Comencem

- **Utilitza les potències de base 10 per descompondre aquests nombres: 1 567; 34,054; 2,3; 3 005 i tres milions i mig.**

$$1\,567 = 1 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10 + 7$$

$$34{,}054 = 3 \cdot 10 + 4 + 5 \cdot 10^{-2} + 4 \cdot 10^{-3}$$

$$2{,}3 = 2 + 3 \cdot 10^{-1}$$

$$3\,005 = 3 \cdot 10^3 + 5$$

$$3 \text{ milions i mig} = 3 \cdot 10^6 + 5 \cdot 10^5$$

- **Troba el valor numèric de l'expressió $3x^3 + 4x^2 - 6x + \frac{3}{2}$, per a $x = 3$ i per a $x = \frac{3}{2}$.**

$$3 \cdot 3^3 + 4 \cdot 3^2 - 6 \cdot 3 + \frac{3}{2} = \frac{201}{2}$$

$$3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^3 + 4 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 6 \cdot \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = \frac{98}{8}$$

Exercicis

1. Indica el grau i els coeficients de cadascun d'aquests polinomis:

a) $A(x) = x^3 + 3x^2 - 2$

Grau 3; coeficients: 1, 3, 0 i -2.

b) $B(x) = -x^4 + \sqrt{2}\,x^2 - \frac{1}{3}x$

Grau 4; coeficients: -1, 0, $\sqrt{2}$, $-\frac{1}{3}$ i 0.

c) $C(x) = 3x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{8}{5}$

Grau 2; coeficients: 3, $-\frac{5}{4}$ i $\frac{8}{5}$.

d) $D(x) = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$

Grau 4; coeficients: 1, -1, 1, -1 i 1.

2. Escriu un polinomi que sigui:

Respostes obertes. Per exemple:

a) **De tercer grau i amb dos termes.**

$$2x^3 - 7$$

b) **De quart grau i amb cinc termes.**

$$x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 7x + 1$$

c) **De segon grau i amb un terme.**

$$-5x^2$$

d) **Hi ha algun polinomi de tercer grau amb cinc termes? Per què?**

No hi ha cap polinomi de 3r grau amb 5 termes. Com a màxim en pot tenir 4.

3. Indica quines de les expressions algèbriques següents no són polinomis. Justifica'n les respostes.

a) $\frac{5}{x^2} + 1$ *b)* $\frac{x^2 + 1}{5}$

c) $x^3 + x^{-2} + x + 1$ *d)* $\sqrt{\frac{\sqrt{x^4}}{9}}$

e) $\frac{x^2 + x + 2}{x}$ *f)* $\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{x}$

Les expressions *a) e)* i *f)* no són polinomis, ja que la indeterminada x apareix elevada a -2 i a -1, respectivament. En l'expressió *d)* s'obté $\frac{x}{3}$, que sí és un polinomi.

4. Calcula, per a $x = -1$, el valor numèric del polinomi:

$$A(x) = -x^3 - x^2 + x - 1$$

El valor numéric s'obté en substituir x per -1:

$$A(-1) = -(-1)^3 - 1(-1)^2 + (-1) - 1 = -2$$

$$A(-1) = 2$$

5. Determina els coeficients a, b i c perquè els polinomis següents siguin idèntics:

$B(x) = x^4 + x^2 + 1$ i

$C(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 1$

Identificar dos polinomis de quart grau és igualar els coeficients del mateix grau:

$$a = 0 \qquad b = 1 \qquad c = 0$$

6. **Donats els polinomis:**

$$\boldsymbol{A(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - \frac{3}{4}}$$

$$\boldsymbol{B(x) = -x^3 + \frac{7}{2}x + 3}$$

$$\boldsymbol{C(x) = 2x^2 - 4x}$$

Calcula**:**

a) $\boldsymbol{A(x) + B(x)}$

$$A(x) + B(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - \frac{3}{4} +$$

$$+\left(-x^3 + \frac{7}{2}x + 3\right) = -3x^2 + \frac{17}{2}x + \frac{9}{4}$$

b) $\boldsymbol{A(x) - B(x)}$

$$A(x) - B(x) =$$

$$= x^3 - 3x^2 + 5x - \frac{3}{4} + x^3 - \frac{7}{2}x - 3 =$$

$$= 2x^3 - 3x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{15}{4}$$

c) $\boldsymbol{C(x) + B(x) + A(x)}$

$$C(x) + B(x) + A(x) = -x^2 + \frac{9}{2}x + \frac{9}{4}$$

$$\begin{array}{rrrrr}
C(x) = & & 2x^2 & -\ 4x & \\
B(x) = & -x^3 & & +\ \frac{7}{2}x & +\ 3 \\
A(x) = & x^3 & -\ 3x^2 & +\ 5x & -\ \frac{3}{4} \\
\hline
C(x) + B(x) + A(x) = & & -\ x^2 & +\ \frac{9}{2}x & +\ \frac{9}{4}
\end{array}$$

d) $\boldsymbol{B(x) - [A(x) - C(x)]}$

$$B(x) - [A(x) - C(x)] =$$

$$= -2x^3 + 5x^2 + \frac{11}{2}x + \frac{15}{4}$$

$$\begin{array}{rrrrr}
B(x) = & -x^3 & & +\ \frac{7}{2}x & +\ 3 \\
-A(x) = & -x^3 & +\ 3x^2 & -\ 5x & +\ \frac{3}{4} \\
C(x) = & & 2x^2 & -\ 4x & \\
\hline
B(x) - A(x) + C(x) = & -2x^3 & +\ 5x^2 & -\ \frac{11}{2}x & +\ \frac{15}{4}
\end{array}$$

e) $\boldsymbol{-x^2\,[B(x) - C(x)]}$

$$-x^2\,[B(x) - C(x)] =$$

$$= -x^2\left[-x^3 + \frac{7}{2}x + 3 - 2x^2 + 4x\right] =$$

$$= -x^2\left[-x^3 - 2x^2 + \frac{15}{2}x + 3\right] =$$

$$= x^5 + 2x^4 - \frac{15}{2}x^3 - 3x^2$$

f) $\boldsymbol{3A(x) - 5B(x) + \frac{1}{2}C(x)}$

$$3A(x) - 5B(x) + \frac{1}{2}C(x) =$$

$$= 8x^3 - 8x^2 - \frac{9}{2}x - \frac{69}{4}$$

$$\begin{array}{rrrrr}
3A(x) = & 3x^3 & -\ 9x^2 & +\ 15x & -\ \frac{9}{4} \\
-5B(x) = & 5x^3 & & -\ \frac{35}{2}x & -\ 15 \\
\frac{1}{2}C(x) = & & x^2 & -\ 2x & \\
\hline
3A(x) - 5B(x) + \frac{1}{2}C(x) = & 8x^3 & -\ 8x^2 & -\ \frac{9}{2}x & -\ \frac{69}{4}
\end{array}$$

g) $\boldsymbol{B(x)\,C(x)}$

$$B(x)\,C(x) =$$

$$= -2x^5 + 4x^4 + 7x^3 - 8x^2 - 12x$$

$$\begin{array}{rrrrrr}
B(x) = & & -x^3 & +\ \frac{7}{2}x & +\ 3 & \\
C(x) = & & \times & 2x^2 & -\ 4x & \\
\hline
& & +\ 4x^4 & & -\ 14x^2 & -\ 12x \\
& -2x^5 & & +\ 7x^3 & +\ 6x^2 & \\
\hline
B(x)\,C(x) = & -2x^5 & +\ 4x^4 & +\ 7x^3 & -\ 8x^2 & -\ 12x
\end{array}$$

h) $\boldsymbol{[C(x)]^3}$

$$[C(x)]^3 = (2x^2 - 4x)^3 =$$

$$= (2x^2 - 4x)^2\,(2x^2 - 4x) =$$

$$= 8x^6 - 48x^5 + 96x^4 - 64x^3$$

$$\begin{array}{rrrrr}
[C(x)]^2 = & & 4x^4 & -\ 16x^3 & +\ 16x^2 \\
C(x) = & & \times & 2x^2 & -\ 4x \\
\hline
& & -\ 16x^5 & +\ 64x^4 & -\ 64x^3 \\
& 8x^6 & -\ 32x^5 & +\ 32x^4 & \\
\hline
[C(x)]^3 = & 8x^6 & -\ 48x^5 & +\ 96x^4 & -\ 64x^3
\end{array}$$

***Contesta les qüestions següents i justifica les respostes*:**

a) **Per què el grau del polinomi $A(x) + B(x)$ no és 3?**

El grau del polinomi $A(x) + B(x)$ no és 3 perquè els coeficients de 3r grau són oposats.

b) **Quin és el grau del polinomi $-x^2\,[B(x) - C(x)]$?**

El grau del polinomi $-x^2\,[B(x) - C(x)]$ és 5.

c) **Per què el grau del polinomi $[C(x)]^3$ és 6?**

El grau del polinomi $[C(x)]^3$ és 6, ja que $(2x^2)^3 = 8x^6$.

d) **És cert que: $B(x) - [A(x) - C(x)] = B(x) - A(x) + C(x)$?**

$$B(x) - [A(x) - C(x)] = $$
$$= B(x) - A(x) + C(x)$$

És certa la igualtat.

7. Si $A(x) = 3x^3 - 2x^2 + 7$ i $B(x) = x^4 - 5x^3 + 2x$, determina:

a) **El polinomi $C(x)$ que verifica $A(x) + C(x) = B(x)$.**

$$C(x) = B(x) - A(x) =$$
$$= x^4 - 8x^3 + 2x^2 + 2x - 7$$

$$\begin{array}{rrrrr}
x^4 & -\,5x^3 & & +\,2x & \\
& -\,3x^3 & +\,2x^2 & & -\,7 \\
\hline
x^4 & -\,8x^3 & +\,2x^2 & +\,2x & -\,7
\end{array}$$

b) **El polinomi $D(x)$ que verifica $B(x) + D(x) = A(x)$.**

$$D(x) = A(x) - B(x) =$$
$$= -x^4 + 8x^3 - 2x^2 - 2x + 7$$

Aquest polinomi és oposat a l'anterior.

c) **La relació que hi ha entre els polinomis $C(x)$ i $D(x)$.**

La relació: $D(x) = -C(x)$

8. Realitza la divisió $(3x^4 - x^3 + 1) : (x^2 + 1)$. Comprova que es verifica la propietat fonamental.

$$\begin{array}{rrrrr|l}
3x^4 & -\,x^3 & & & +\,1 & x^2 + 1 \\
\cline{6-6}
-3x^4 & & -\,3x^2 & & & 3x^2 - x - 3 \\
\cline{1-3}
& -\,x^3 & -\,3x^2 & & & \\
& +\,x^3 & & +\,x & & \\
\cline{2-5}
& & -\,3x^2 & +\,x & +\,1 & \\
& & +\,3x^2 & & +\,3 & \\
\cline{3-5}
& & & x & +\,4 &
\end{array}$$

Quocient: $3x^2 - x - 3$

Residu: $x + 4$

Comprovació:

$$(3x^2 - x - 3)(x^2 + 1) + (x + 4) =$$
$$= 3x^4 - x^3 + 1$$

9. Efectua aquestes divisions. Aplica la regla de Ruffini quan sigui possible.

a) **$(6x^5 - 3x^4 - 2x + 1) : (-3x^3 + 2x + 4)$**

$$\begin{array}{rrrrrr|l}
6x^5 & -\,3x^4 & & & +\,2x & +\,1 & -3x^2 + 2x + 4 \\
\cline{7-7}
-6x^5 & & +\,4x^3 & +\,8x^2 & & & -2x^2 + x - \frac{4}{3} \\
\cline{1-4}
& -\,3x^4 & +\,4x^3 & +\,8x^2 & +\,2x & & \\
& +\,3x^4 & & -\,2x^2 & -\,4x & & \\
\cline{2-6}
& & 4x^3 & +\,6x^2 & -\,2x & +\,1 & \\
& & -\,4x^3 & & +\,\frac{8}{3}x & +\,\frac{16}{3} & \\
\cline{3-6}
& & & 6x^2 & +\,\frac{2}{3}x & +\,\frac{19}{3} &
\end{array}$$

Quocient: $-2x^2 + x - \dfrac{4}{3}$

Residu: $6x^2 + \dfrac{2}{3}x + \dfrac{19}{3}$

b) **$x^6 : (x^4 + x^2 - 2)$**

$$\begin{array}{rrrr|l}
x^6 & & & & x^4 + x^2 - 2 \\
\cline{5-5}
-x^6 & -\,x^4 & +\,2x^2 & & x^2 - 1 \\
\cline{1-3}
& -\,x^4 & +\,2x^2 & & \\
& +\,x^4 & +\,x^2 & -\,2 & \\
\cline{2-4}
& & 3x^2 & -\,2 &
\end{array}$$

Quocient: $x^2 - 1$

Residu: $3x^2 - 2$

c) **$(2x^3 - x^2 + 3x) : (x - 1)$**

Per Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr}
& 2 & -1 & 3 & 0 \\
1 & & 2 & 1 & 4 \\
\hline
1 & 2 & 1 & 4 & \boxed{4}
\end{array}$$

Quocient: $2x^2 + x + 4$
Residu: 4

d) $(x^4 - 1) : (x + 1)$

Per Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & & -1 & 1 & -1 & 1 \\ \hline & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{array}$$

Quocient: $x^3 - x^2 + x - 1$
Residu: 0

e) $x^3 : (x + 2)$

Per Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & & -2 & 4 & -8 \\ \hline & 1 & -2 & 4 & -8 \end{array}$$

Quocient: $x^2 - 2x + 4$
Residu: -8

f) $(x^6 - 1) : (x^2 + 1)$

$$\begin{array}{rrrr|l} x^6 & & & -1 & x^2+1 \\ \cline{5-5} -x^6 & -x^4 & & & x^4 - x^2 + 1 \\ \cline{1-2} & -x^4 & & & \\ & +x^4 & +x^2 & & \\ \cline{2-4} & & x^2 & +1 & \\ & & -x^2 & -1 & \\ \cline{3-4} & & & 0 & \end{array}$$

Quocient: $x^4 - x^2 + 1$
Residu: 0

g) $\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}\right) : \left(x - \frac{1}{2}\right)$

Per Ruffini:

$$\begin{array}{c|ccc} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & & \frac{1}{4} & \frac{1}{24} \\ \hline & \frac{1}{2} & -\frac{1}{12} & \frac{7}{24} \end{array}$$

Quocient: $\frac{1}{2}x - \frac{1}{12}$

Residu: $\frac{7}{24}$

10. **En una divisió, el divisor és el polinomi $x^3 - 2x^2 + 3$, el quocient és $x^2 + 2x + 1$ i el residu és $-8x - 2$. Quin és el grau del dividend? Pots calcular-lo? Fes-ho.**

Dividend:

$$(x^3 - 2x^2 + 3)(x^2 + 2x + 1) + (-8x - 2) =$$
$$= x^5 - 3x^3 + x^2 - 2x + 1$$

El dividend és de grau 5.

$$\begin{array}{rrrrrr} & & x^3 & -2x^2 & & +3 \\ \times & & & x^2 & +2x & +1 \\ \hline & & x^3 & -2x^2 & & +3 \\ & 2x^4 & -4x^3 & & +6x & \\ x^5 & -2x^4 & & +3x^2 & & \\ \hline x^5 & & -3x^3 & +x^2 & +6x & +3 \\ & & & & -8x & -2 \\ \hline x^5 & & -3x^3 & +x^2 & -2x & +1 \end{array}$$

11. **Determina els valors de a i b, de manera que quan dividim $3x^4 - 12x^2 + ax + b$ per $x^3 - 2x^2 + 3$ el residu sigui $\frac{1}{2}$.**

$$\begin{array}{rrrrr|l} 3x^4 & & -12x^2 & +ax & +b & x^3 - 2x^2 + 3 \\ \cline{6-6} -3x^4 & +6x^3 & & -9x & & 3x + 6 \\ \cline{1-4} & 6x^3 & -12x^2 & -(a-9)x & +b & \\ & -6x^3 & +12x^2 & & -18 & \\ \cline{2-5} \end{array}$$

$$(a - 9)x + b - 18 = \frac{1}{2} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} a - 9 = 0 \rightarrow a = 9 \\ b - 18 = \dfrac{1}{2} \rightarrow b = \dfrac{37}{2} \end{cases}$$

12. **En una divisió exacta, el dividend és $x^5 - 1$ i el quocient, $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$. Calcula'n el divisor.**

$$\begin{array}{rrrrrr|l} x^5 & & & & & -1 & x^4 + x^3 + x^2 - x - 1 \\ \cline{7-7} -x^5 & -x^4 & -x^3 & -x^2 & -x & & x - 1 \\ \cline{1-6} & -x^4 & -x^3 & -x^2 & -x & -1 & \\ & +x^4 & +x^3 & +x^2 & +x & +1 & \\ \cline{1-6} \end{array}$$

Divisor: $x - 1$

13. **Determina el valor de k per tal que la divisió $(2x^3 - x^2 + k) : (x + 2)$ sigui exacta.**

$$\begin{array}{rrrr|l} 2x^3 & -x^2 & & +k & x + 2 \\ \cline{5-5} -2x^3 & -4x^2 & & & 2x^2 - 5x + 10 \\ \cline{1-4} & -5x^2 & & +k & \\ & -5x^2 & +10x & & \\ \cline{2-4} & & 10x & +k & \\ & & -10x & -20 & \\ \cline{3-4} \end{array}$$

$$k - 20 = 0 \rightarrow k = 20$$

14. Tria el mètode que consideris més convenient per trobar el valor numèric d'aquests polinomis per al valor que s'indica:

a) $-\frac{3}{2}x^4 - 5x^3 + 4x - 2$ **per a** $x = 12$

Pel teorema del residu:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & -\frac{3}{2} & -5 & 0 & 4 & -2 \\ 12 & & -18 & -276 & -3312 & -39696 \\ \hline & -\frac{3}{2} & -23 & -276 & -3308 & -39698 \end{array}$$

Valor numèric: $-39\,698$

b) $-x^6 + x^4 - \sqrt{2}x^3 - x^2$ **per a** $x = \sqrt{2}$

Substituint:

$$-(\sqrt{2})^6 + (\sqrt{2})^4 - \sqrt{2}(\sqrt{2})^3 - (\sqrt{2})^2 = -8 + 4 - 4 - 2 = 6$$

Valor numèric: 6

c) $\frac{2}{5}x^3 + \frac{1}{5}x^2 + \frac{3}{5}x + 1$ **per a** $x = -5$

Substituint:

$$\frac{2}{5}(-5)^3 + \frac{1}{5}(-5)^2 + \frac{3}{5}(-5) + 1 = -50 + 5 - 3 + 1 = -47$$

Valor numèric: -47

15. Calcula el residu de la divisió $(2x^3 - 3) : (x - 2)$. Fes-ho mitjançant els dos procediments que hem analitzat. Explica quin és el més ràpid.

Fent la divisió:

$$\begin{array}{rrr|l} 2x^3 & & -3 & x-2 \\ \cline{4-4} -2x^3 & +4x^2 & & 2x^2+4x+8 \\ \cline{1-3} & 4x^2 & -3 & \\ & -4x^2 & +8x & \\ \cline{2-3} & & 8x - 3 & \\ & & -8x + 16 & \\ \cline{3-3} & & 13 & \end{array}$$

$R = 13$

Pel teorema del residu: $2 \cdot 2^3 - 3 = 13$

16. Determina el valor de k per tal que la divisió $(x^3 - 3x^2 + 5x + k) : (x + 3)$ sigui exacta.

Valor numèric 0 per a $x = -3$:

$$(-3)^3 - 3(-3)^2 + 5(-3) + k = 0 \rightarrow k = 69$$

17. Troba el residu de la divisió $(x^9 + 1) : (x + 1)$. Pots obtenir-lo sense necessitat de fer la divisió.

$$R = (-1)^9 + 1 = 0$$

18. Comprova que $P(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + 8$ és divisible per $x + 2$. Expressa el polinomi $P(x)$ com a producte de dos polinomis.

Si $P(-2) = 0$, $P(x)$ és divisible per $x + 2$.

$P(-2) = (-2)^3 - 3(-2)^2 - 6(-2) + 8 = 0$

Dividim $P(x)$ per $x + 2$ per trobar l'altre factor:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -3 & -6 & 8 \\ -2 & & -2 & 10 & -8 \\ \hline & 1 & -5 & 4 & 0 \end{array}$$

$P(x) = (x^2 - 5x + 4)(x + 2)$

19. Troba el valor de k perquè el polinomi $x^4 + k$ sigui divisible per $x + 1$.

Substituir per $x = -1$

$$(-1)^4 + k = 0 \rightarrow k = -1$$

20. Un polinomi $P(x)$ només té els divisors 3, $x^2 - 1$ i $\frac{1}{3}x + \frac{2}{9}$. Troba $P(x)$.

$$P(x) = 3(x^2 - 1)\left(\frac{1}{3}x + \frac{2}{9}\right) = x^3 + \frac{2}{3}x^2 - x - \frac{2}{3}$$

21. Calcula k perquè el polinomi $x^3 - 3x^2 + k$ sigui múltiple de $x + 1$.

Cal que $(-1)^3 - 3(-1)^2 + k = 0 \rightarrow k = 4$

22. Indica si són certes o falses aquestes afirmacions:

a) **$x^4 - 1$ és divisible per $x + 1$.**

Certa, ja que $(-1)^4 - 1 = 0$

b) **$x^5 - 1$ és múltiple de $x - 1$.**

Certa, $1^5 - 1 = 0$

c) **$x + 2$ és divisor de $x^3 + 8$.**

Certa, $(-2)^3 + 8 = 0$

d) **$x^7 + 1$ és múltiple de $x + 1$.**

Certa, $(-1)^7 + 1 = 0$

e) **$x + 3$ és divisor de $x^3 - 27$.**

Falsa, $(-3)^3 - 27 = -54$

23. **Determina, si és possible, les arrels enteres d'aquests polinomis:**

Les arrels enteres, si n'hi ha, cal que siguin divisors del terme independent.

$A(x) = x^3 - 5x^2 + 6x$

$$A(x) = x(x^2 - 5x + 6) \begin{cases} x_1 = 0 \\ x^2 - 5x + 6 = 0 \rightarrow \end{cases}$$

$$\rightarrow x_2 = 3,\ x_3 = 2$$

$B(x) = 6x^3 + 7x^2 - 9x + 2$

$B(-2) = 0 \rightarrow x = -2$ és l'única arrel entera.

$C(x) = 2x^3 + 2$

$$C(x) = 0 \rightarrow 2x^3 + 2 = 0 \rightarrow$$
$$\rightarrow x^3 = -1 \rightarrow x = -1$$

$D(x) = x^3 + 7x^2 + 6x$

$$D(x) = x(x^2 + 7x + 6) = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x^2 + 7x + 6 = 0 \rightarrow x_2 = -1,\ x_3 = -6 \end{cases}$$

$E(x) = x^3 + 2x^2 + x + 2$

$$E(2) = 0 \rightarrow x = -2$$

$F(x) = x^4 + x^2 - 2$

$$F(1) = F(-1) = 0 \rightarrow x_1 = 1 \text{ i } x_2 = -1$$

24. **Esbrina si $x = 3$ és una arrel del polinomi $P(x) = x^3 - (2x^2 - 9)$.**

$x = 3$ és una arrel de $P(x)$, ja que:

$$P(3) = 3^3 - 2 \cdot 3^2 - 9 = 0$$

25. **Determina les arrels del polinomi:**

$A(x) = (x^2 - 9)(2x - 1)$

$$A(x) = 0 \begin{cases} x^2 - 9 = 0 \rightarrow x_1 = 3,\ x_2 = -3 \\ 2x - 1 = 0 \rightarrow x_3 = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

26. **Calcula les arrels del polinomi $P(x) = (x^2 - 4)(3x + 1)$.**

$$P(x) = 0 \begin{cases} x^2 - 4 = 0 \rightarrow x_1 = 2,\ x_2 = -2 \\ 3x + 1 = 0 \rightarrow x_3 = -\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

27. **El polinomi $B(x) = (x^2 + 4)(x - 1)$ només té una arrel real. Per què?**

$$B(x) = 0 \begin{cases} x^2 + 4 = 0 \rightarrow \text{(no té solució)} \\ x - 1 = 0 \rightarrow x = 1 \end{cases}$$

28. **Factoritza el polinomi $P(x) = x^3 - x^2 + 8x + 12$. Troba una arrel entera entre els divisors del terme independent. Determina totes les seves arrels.**

Té les arrels -3 i 2 (doble).

$$P(x) = (x + 3)(x - 2)^2$$

29. **Factoritza aquests polinomis:**

a) **$x^4 - 1$**

$$x^4 - 1 = (x^2 + 1)(x^2 - 1) =$$
$$= (x^2 + 1)(x + 1)(x - 1)$$

b) **$x^5 + x^4 - x - 1$**

$$x^5 + x^4 - x - 1 =$$
$$= (x - 1)(x + 1)^2(x^2 + 1)$$

	1	1	0	0	−1	−1
1		1	2	2	2	1
	1	2	2	2	1	0
−1			−1	−1	−1	−1
	1		1	1	1	0
−1			−1	0	−1	
	1		0	1	0	

Divisions successives

c) **$x^4 + 4x^3 + 4x^2$**

$$x^4 + 4x^3 + 4x^2 = x^2(x^2 + 4x + 4) =$$
$$= x^2(x + 2)^2$$

d) **$9x^2 + 30x + 25$**

$$9x^2 + 30x + 25 = (3x + 5)^2$$

e) **$\dfrac{x^2}{9} - 9$**

$$\frac{x^2}{9} - 9 = \left(\frac{x}{3} + 3\right)\left(\frac{x}{3} - 3\right)$$

f) $x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 11x - 6$

$$x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 11x - 6 = (x+2)(x-3)(x-1)^2$$

	1	−3	−3	11	−6
−2		−2	10	−14	6
	1	−5	7	−3	0
3		3	−6	3	
	1	−2	1	0	

30. Troba les arrels d'aquests polinomis mitjançant la seva factorització:

a) $x^3 + 3x^2 - 13x - 15$

$$x^3 + 3x^2 - 13x - 15 = (x+1)(x-3)(x+5)$$

Arrels: -1, 3 i -5

b) $2x^4 + 6x^3 - 8x$

$$2x^4 + 6x^3 - 8x = 2x(x-1)(x+2)^2$$

Arrels: 0, 1 i -2 (doble).

c) $3x^2 + 3x + \frac{3}{4}$

$$3x^2 + 3x + \frac{3}{4} = 3\left(x + \frac{1}{2}\right)^2$$

Arrel: $-\frac{1}{2}$ (doble)

d) $x^3 + 3x^2 - 4x$

$$x^3 + 3x^2 - 4x = x(x+4)(x-1)$$

Arrels: 0, -4 i 1

e) $x^4 + x^3 - 2x^2$

$$x^4 + x^3 - 2x^2 = x^2(x+2)(x-1)$$

Arrels: 0, -2 i 1

31. Les arrels d'un polinomi de segon grau són 2 i $-\frac{1}{3}$ i el coeficient de x^2 és 6. Quin és aquest polinomi?

$$P(x) = 6(x-2)\left(x + \frac{1}{3}\right) = 6x^2 - 10x - 4$$

32. Calcula el m.c.d i el m.c.m dels polinomis:

a) $P(x) = x^2 - 9$ i $R(x) = x^2 - 6x + 9$

$P(x) = x^2 - 9 = (x+3)(x-3)$

$R(x) = x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$

m.c.d.: $x - 3$; m.c.m.: $(x+3)(x-3)^2$

b) $P(x) = x^2 - 1$ i $R(x) = 3x^2 - 6x + 3$

$P(x) = x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$

$R(x) = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x-1)^2$

m.c.d.: $x - 1$; m.c.m.: $3(x+1)(x-1)^2$

c) $A(x) = 3x^4 - 3$ i $B(x) = 3x^2 - 3$

$A(x) = 3x^4 - 3 = 3(x^2+1)(x+1)(x-1)$

$B(x) = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$

m.c.d.: $3(x-1)(x+1) = B(x)$

m.c.m.: $3(x^2+1)(x+1)(x-1) = A(x)$

d) $A(x) = x^2 - 2x - 3$, $B(x) = x^3 + 2x^2 + x$ i $C(x) = x^3 - 8x^2 + 21x - 18$

$A(x) = x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3)$

$B(x) = x^3 + 2x^2 + x = x(x+1)^2$

$C(x) = x^3 - 8x^2 + 21x - 18 = (x-3)^2(x-2)$

m.c.d.: 1

m.c.m.: $(x+1)^2(x-3)^2(x-2)x$

33. Troba el m.c.d. i el m.c.m. de $S(x) = (x-2)^2$ i $T(x) = x^2 - 4$.

Comprova que el producte dels dos polinomis que acabes de trobar és igual al producte dels polinomis $S(x)$ i $T(x)$.

$S(x) = (x-2)^2$; $T(x) = (x+2)(x-2)$

m.c.d.: $x - 2$; m.c.m.: $(x-2)^2(x+2)$

Efectivament:

$$(x-2)(x-2)^2(x+2) = S(x) \cdot T(x)$$

34. El m.c.d. de dos polinomis $A(x)$ i $B(x)$ és 1. Quin és el seu m.c.m.?

Si el m.c.d. de $A(x)$ i $B(x)$ és 1, els factors que formen el m.c.m. són els dels dos polinomis; és a dir, el m.c.m. $= A(x) \cdot B(x)$

35. Determina si els parells de fraccions següents són equivalents:

a) $\dfrac{x^2 - 25}{x^2 + 7x + 10}$ i $\dfrac{x - 5}{x + 2}$

$\dfrac{x^2 - 25}{x^2 + 7x + 10} = \dfrac{x - 5}{x + 2}$, ja que:

$$(x^2 - 25)(x+2) = (x^2 + 7x + 10)(x-5)$$

b) $\dfrac{1}{x+1}$ i $\dfrac{x-1}{x^2+2}$

$\dfrac{1}{x+1} \neq \dfrac{x-1}{x^2+2}$, ja que:

$$(x^2+2) \neq x^2-1$$

36. Considera la fracció $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$. Indica quines d'aquestes fraccions en són equivalents:

a) $\dfrac{4P(x)}{4Q(x)}$

$$\frac{4P(x)}{4Q(x)} = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

b) $\dfrac{10P(x)}{5Q(x)}$

c) $\dfrac{3+P(x)}{3+Q(x)}$

d) $\dfrac{[P(x)]^2}{[Q(x)]^2}$

La resta de fraccions no són equivalents a $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$.

37. Indica per a quins valors de x no té valor numèric la fracció algèbrica:

$$\frac{2x+7}{2x^2-x-1}$$

La fracció no té valor numèric per a aquells nombres que anul·lin el denominador:

$$2x^2-x-1=0 \quad \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

38. Simplifica aquestes fraccions algèbriques:

a) $\dfrac{x^2-7x+10}{2x^2-50}$

$$\frac{x^2+7x+10}{2x^2-50} = \frac{(x-2)(x-5)}{2(x+5)(x-5)} =$$

$$= \frac{x-2}{2x+10}$$

b) $\dfrac{x^3-1}{x^2-3x+2}$

$$\frac{x^3-1}{x^2-3x+2} = \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x-2)} =$$

$$= \frac{x^2+x+1}{x-2}$$

c) $\dfrac{x^3-5x+4}{x^3-3x^2+3x-1}$

$$\frac{x^3-5x+4}{x^3-3x^2+3x-1} =$$

$$= \frac{(x-1)(x^2+x-4)}{(x-1)(x^2-2x+1)} = \frac{x^2+x-4}{x^2-2x+1}$$

d) $\dfrac{x^4-16}{x^3-2x^2+4x+8}$

$$\frac{x^4-16}{x^3+2x^2+4x+8} =$$

$$= \frac{(x^2+4)(x+2)(x-2)}{(x^2+4)(x+2)} = x-2$$

e) $\dfrac{3x^2-5x+2}{4x^2-4}$

$$\frac{3x^2-5x+2}{4x^2-4} = \frac{(3x-2)(x-1)}{4(x+1)(x-1)} =$$

$$= \frac{3x-2}{4(x+1)}$$

39. Calcula:

a) $\dfrac{2x-1}{2x+4} + \dfrac{1}{x^2-4} - \dfrac{3-x}{x-2}$

$\dfrac{2x-1}{2x+4} + \dfrac{1}{x^2-4} - \dfrac{3-x}{x-2}$; m.c.m. dels denominadors: $2(x-2)(x+2)$:

$$\frac{(2x-1)(x-2)+2-(3-x)\cdot 2(x+2)}{2(x-2)(x+2)} =$$

$$= \frac{4x^2-7x+8}{2(x^2-4)}$$

b) $\dfrac{1-x^2}{x^2-x} \cdot \dfrac{3x}{x-1}$

$$\frac{1-x^2}{x^2-x} \cdot \frac{3x}{x-1} =$$

$$= \frac{(1+x)(1-x)3x}{x(x-1)(x-1)} = \frac{-3(1+x)}{x-1}$$

40. **Donades les fraccions:**

$$A = \frac{1}{x+5},\ B = \frac{x^2-25}{x+3}$$

$$\text{i } C = \frac{x^2+4x+3}{x+5}$$

calcula:

a) $(A \cdot B) \cdot C$

$$\frac{1}{x+5} \cdot \frac{x^2-25}{x+3} \cdot \frac{x^2+4x+3}{x+5} =$$

$$= \frac{(x+5)(x-5)(x+3)(x+1)}{(x+5)(x+3)(x+5)} =$$

$$= \frac{(x-5)(x+1)}{x+5}$$

b) $(A + C) \cdot B$

$$\frac{1}{x+5} + \frac{x^2+4x+3}{x+5} =$$

$$= \frac{x^2+4x+4}{x+5}$$

$$\frac{x^2+4x+4}{x+5} \cdot \frac{x^2-25}{x+3} =$$

$$= \frac{(x+2)^2(x+5)(x-5)}{(x+5)(x+3)} =$$

$$= \frac{(x+2)^2(x-5)}{x+3}$$

c) $3A : C$

$$\frac{3}{x+5} : \frac{x^2+4x+3}{x+5} =$$

$$= \frac{3(x+5)}{(x+5)(x^2+4x+3)} =$$

$$= \frac{3}{x^2+4x+3}$$

41. **Quina fracció hem de sumar a $\frac{2x-1}{x+4}$ per obtenir la fracció zero?**

Serà la fracció oposada: $\frac{-2x+1}{x+4}$.

42. **Per quina fracció hem de multiplicar la fracció $\frac{3x}{x+3}$ per obtenir el polinomi de grau zero i de coeficient 1, és a dir, $U(x) = 1$?**

Serà la fracció inversa: $\frac{x+3}{3x}$.

43. **Calcula:**

a) $\frac{3}{x^2-1} + \frac{5x}{x+1} - \frac{2x}{x-1}$

$$\frac{3}{x^2-1} + \frac{5x}{x+1} - \frac{2x}{x-1} =$$

$$= \frac{3 + 5x(x-1) - 2x(x+1)}{x^2-1} =$$

$$= \frac{3x^2-7x+3}{x^2-1}$$

b) $\frac{x^2-4}{3x} : \frac{x^2-4x+4}{x+2}$

$$\frac{x^2-4}{3x} : \frac{x^2-4x+4}{x+2} =$$

$$= \frac{(x+2)(x-2)(x+2)}{3x(x-2)^2} = \frac{(x+2)^2}{3x(x-2)}$$

c) $2 - \frac{3x}{x+1}$

$$2 - \frac{3x}{x+1} = \frac{2x+2-3x}{x+1} = \frac{2-x}{x+1}$$

d) $\frac{x^2+3}{x^2+1} - 5$

$$\frac{x^2+3}{x^2+1} - 5 = \frac{x^2+3-5x^2-5}{x^2+1} =$$

$$= \frac{-4x^2-2}{x^2+1}$$

44. **Quina condició ha de verificar una fracció algèbrica per tal que sigui equivalent a un polinomi?**

Una fracció algèbrica és equivalent a un polinomi si el polinomi numerador és múltiple del polinomi denominador.

45. **Comprova que el resultat d'aquesta multiplicació és 1:**

$$\frac{x^2-4}{x^2-1} \cdot \frac{x+1}{x+2} \cdot \frac{x-1}{x-2}$$

$$\frac{x^2-4}{x^2-1} \cdot \frac{x+1}{x+2} \cdot \frac{x-1}{x-2} =$$

$$= \frac{(x+2)(x-2)(x+1)(x-1)}{(x+1)(x-1)(x+2)(x-2)} = 1$$

46. **Per quina fracció algèbrica cal multiplicar $\frac{2x+1}{x^2-4}$ per obtenir $\frac{1}{2x^2-5x+2}$?**

La fracció s'obté en fer la divisió:

$$\frac{1}{2x^2-5x+2} : \frac{2x+1}{x^2-4} =$$
$$= \frac{(x+2)(x-2)}{(x-2)(2x+1)(2x-1)} =$$
$$= \frac{x+2}{(x-2)(4x^2-1)}$$

Acabem

1. **Expressa en forma de polinomi ordenat en potències decreixents de x els resultats d'aquestes operacions:**

a) $4(x-2)\left(x+\frac{1}{3}\right)$

$$4(x-2)\left(x+\frac{1}{3}\right) = 4x^2 - \frac{20}{3}x - \frac{8}{3}$$

b) $(x-2\sqrt{2})^2 x^2$

$$(x-2\sqrt{2})^2 x^2 = (x^2 - 2\sqrt{2}x + 2)\, x^2 =$$
$$= x^4 - 2\sqrt{2}x + 2x^2$$

c) $\frac{1}{x} \cdot \frac{3x^3 - x^2}{1-3x}$

$$\frac{1}{x} \cdot \frac{3x^3-x^2}{1-3x} = \frac{x^2(3x-1)}{x(1-3x)} = -x$$

d) $-x^3(1-x)^2$

$$-x^3(1-x)^2 = -x^3(1-2x+x^2) =$$
$$= -x^5 + 2x^4 - x^3$$

2. **Considera els polinomis $A(x) = x^2 - 2x - 3$ i $B(x) = (x+1)(x-3)$. Calcula'n el valor numèric per a $x = 1$ i $x = -2$. Poden ser iguals aquests dos polinomis? Raona la teva resposta i comprova-ho.**

$$A(1) = 1 - 2 - 3 = -4$$
$$A(-2) = (-2)^2 - 2(-2) - 3 = 5$$

$$B(1) = 2\cdot(-2) = -4$$
$$B(-2) = -1\cdot(-5) = 5$$

$A(x) = B(x)$ perquè tenen el mateix valor numèric.

3. **Escriu dos polinomis de tercer grau la suma dels quals sigui un polinomi de segon grau.**

Resposta oberta. Per exemple:

$$\left.\begin{array}{l} A(x) = 2x^3 + 3x^2 + 1 \\ B(x) = -2x^3 - x^2 + x \end{array}\right\rangle \to$$
$$\to A(x) + B(x) = 2x^2 + x + 1$$

4. **Troba el polinomi que sumat a $P(x) = x^4 - 3x^2 + 5x$ dóna com a resultat el polinomi $R(x) = x^3 - 1$.**

El polinomi que es busca és: $R(x) - P(x)$.

$$R(x) - P(x) = x^3 - 1 - x^4 + 3x^2 - 5x =$$
$$= -x^4 + x^3 + 3x^2 - 5x - 1$$

5. **Calcula a, b i c per tal que es verifiqui la igualtat:**

$$(x^3 - 2x + a)(bx + c) =$$
$$= 3x^4 + 2x^3 - 6x^2 - x + 2$$

$$(x^3 - 2x + a)(bx + c) =$$
$$= bx^4 + cx^3 - 2bx^2 + (ba - 2c)x + ca$$

Igualant els coeficients del mateix grau:

$$b = 3;\ c = 2;\ ba - 2c = -1 \to a = 1$$

6. **Explica la relació que hi ha entre els graus dels polinomis factors i el grau del polinomi producte. Quina relació hi ha entre els graus dels polinomis dividend, divisor i residu en una divisió de polinomis?**

El grau del polinomi producte és la suma dels graus dels factors.

El grau del dividend és la suma dels graus del divisor i del quocient. El grau del residu és menor que el grau del divisor.

7. **La potència de polinomis es defineix com a productes repetits de la base tantes vegades com indica l'exponent. $(3x^2 - 2)^5$ és un polinomi. De quin grau? Quin és el coeficient que acompanya el terme de grau més gran? Quin és el terme independent?**

En la potència $(3x^2 - 2)^5$, el primer terme del polinomi és $(3x^2)^5 = 243x^{10}$ i el terme independent: $(-2)^5 = -32$. Per tant, el grau del polinomi és 10.

8. **Si $A(x) = 3x^2 - \frac{1}{2}x + 2$, $B(x) = 2x + 3$ i $C(x) = x^3 - 3$, calcula:**

a) $\boldsymbol{B(x) \cdot 3A(x) - C(x)}$

$$
\begin{array}{rrrr}
 & 9x^2 & -\frac{3}{2}x & +6 \\
\times & & 2x & +3 \\
\hline
 & 27x^2 & -\frac{9}{2}x & +18 \\
18x^3 & -3x^2 & +12x & \\
\hline
18x^3 & -24x^2 & +\frac{15}{2}x & +18 \\
-x^3 & & & +3 \\
\hline
17x^3 & -24x^2 & +\frac{15}{2}x & +21
\end{array}
$$

$$B(x) \cdot 3A(x) - C(x) =$$
$$= 17x^3 - 24x^2 + \frac{15}{2}x + 21$$

b) $\boldsymbol{3B(x) \cdot A(x) - 2C(x)}$

$$
\begin{array}{rrrr}
 & 3x^2 & -\frac{1}{2}x & +2 \\
\times & & 6x & +9 \\
\hline
 & 27x^2 & -\frac{9}{2}x & +18 \\
18x^3 & -3x^2 & +12x & \\
\hline
18x^3 & +24x^2 & +\frac{15}{2}x & +18 \\
-2x^3 & & & -6 \\
\hline
16x^3 & -24x^2 & +\frac{15}{2}x & +12
\end{array}
$$

$$3B(x) \cdot A(x) - 2C(x) =$$
$$= 16x^3 - 24x^2 + \frac{15}{2}x + 12$$

c) $\boldsymbol{C(x) - 2B(x) - \frac{3}{2}A(x)}$

$$
\begin{array}{rrrr}
x^3 & & & -3 \\
 & & -4x & -6 \\
 & -\frac{9}{2}x^2 & +\frac{3}{4}x & -3 \\
\hline
x^3 & -\frac{9}{2}x^2 & +\frac{13}{4}x & -12
\end{array}
$$

$$C(x) - 2B(x) - \frac{3}{2}A(x) =$$
$$= x^3 - \frac{9}{2}x^2 + \frac{13}{4}x - 12$$

d) $\boldsymbol{[C(x) - 3A(x)]B(x)}$

$$
\begin{array}{rrrrr}
 & x^3 & & & -3 \\
 & & -9x^2 & +\frac{3}{2}x & -6 \\
\hline
 & x^3 & -9x^2 & -\frac{3}{2}x & +3 \\
 & \times & & 2x & +3 \\
\hline
 & 3x^3 & -27x^2 & +\frac{9}{2}x & +9 \\
2x^4 & -18x^3 & +3x^2 & +6x & \\
\hline
2x^4 & -15x^3 & -24x^2 & +\frac{21}{2}x & +9
\end{array}
$$

$$[C(x) - 3A(x)] \cdot B(x) =$$
$$= 2x^4 - 15x^3 - 24x^2 + \frac{21}{2}x + 9$$

9. Hi ha algun polinomi que multiplicat per $x - 4$ doni com a resultat el polinomi $2x^2 - 5x - 12$? Si la resposta és afirmativa, quin és?

El polinomi és el quocient de la divisió:

$$(2x^2 - 5x - 12) : (x - 4)$$

Si és exacta, es pot fer la divisió per Ruffini:

$$
\begin{array}{c|rrr}
 & 2 & -5 & -12 \\
4 & & 8 & 12 \\
\hline
 & 2 & 3 & 0
\end{array}
$$

El polinomi és:

$$2x + 3$$

10. Donat el polinomi $A(x) = 2x^3 - x^2 - 4x - 1$, determina, si existeix, un altre polinomi $C(x)$ tal que el quocient de la divisió $A(x) : C(x)$ sigui $2x + 3$ i el residu, -4.

$$
\begin{array}{l|l}
A(x) & C(x) \\
\dots & 2x+3 \\
\hline
\dots & \\
-4 &
\end{array}
$$

$$A(x) = C(x) \cdot (2x + 3) + (-4)$$

$$C(x) = [A(x) + 4] : (2x + 3) = x^2 - 2x^2 + 1$$

$$
\begin{array}{rrrr|l}
2x^3 & -x^2 & -4x & +3 & 2x+3 \\
\cline{5-5}
-2x^3 & -3x^2 & & & x^2 - 2x + 1 \\
\hline
 & -4x^2 & -4x & & \\
 & +4x^2 & +6x & & \\
\hline
 & & 2x & +3 & \\
 & & -2x & -3 & \\
\hline
\end{array}
$$

11. Troba el dividend d'una divisió en què el quocient és $3x^2 - 2x + 1$; el divisor, $2x^2 + x$ i el residu, $x + 1$.

$$D(x) = (2x^2 + x)(3x^2 - 2x + 1) + (x + 1) = 6x^4 - x^3 + 2x + 1$$

$$\begin{array}{rrrrr}
 & & 3x^2 & -2x & +1 \\
\times & & 2x^2 & + x & \\
\hline
 & 3x^3 & -2x^2 & +x & \\
6x^4 & -4x^3 & +2x^2 & & \\
\hline
6x^4 & -x^3 & & +x & \\
 & & & x & +1 \\
\hline
6x^4 & -x^3 & & +2x & +1
\end{array}$$

12. Calcula m per tal que la divisió següent sigui exacta:

$$(x^4 + x^3 - 2x^2 - x - 7m) : (x^2 + x - 1)$$

$$\begin{array}{l|l}
x^4 + x^3 - 2x^2 - x - 7m & x^2 + x - 1 \\
\cline{2-2}
-x^4 - x^3 + x^2 & x^2 - 1 \\
\cline{1-1}
\quad - x^2 - x - 7m & \\
\quad + x^2 + x - 1 & \\
\cline{1-1}
\qquad\quad - 7m - 1 &
\end{array}$$

$$-7m - 1 = 0 \rightarrow m = -\frac{1}{7}$$

13. Efectua aquestes divisions. Aplica la regla de Ruffini sempre que sigui possible.

a) $(x^3 - 3x^2 + 2x) : (2x - 1)$

$$\begin{array}{l|l}
x^3 - 3x^2 - 2x & 2x - 1 \\
\cline{2-2}
-x^3 + \frac{1}{2}x^2 & \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{3}{8} \\
\cline{1-1}
-\frac{5}{2}x^2 + 2x & \\
\frac{5}{2}x^2 - \frac{5}{4}x & \\
\cline{1-1}
\frac{3}{4}x & \\
-\frac{3}{4}x + \frac{3}{8} & \\
\cline{1-1}
\frac{3}{8} &
\end{array}$$

Quocient: $\frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{3}{8}$

Residu: $\frac{3}{8}$

b) $x^5 : (x^2 - 1)$

$$\begin{array}{l|l}
x^5 & x^2 - 1 \\
\cline{2-2}
-x^5 + x^3 & x^3 + x \\
\cline{1-1}
x^3 & \\
- x^3 + x & \\
\cline{1-1}
x &
\end{array}$$

Quocient: $x^3 + x$

Residu: x

c) $(x^4 - 2x^2 + 1) : (x + 2)$

Per Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\
-2 & & -2 & 4 & -4 & 8 \\
\hline
 & 1 & -2 & 2 & -4 & \boxed{9}
\end{array}$$

Quocient: $x^3 - 2x^2 + 2x - 4$

Residu: 9

d) $(x^6 + x^3 - x + 1) : (x - 1)$

Per Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrrrrr}
 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\
1 & & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\
\hline
 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & \boxed{2}
\end{array}$$

Quocient: $x^5 + x^4 + x^3 + 2x^2 + 2x + 1$

Residu: 2

14. Calcula c per tal que el residu de la divisió següent sigui 2:

$$[2(c + 1)x^3 - 3x^2 - 5(1 - 2c)x + c - 2] : (x - 3)$$

Pots fer-ho de dues maneres. Explica-les.

Es pot fer calculant el residu de la divisió i trobant el valor numèric del polinomi en substituir $x = 3$.

$$2(c + 1) \cdot 3^3 - 3 \cdot 3^2 - 5(1 - 2c)3 + c - 2 = 0$$

$$c = -\frac{2}{17}$$

15. Esbrina si el polinomi $6x^2 - 6x - 12$ és divisible per $2x - 4$. Pots donar la resposta sense fer la divisió?

El polinomi és múltiple de 2.

$$6x^2 - 6x - 12 = 6(x^2 - x - 2)$$

$$2x - 4 = 2(x - 2)$$

$2^2 - 2 - 2 = 0$. Sí, és divisible.

16. Calcula el valor numèric del polinomi següent per a $x = -2$.

$$\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{4}x^2 - \frac{7}{2}x - 8$$

Fes-ho pel procediment més curt.

$$\frac{1}{2}(-2)^3 - \frac{3}{4}(-2)^2 - \frac{7}{2}(-2) - 8 =$$
$$= -4 - 3 + 7 - 8 = -8$$

17. Dels nombres enters 1, −1, 2, −2, 4 i −4, quins són arrels del polinomi $A(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + 8$? Quins no ho són?

Cal buscar el valor numèric del polinomi per a cada una de les suposades arrels.

El valor numèric és zero i, per tant, són arrels: 1, −2 i 4. La resta no ho són.

18. Quines són les arrels enteres del polinomi $x^8 - 1$? Raona la resposta. Té alguna arrel entera el polinomi $x^8 + 1$? Per què?

Les arrels enteres de $x^8 - 1$ són 1 i −1 que fan zero el valor numèric del polinomi. $x^8 + 1$ no té arrel ja que $1^8 + 1 = (-1)^8 + 1 = 2$.

19. Factoritza els polinomis següents:

a) $\boldsymbol{A(x) = 3x^3 - 75x}$

$A(x) = 3x^3 - 75x$

$A(x) = 3x(x^2 - 25) = 3x(x + 5)(x - 5)$

b) $\boldsymbol{B(x) = 3x^3 + 18x^2 + 27x}$

$B(x) = 3x^3 + 18x^2 + 27x$

$B(x) = 3x(x^2 + 6x + 9) = 3x(x + 3)^2$

c) $\boldsymbol{C(x) = 2x^4 - 12x^3 + 18x^2}$

$C(x) = 2x^4 - 12x^3 + 18x^2$

$C(x) = 2x^3(x - 6)$

d) $\boldsymbol{D(x) = \frac{1}{4}x^2 - 3x + 9}$

$$D(x) = \frac{1}{4}x^2 - 3x + 9$$

$$D(x) = \left(\frac{1}{2}x - 3\right)^2$$

20. Determina el m.c.d. i el m.c.m. dels polinomis:

$\boldsymbol{A(x) = 2x^5 + 6x^4 - 8x^2,\ B(x) = x^3 - x}$ **i** $\boldsymbol{C(x) = x^4 - x^3 - x^2 + x}$

$$A(x) = 2x^2(x - 1)(x^2 + x + 4)$$
$$B(x) = x(x + 1)(x - 1)$$
$$C(x) = x(x - 1)^2(x + 1)$$

m.c.d. $= (x - 1)x$

m.c.m. $= 2x^2(x - 1)^2(x^2 + x + 4)(x + 1)$

21. Calcula:

$$\frac{1 - x}{1 + x} + \frac{x + 1}{1 - x} - \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$$

Cal tenir en compte que $1 - x = -(x - 1)$. m.c.m. $= x^2 - 1$.

$$\frac{(1 - x)(1 - x)}{x^2 - 1} - \frac{(x + 1)(1 + x)}{x^2 - 1} -$$
$$- \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = \frac{-x^2 - 4x - 1}{x^2 - 1}$$

22. Donades les fraccions següents:

$$\boldsymbol{A(x) = \frac{x - 2}{x^2 + 6x + 9}} \text{ i } \boldsymbol{B(x) = \frac{x + 3}{x^2 - 4}},$$

calcula:

$$\boldsymbol{A(x) \cdot B(x),\ A(x) : B(x) \text{ i } B(x) : A(x)}$$

$$A(x) \cdot B(x) = \frac{(x - 2)(x + 3)}{(x + 3)^2(x + 2)(x - 2)} =$$
$$= \frac{1}{(x + 3)(x + 2)}$$

$$A(x) : B(x) = \frac{(x - 2)(x + 2)(x - 2)}{(x + 3)^2(x + 3)} =$$
$$= \frac{(x - 2)^2(x + 2)}{(x + 3)^3}$$

$$B(x) : A(x) = \frac{(x + 3)^3}{(x + 2)^2(x + 2)}$$