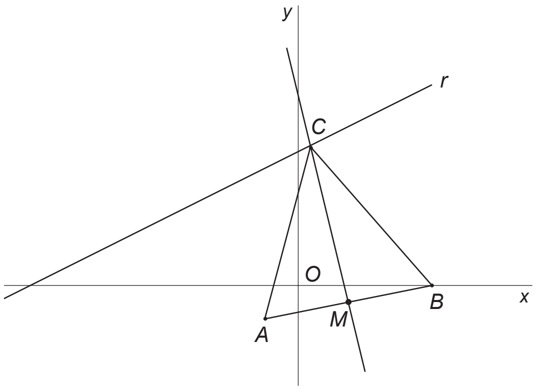
$$h = |\overrightarrow{MC}| = \sqrt{\left(-\frac{21}{22}\right)^2 + \left(\frac{105}{22}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{441 + 11\,025}{22^2}} = \frac{\sqrt{11\,466}}{11} =$$

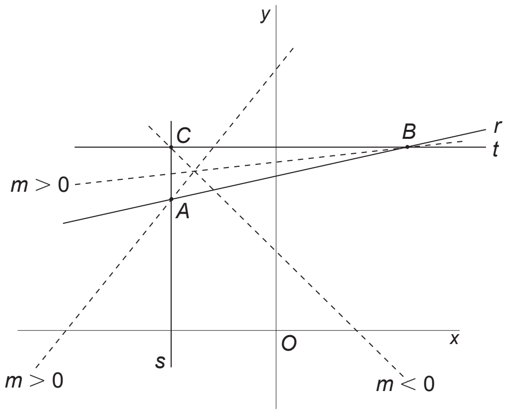
$$= \frac{21\sqrt{26}}{22}\ u$$

$$S = \frac{1}{2}\,b\,h =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{26} \cdot \frac{21\sqrt{26}}{22} = \frac{273}{22}\ u^2$$



18. **Determina les bisectrius interiors dels angles del triangle de vèrtexs *A* (−4, 5), *B* (5, 7) i *C* (−4, 7).**



$$\left.\begin{array}{l} A(-4, 5) \\ B(5, 7) \end{array}\right\} \overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a} = (9, 2) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{r} \vec{u} = (9, 2) \\ A(-4, 5) \end{array}\right\} \frac{x+4}{9} = \frac{y-5}{2}$$

$$2x + 8 = 9y - 45 \rightarrow r\colon 2x - 9y + 53 = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} A(-4, 5) \\ C(-4, 7) \end{array}\right\} \overrightarrow{AC} = \vec{c} - \vec{a} = (0, 2) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{r} \vec{v} = (0, 1) \\ A(-4, 5) \end{array}\right\} s\colon x + 4 = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} B(5, 7) \\ C(-4, 7) \end{array}\right\} \overrightarrow{BC} = \vec{c} - \vec{b} = (-9, 0) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{r} \vec{w} = (1, 0) \\ B(5, 7) \end{array}\right\} t\colon y - 7 = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} r\colon 2x - 9y + 53 = 0 \\ s\colon x + 4 = 0 \end{array}\right\}$$

$$\frac{2x - 9y + 53}{\sqrt{85}} = \pm (x + 4)$$

$$2x - 9y + 53 = \sqrt{85}\,(x + 4)$$

$$2x - 9y + 53 = \sqrt{85}\,x + 4\sqrt{85}$$

$$(\sqrt{85} - 2)x + 9y + 4\sqrt{85} - 53 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow m < 0 \rightarrow \text{No}$$

$$2x - 9y + 53 = -\sqrt{85}\,(x + 4)$$

$$2x - 9y + 53 = -\sqrt{85}\,x - 4\sqrt{85}$$

$$(\sqrt{85} + 2)x - 9y + 4\sqrt{85} + 53 = 0$$

$$m > 0$$

$$\left.\begin{array}{l} r\colon 2x - 9y + 53 = 0 \\ t\colon y - 7 = 0 \end{array}\right\}$$

$$\frac{2x - 9y + 53}{\sqrt{85}} = \pm (y - 7)$$

$$2x - 9y + 53 = \sqrt{85}\,(y - 7)$$

$$2x - 9y + 53 = \sqrt{85}\,y - 7\sqrt{85}$$

$$2x - (9 + \sqrt{85})y + 53 + 7\sqrt{85} = 0 \quad m > 0$$

$$\left.\begin{array}{l} s\colon x + 4 = 0 \\ t\colon y - 7 = 0 \end{array}\right\} x + 4 = \pm (y - 7)$$

$$x + 4 = y - 7 \rightarrow x - y + 11 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow m > 0 \quad \text{no}$$

$$x + 4 = -y + 7 \rightarrow$$

$$\rightarrow x + y - 3 = 0 \quad m < 0$$

19. **Dos dels vèrtexs d'un triangle rectangle són els punts *B* (5, 2) i *C* (1, 5). Calcula l'ordenada de l'altre vèrtex *A* sabent que la seva abscissa és $x = 3$ i que $\widehat{A} = 90°$.**

$$\left.\begin{array}{l} A(3, y) \\ B(5, 2) \end{array}\right\} \overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a} = (2, 2 - y)$$

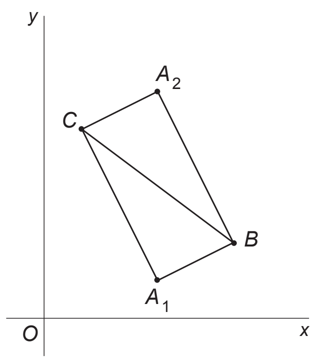
$$\left.\begin{array}{l} A(3, y) \\ C(1, 5) \end{array}\right\} \overrightarrow{AC} = \vec{c} - \vec{a} = (-2, 5 - y)$$

$$\widehat{A} = 90° \rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \rightarrow$$

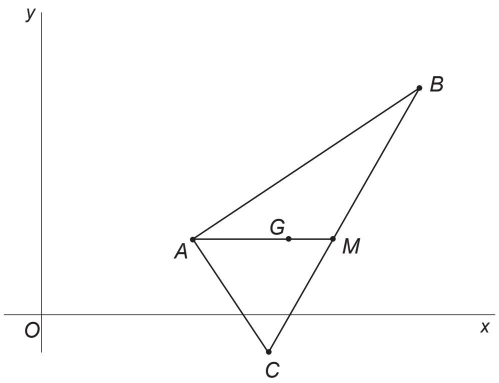
$$\rightarrow -4 + 10 - 7y + y^2 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow y^2 - 7y + 6 = 0 \rightarrow y_1 = 1,\ y_2 = 6$$

$$A_1\,(3, 1),\ A_2\,(3, 6)$$



20. Determina les coordenades de l'ortocentre, el baricentre i el circumcentre del triangle que té per vèrtexs els punts *A* (4, 2), *B* (10, 6) i *C* (6, −1).



$$\left.\begin{array}{l} A\,(4,2) \\ B\,(10,6) \end{array}\right\}\ \overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a} = (6, 4)$$

$$\left.\begin{array}{l} A\,(4,2) \\ C\,(6,-1) \end{array}\right\}\ \overrightarrow{AC} = \vec{c} - \vec{a} = (2, -3)$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 12 - 12 = 0 \to \widehat{A} = 90°$$

Ortocentre: el vèrtex A (4, 2)

$$\text{Baricentre: } \left(\frac{4+10+6}{3}, \frac{2+6-1}{3}\right) \to$$

$$\to G\left(\frac{20}{3}, \frac{7}{3}\right)$$

Circumcentre: punt mitjà del segment BC →

$$\to M\left(8, \frac{5}{2}\right)$$

21. Les equacions de les rectes que contenen dos dels costats d'un paral·lelogram de centre el punt *C* (2, 2) són *y* = 2*x* i *x* = 2*y*. Troba'n les coordenades dels quatre vèrtexs.

$$\left.\begin{array}{l} r\text{: } y = 2x \\ s\text{: } x = 2y \end{array}\right\}\ x = 0,\ y = 0 \to$$

$$\to \left.\begin{array}{l} O\,(0,0) \\ C\,(2,2) \\ Q\,(x,y) \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} \dfrac{x}{2} = 2 \to x = 4 \\ \\ \dfrac{y}{2} = 2 \to y = 4 \end{array}\right\}\ Q\,(4,4)$$

$y = 2x \to 2x - y = 0$

Paral·lela: $2x - y + C = 0$

$$Q\,(4,4) \to 8 - 4 + C = 0 \to C = -4$$
$$2x - y - 4 = 0$$

$x = 2y \to x - 2y = 0$

Paral·lela: $x - 2y + C = 0$

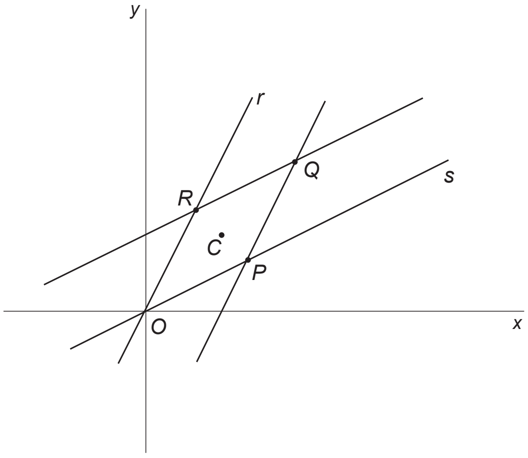
$$Q\,(4,4) \to 4 - 8 + C = 0 \to C = -4$$
$$x - 2y - 4 = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} 2x - y = 0 \\ x - 2y - 4 = 0 \end{array}\right\}\ x = \frac{4}{3},\ y = \frac{8}{3} \to$$

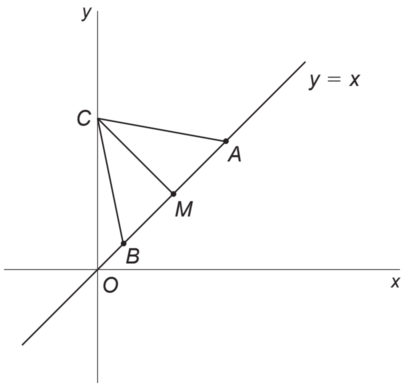
$$\to R\left(\frac{4}{3}, \frac{8}{3}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} x - 2y = 0 \\ 2x - y - 4 = 0 \end{array}\right\}\ x = \frac{8}{3},\ y = \frac{4}{3} \to$$

$$\to P\left(\frac{8}{3}, \frac{4}{3}\right)$$



22. El costat desigual d'un triangle isòsceles mesura 4 i es troba sobre la recta d'equació *y* = *x*. El vèrtex oposat és el punt *C* (0, 4). Determina les coordenades dels vèrtexs *A* i *B* del triangle.



$y = x \to x - y = 0$

Perpendicular: $x + y + C = 0$

$$C\,(0,4) \to 4 + C = 0 \to C = -4$$

$$\left.\begin{array}{l} x + y - 4 = 0 \\ x - y = 0 \end{array}\right\}\ x = 2,\ y = 2 \to M\,(2,2)$$

$$\left.\begin{array}{l} A\,(x, x) \\ M\,(2, 2) \end{array}\right\} \overrightarrow{AM} = \vec{m} - \vec{a} = (2 - x, 2 - x)$$

$$|\overrightarrow{AM}| = 2$$

$$\sqrt{(2 - x)^2 + (2 - x)^2} = 2$$

$$2\,(4 - 4x + x^2) = 4$$

$$4 - 4x + x^2 = 2$$

$$x^2 - 4x + 2 = 0 \rightarrow x = 2 \pm \sqrt{2}$$

$$A\,(2 + \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2}), B\,(2 - \sqrt{2}, 2 - \sqrt{2})$$

23. El catet *AB* d'un triangle rectangle en *A* es troba sobre la recta $2x + 5y - 4 = 0$ i el punt *C* (4, 2) és un vèrtex del triangle. Calcula les coordenades del vèrtex *A* i la longitud del catet *AC*.

r: $2x + 5y - 4 = 0$

Perpendicular s: $5x - 2y + C = 0$

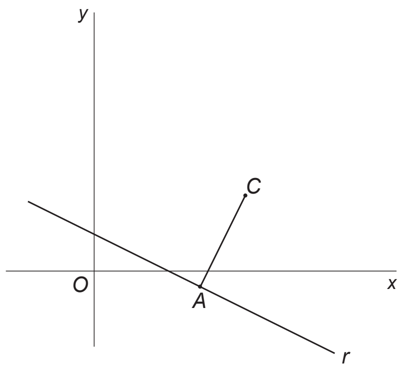
$$C\,(4, 2) \rightarrow 20 - 4 + C = 0 \rightarrow C = -16$$

$$\left.\begin{array}{l} 5x - 2y - 16 = 0 \\ 2x + 5y - 4 = 0 \end{array}\right\}$$

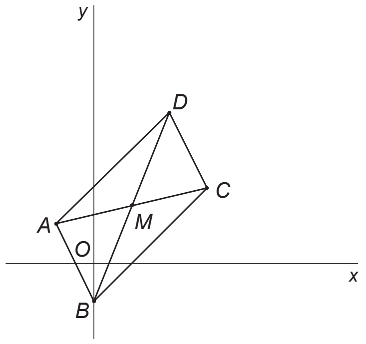
$$x = \frac{88}{29}, y = -\frac{12}{29} \rightarrow A\left(\frac{88}{29}, -\frac{12}{89}\right)$$

$$\overrightarrow{AC} = d\,(C, r) = \frac{|8 + 10 - 4|}{\sqrt{29}} = \frac{14}{\sqrt{29}} =$$

$$= \frac{14\sqrt{29}}{29}\,u$$



24. Els punts *A* (−1, 1), *B* (0, −1) i *C* (3, 2) són tres vèrtexs consecutius d'un paral·lelogram. Determina'n el vèrtex *D* i calcula'n el perímetre i l'àrea.



M, punt mitjà del segment *AC*, $\rightarrow M\left(1, \frac{3}{2}\right)$

$$\left.\begin{array}{l} B\,(0, -1) \\ M\left(1, \frac{3}{2}\right) \\ D\,(x, y) \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} \frac{x}{2} = 2 \rightarrow x = 2 \\ \frac{-1 + y}{2} = \frac{3}{2} \rightarrow y = 4 \end{array}\right\}$$

$$D\,(2, 4)$$

$$\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a} = (1, -2) \rightarrow$$

$$\rightarrow |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}\,u$$

$$\overrightarrow{AD} = \vec{d} - \vec{a} = (3, 3) \rightarrow$$

$$\rightarrow |\overrightarrow{AD}| = \sqrt{9 + 9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}\,u$$

$$p = 2\,|\overrightarrow{AB}| + 2\,|\overrightarrow{AD}| = (2\sqrt{5} + 6\sqrt{2})\,u$$

$$b = |\overrightarrow{AD}| = 3\sqrt{2}\,u$$

$$\overrightarrow{AD} = (3, 3) \rightarrow \left.\begin{array}{r} \vec{u} = (1, 1) \\ A\,(-1, 1) \end{array}\right\}$$

$$x + 1 = y - 1 \rightarrow r\text{: } x - y + 2 = 0$$

$$h = d\,(C, r) = \frac{|3 - 2 + 2|}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}\,u$$

$$S = bh = 3\sqrt{2} \cdot \frac{3}{\sqrt{2}} = 9\,u^2$$