## Comencem

- Considera les funcions $f(x) = -2x + 5$ i $g(x) = x^2 - 6x + 8$

*a)* **Calcula $f(3)$ i $g(-2)$.**

$f(3) = -2 \cdot 3 + 5 = -6 + 5 = -1$

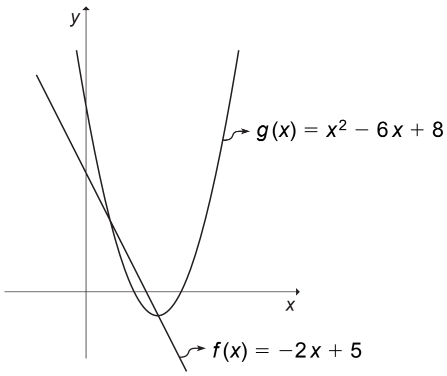
$g(-2) = (-2)^2 - 6(-2) + 8 = $
$= 4 + 12 + 8 = 24$

*b)* **Determina les antiimatges de 0 en ambdues funcions.**

$$-2x + 5 = 0 \rightarrow x = \frac{5}{2}$$

$$x^2 - 6x + 8 = 0 \rightarrow x_1 = 4,\ x_2 = 2$$

*c)* **Representa-les gràficament.**




## Exercicis

**1.** **Defineix la variable independent i la variable dependent en els casos següents:**

*a)* **L'import que cal pagar en una benzinera i els litres de benzina que hi comprem.**

$x$: litres de benzina

$y$: import en euros

*b)* **El pes d'una persona i la seva edat.**

$x$: edat

$y$: pes

*c)* **L'espai recorregut per un cotxe i la velocitat a què circula.**

$x$: velocitat

$y$: espai recorregut

*d)* **El volum d'una esfera i la longitud del diàmetre.**

$x$: longitud del diàmetre

$y$: volum de l'esfera

**2.** **Representa la variable independent per $x$ i la variable dependent per $f(x)$ i troba, sempre que sigui possible, l'expressió algèbrica de cadascuna de les funcions de l'exercici anterior.**

*a)* $f(x) = px$, essent $p$ el preu d'un litre de benzina en €.

*b)* No és possible.

*c)* Caldria saber el tipus de moviment.

*d)* $f(x) = \dfrac{\pi}{6}x^3$

**3.** **Escriu l'expressió algèbrica i troba el domini de les funcions següents:**

*a)* **A cada valor del radi d'una esfera li assignem la seva superfície.**

$$f(x) = 4\pi x^2;\ D_f = \mathbb{R}^+$$

*b)* **La diagonal d'un quadrat depèn de la longitud del costat.**

$$f(x) = \sqrt{2}\,c;\ D_f = \mathbb{R}^+$$

*c)* **Al radi d'una circumferència li assignem l'àrea de l'hexàgon regular inscrit.**

$$f(x) = \frac{3\sqrt{3}}{2}x^2;\ D_f = \mathbb{R}^+$$

*d)* **La longitud de l'aresta d'un cub és funció del volum.**

$$f(x) = \sqrt[3]{x};\ D_f = \mathbb{R}^+$$

**4.** **Determina el domini de les funcions:**

$f(x) = 3x - 7$, $g(x) = 2x^2 - 7x + 11$ i $h(x) = \dfrac{1}{x+1}$

$D_f = \mathbb{R}$

$D_g = \mathbb{R}$

$D_h = \{x \in \mathbb{R} \mid x + 1 \neq 0\} = \mathbb{R} - \{-1\}$

**5. Troba el domini de les funcions següents:**

*a)* $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2 - 6x + 5}$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} | \, x^2 - 6x + 5 \neq 0\} = \mathbb{R} - \{1, 5\}$

*b)* $g(x) = \sqrt{4 + 3x}$

$D_g = \{x \in \mathbb{R} | \, 4 + 3x \geqslant 0\} = \left[-\dfrac{4}{3}, +\infty\right)$

*c)* $h(x) = \dfrac{7x + 8}{x^2 + 5}$

$D_h = \mathbb{R}$

*d)* $k(x) = \sqrt[3]{\dfrac{3}{4}x + 5}$

$D_k = \mathbb{R}$

*e)* $p(x) = -\dfrac{2}{3}x^3 - 5x + 2$

$D_p = \mathbb{R}$

*f)* $t(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+4}{x} & \text{si } x \leqslant 2 \\ \dfrac{2x}{x-3} & \text{si } x > 2 \end{cases}$

$D_t = \{x \in \mathbb{R} | \, x \neq 0 \text{ i } x - 3 \neq 0\} =$
$= \mathbb{R} - \{0, 3\}$

**6. Amb les funcions *f*, *g* i *h* dels exemples anteriors, comprova que es verifiquen les propietats de la suma i del producte de funcions.**

*Suma*

$f(x) + g(x) = g(x) + f(x) = \dfrac{x^3 - x^2 - x + 2}{x^2 - 1}$

$f(x) + [g(x) + h(x)] = [f(x) + g(x)] + h(x) =$

$= \dfrac{2x^4 - 4x^3 - 5x^2 - x + 6}{(x^2 - 1)(x - 3)}$

$O(x) = 0$ per a les tres funcions.

$f$: $-f(x) = -\dfrac{x^2 - 2}{x + 1} = \dfrac{2 - x^2}{x + 1}$

$g$: $-g(x) = \dfrac{-x}{x^2 - 1}$

$h$: $-h(x) = \dfrac{-x^2}{x - 3}$

*Producte*

Propietat commutativa:

$f(x) \cdot g(x) = g(x) \cdot f(x) = \dfrac{x(x^2 - 2)}{(x - 1)(x + 1)^2}$

Propietat associativa:

$f(x) \cdot [g(x) \cdot h(x)] = [f(x) \cdot g(x)] \cdot h(x) =$

$= \dfrac{x^3(x^2 - 2)}{(x - 1)(x + 1)^2(x - 3)}$

Element neutre: $I(x) = 1$ per a les tres funcions.

Element simètric:

Per a la funció $f$: $\left(\dfrac{1}{f}\right)(x) = \dfrac{x + 1}{x^2 - 2}$

Per a la funció $g$: $\left(\dfrac{1}{g}\right)(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x}$

Per a la funció $h$: $\left(\dfrac{1}{h}\right)(x) = \dfrac{x - 3}{x}$

Propietat distributiva de la multiplicació respecte de la suma:

$f(x)\,[g(x) + h(x)] = f(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot h(x) =$

$= \dfrac{(x^2 - 2)\,(x^4 - 3x)}{(x + 1)^2\,(x - 1)\,(x - 3)}$

**7. A partir de les funcions *f* i *k* dels exemples, escriu l'expressió algèbrica de les funcions $\dfrac{1}{f}$, $\dfrac{1}{k}$, $\dfrac{1}{-f}$ i $\dfrac{1}{k}$. Troba'n el domini.**

$\left(\dfrac{1}{f}\right)(x) = \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{x + 1}{x^2 - 2}$

$\left(\dfrac{1}{k}\right)(x) = \dfrac{1}{k(x)} = \dfrac{1}{\sqrt{x + 1}}$

$\left(\dfrac{1}{-f}\right)(x) = -\left(\dfrac{1}{f}\right)(x) = -\dfrac{x + 1}{x^2 - 2}$

$\left(-\dfrac{1}{k}\right)(x) = -\left(\dfrac{1}{k}\right)(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{x + 1}}$

$D_{\frac{1}{f}} = D_{\frac{1}{-f}} = \{x \in \mathbb{R} | \, x^2 - 2 \neq 0\} =$

$= \mathbb{R} - \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$

$D_{\frac{1}{k}} = D_{-\frac{1}{k}} = \{x \in \mathbb{R} | \, x + 1 > 0\} =$

$= (-1, +\infty\}$

**8.** **Donades les funcions:**

$$f(x) = \frac{2x-4}{x+3} \text{ i } g(x) = \frac{x+2}{3x-9}$$

**Determina l'expressió de les funcions** $\frac{f}{g}$, $\frac{g}{f}$, $\frac{1}{\frac{f}{g}}$ **i** $\frac{1}{\frac{g}{f}}$ **i troba'n el domini.**

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{2x-4}{x+3}}{\frac{x+2}{3x-9}} =$$

$$= \frac{(2x-4)(3x-9)}{(x+3)(x+2)} = \frac{6x^2-30x+36}{x^2+5x+6}$$

$$\left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{\frac{x+2}{3x-9}}{\frac{2x-4}{x+3}} =$$

$$= \frac{(x+2)(x+3)}{(3x-9)(2x-4)} = \frac{x^2+5x+6}{6x^2-30x+36}$$

$$\left(\frac{1}{\frac{f}{g}}\right)(x) = \frac{1}{\frac{f(x)}{g(x)}} = \frac{1}{f(x)\cdot g(x)} =$$

$$= \frac{1}{\frac{2x-4}{x+3}\cdot\frac{x+2}{3x-9}} = \frac{1}{\frac{2x^2-8}{3x^2-27}} =$$

$$= \frac{3x^2-27}{2x^2-8}$$

$$\left(\frac{1}{\frac{g}{f}}\right)(x) = \frac{1}{\frac{g(x)}{f(x)}} = \frac{f(x)}{g(x)} =$$

$$= \frac{6x^2-30x+36}{x^2+5x+6}$$

$$D_{\frac{f}{g}} = D_{\frac{1}{\frac{g}{f}}} = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2+5x+6 \neq 0\} =$$

$$= \mathbb{R} - \{-3, -2\}$$

$$D_{\frac{g}{f}} = \{x \in \mathbb{R} \mid 6x^2-30x+36 \neq 0\} =$$

$$= \mathbb{R} - \{2, 3\}$$

$$D_{\frac{1}{\frac{f}{g}}} = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x^2-8 \neq 0\} = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$$

**9.** **Amb les funcions $f(x) = 7x+4$, $g(x) = 2x^2-1$ i $h(x) = -x+9$, comprova les propietats associativa i de l'element neutre de la composició de funcions.**

Propietat associativa:

$$[h \circ (g \circ f)](x) = h[(g \circ f)(x)] = h[g(f(x))] =$$

$$= h[g(7x+4)] = h(2(7x+4)^2-1) =$$

$$= h(98x^2+112x+31) =$$

$$= -98x^2-112x-31+9 =$$

$$= -98x^2-112x-22$$

$$[(h \circ g) \circ f](x) = (h \circ g)(f(x)) = h[g(f(x))] =$$

$$= -98x^2-112x-22$$

Element neutre:

$$(f \circ I)(x) = f(I(x)) = f(x) = 7x+4$$

$$(I \circ f)(x) = I(f(x)) = f(x) = 7x+4$$

**10.** **Donades les funcions:**

$$f(x) = 3-2x \text{ i } g(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2},$$

**comprova que són inverses l'una de l'altra. Fes-ho també gràficament.**

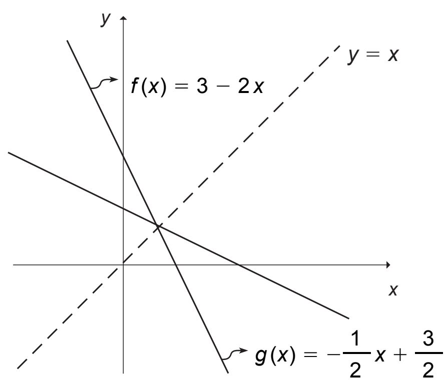
$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3-2x) =$$

$$= -\frac{1}{2}(3-2x) + \frac{3}{2} = -\frac{3}{2} + x + \frac{3}{2} = x$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) =$$

$$= f\left(-\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}\right) = 3 - 2\left(-\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}\right) =$$

$$= 3 + x - 3 = x$$



**11.** **Comprova que la funció inversa de $f(x) = \dfrac{1}{x}$ és ella mateixa.**

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x \rightarrow$$

$$\rightarrow f^{-1}(x) = f(x) = \frac{1}{x}$$

**12.** **Amb les funcions $f(x) = \dfrac{x+4}{x+2}$ i $g(x) = \dfrac{3}{x+1}$:**

*a)* **Troba l'expressió algèbrica i el domini de: $g \circ f$, $f \circ g$, $f \circ f$, $g \circ g$, $f^{-1}$ i $g^{-1}$.**

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{x+4}{x+2}\right) =$$

$$= \frac{3 \cdot \frac{x+4}{x+2}}{\frac{x+4}{x+2} + 1} = \frac{\frac{3(x+4)}{x+2}}{\frac{x+4+x+2}{x+2}} =$$

$$= \frac{3(x+4)}{2x+6} = \frac{3x+12}{2x+6}$$

$$D_{g \circ f} = \mathbb{R} - \{-3, -2\}$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{3x}{x+1}\right) =$$

$$= \frac{\frac{3x}{x+1} + 4}{\frac{3x}{x+1} + 2} = \frac{\frac{3x+4x+4}{x+1}}{\frac{3x+2x+2}{x+1}} =$$

$$= \frac{7x+4}{5x+2}$$

$$D_{f \circ g} = \mathbb{R} - \left\{-1, -\frac{2}{5}\right\}$$

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f\left(\frac{x+4}{x+2}\right) =$$

$$= \frac{\frac{x+4}{x+2} + 4}{\frac{x+4}{x+2} + 2} = \frac{\frac{x+4+4x+8}{x+2}}{\frac{x+4+2x+4}{x+2}} =$$

$$= \frac{5x+12}{3x+8}$$

$$D_{f \circ f} = \mathbb{R} - \left\{-2, -\frac{8}{3}\right\}$$

$$(g \circ g)(x) = g(g(x)) = g\left(\frac{3x}{x+1}\right) =$$

$$= \frac{3\,\frac{3x}{x+1}}{\frac{3x}{x+1} + 1} = \frac{\frac{9x}{x+1}}{\frac{3x+x+1}{x+1}} =$$

$$= \frac{9x}{4x+1}$$

$$D_{g \circ g} = \mathbb{R} - \left\{-1, -\frac{1}{4}\right\}$$

$$y = \frac{x+4}{x+2} \rightarrow xy + 2y = x + 4 \rightarrow$$

$$\rightarrow xy - x = 4 - 2y \rightarrow$$

$$\rightarrow x(y-1) = 4 - 2y$$

$$x = \frac{4-2y}{y-1} \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{4-2x}{x-1}$$

$$D_{f^{-1}} = \mathbb{R} - \{1\}$$

$$y = \frac{3x}{x+1} \rightarrow xy + y = 3x \rightarrow$$

$$\rightarrow 3x - xy = y \rightarrow x(3-y) = y$$

$$x = \frac{y}{3-y} \rightarrow g^{-1}(x) = \frac{x}{3-x}$$

$$D_{g^{-1}} = \mathbb{R} - \{3\}$$

*b)* **Comprova que les funcions $f^{-1}$ i $g^{-1}$ són les inverses de $f$ i $g$ respectivament.**

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}\left(\frac{x+4}{x+2}\right) =$$

$$= \frac{4 - 2\,\frac{x+4}{x+2}}{\frac{x+4}{x+2} - 1} =$$

$$= \frac{\frac{4x+8-2x-8}{x+2}}{\frac{x+4-x-2}{x+2}} =$$

$$= \frac{2x}{2} = x$$

$$(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = f\left(\frac{4-2x}{x-1}\right) =$$

$$= \frac{\frac{4-2x}{x-1}+4}{\frac{4-2x}{x-1}+2} = \frac{\frac{4-2x+4x-4}{x-1}}{\frac{4-2x+2x-2}{x-1}} =$$

$$= \frac{2x}{2} = x$$

$$(g^{-1} \circ g)(x) = g^{-1}(g(x)) = g^{-1}\left(\frac{3x}{x+1}\right) =$$

$$= \frac{\frac{3x}{x+1}}{3-\frac{3x}{x+1}} = \frac{\frac{3x}{x+1}}{\frac{3x+3-3x}{x+1}} =$$

$$= \frac{3x}{3} = x$$

$$(g \circ g^{-1})(x) = g(g^{-1}(x)) = g\left(\frac{x}{3-x}\right) =$$

$$= \frac{3\frac{x}{3-x}}{\frac{x}{3-x}+1} = \frac{\frac{3x}{3-x}}{\frac{x+3-x}{3-x}} =$$

$$= \frac{3x}{3} = x$$

## Acabem

**1.** **En una certa zona, la quantitat de sofre que hi ha a l'atmosfera, en parts per milió, evoluciona d'acord amb la funció $s(t) = 2{,}1 - 0{,}2\,t + 0{,}03\,t^2$, on $t$ és el temps expressat en anys. Determina la presència de sofre en l'actualitat i quants anys han de transcórrer perquè s'assoleixi novament el valor actual.**

$s(0) = 2{,}1$. Actualment hi ha 2,1 parts per milió de sofre.

$$s(t) = 2{,}1 \rightarrow 2{,}1 - 0{,}2\,t + 0{,}03\,t^2 = 2{,}1 \rightarrow$$
$$\rightarrow 0{,}03\,t^2 - 0{,}2\,t = 0$$

$$t(0{,}03\,t - 0{,}2) = 0 \xrightarrow{t \neq 0} 0{,}03\,t - 0{,}2 = 0 \rightarrow$$
$$\rightarrow 0{,}03\,t = 0{,}2 \rightarrow t = \frac{0{,}2}{0{,}03} = 6{,}\widehat{6} \text{ anys}$$

**2.** **Defineix la funció que expressa la suma de dos nombres enters tals que el seu producte és 18. Troba'n el domini.**

$$S(x) = x + \frac{18}{x} = \frac{x^2+18}{x}$$

$$D_s = \{-18, -9, -6, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 6, 9, 18\}$$

**3.** **En un triangle, la suma de les longituds de la base i l'altura és 15 cm. Expressa l'àrea del triangle en funció de la longitud de la base. Troba el domini d'aquesta funció.**

$$S(x) = \frac{x(15-x)}{2} = \frac{1}{2}x^2 - \frac{15}{2}x \text{ en cm}^2$$

$$D_s = (0, 15)$$

**4.** **Volem construir una capsa sense tapa amb una cartolina quadrada de 12 cm de costat. Per fer-ho, retallem quadrats iguals de costat $x$ cm en cadascuna de les quatre cantonades de la cartolina. Determina l'expressió algèbrica que ens dóna el volum de la capsa (fig. 9.12), en funció del valor de $x$. Indica el domini d'aquesta funció.**

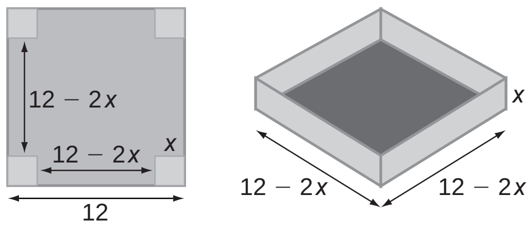


Fig. 9.12

$$V(x) = (12-2x)^2\,x = (144 - 48x + 4x^2)\,x =$$
$$= 4x^3 - 48x^2 + 144x \text{ en cm}^3$$

$$D_v = (0, 6)$$

**5.** **Troba el domini de la funció que expressa l'àrea d'un rectangle de 30 cm de perímetre en funció de la longitud d'un dels costats.**

$$2x + 2y = 30 \rightarrow x + y = 15 \rightarrow y = 15 - x$$

$$S = xy = x(15-x) = 15x - x^2$$

$$S(x) = 15x - x^2 \text{ en cm}^2,\ D_s = (0, 15)$$

**6.** **L'altura d'un cilindre és el triple del radi de la base. Escriu l'expressió del volum del cilindre en funció del radi de la base. Quin serà el volum del cilindre per a un radi de 5 cm? Quin és el valor del radi de la base si el volum del cilindre és de $24\pi$ cm$^3$? Troba el domini de la funció suposant que el volum màxim és de $3{,}75 \cdot 10^5\,\pi$ cm$^3$.**

$$V = \pi r^2 h = \pi r^2 \cdot 3r = 3\pi r^3 \rightarrow V(r) = 3\pi r^3$$

$$V(5) = 3\pi \cdot 5^3 = 375\pi \text{ cm}^3$$

$$24\pi = 3\pi r^3 \rightarrow r^3 = 8 \rightarrow r = \sqrt[3]{8} = 2 \text{ cm}$$

$$3{,}75 \cdot 10^5 \pi = 3\pi r^3 \rightarrow$$

$$\rightarrow r^3 = \frac{3{,}75 \cdot 10^5}{3} = \frac{375\,000}{3} =$$

$$= 125\,000 \text{ cm}^3 \rightarrow r = 50 \text{ cm}$$

$$D_v = (0,\ 50)$$

**7. Dos nombres naturals sumen 20. Expressa'n el producte en funció d'un d'ells. Troba el domini d'aquesta funció. Comprova que 15 és del domini, i que 28 no ho és.**

$$P(x) = x(20 - x) = 20x - x^2$$

$$D_p = \{x \in \mathbb{N} |\ 1 \leqslant x \leqslant 19\}$$

$$15 \in D_p,\ 28 \notin D_p$$

**8. Es vol construir una finestra formada per un quadrat i un semicercle de radi *x* (fig. 9.13). Troba les expressions del perímetre i de l'àrea de la finestra en funció de *x*. Indica el domini de cadascuna d'aquestes funcions.**

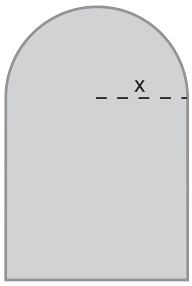



Fig. 9.13

$$p(x) = 6x + \frac{2\pi x}{2} = 6x + \pi x = (6 + \pi)x$$

$$S(x) = (2x)^2 + \frac{\pi x^2}{2} = 4x^2 + \frac{\pi x^2}{2} = \frac{8 + \pi}{2}x^2$$

$$D_p = D_s = (0,\ +\infty)$$

**9. El radi d'una taca d'oli circular creix a un ritme de 3 cm per minut i el centre es troba a 9 cm del marge de la taula.**

*a)* **Expressa la funció que assigna a cada instant *t* el valor del radi de la taca.**

$$r(t) = 3t,\ \ t \text{ en min i } r(t) \text{ en cm.}$$

*b)* **Quant trigarà la taca d'oli a arribar al marge de la taula?**

$$3t = 9 \rightarrow t = 3 \text{ min}$$

*c)* **Escriu l'expressió algèbrica de la funció que assigna a cada instant *t* el valor de l'àrea de la taca d'oli.**

$$S = \pi r^2 = \pi(3t)^2 = \pi 9t^2 = 9\pi t^2$$

$$S(t) = 9\pi t^2 \text{ en cm}^2$$

*d)* **Calcula l'àrea en l'instant en què la taca arriba al marge de la taula.**

$$S(3) = 9\pi \cdot 3^2 = 81\pi \text{ cm}^2$$

**10. Suposem que establir una trucada telefònica costa 0,50 € i, a partir d'aquest moment, el preu és de 0,30 € per minut. Troba l'expressió algèbrica de la funció que ens determina l'import d'una trucada telefònica en funció de la seva durada. Quant costarà una trucada de 8 minuts? Quants minuts ha durat una trucada l'import de la qual és de 5,10 €?**

$$f(t) = 0{,}5 + 0{,}3t,\ t \text{ en min, } f(t) \text{ en €}$$

$$f(8) = 0{,}5 + 0{,}3 \cdot 8 = 0{,}5 + 2{,}4 = 2{,}9 \text{ €}$$

$$0{,}5 + 0{,}3t = 5{,}3 \rightarrow 0{,}3t = 4{,}8 \rightarrow t = 16 \text{ min}$$

**11. La funció $f(t) = 2t^2 + 5t$ expressa la distància recorreguda per un mòbil en funció del temps, on *t* s'expressa en segons i *f*(*t*), en metres. Troba la distància recorreguda pel mòbil entre els instants $t = 1\,s$ i $t = 2\,s$. Quant de temps trigarà el mòbil a recórrer una distància de 75 m?**

$$f(2) - f(1) = 2 \cdot 2^2 + 5 \cdot 2 - 2 - 5 =$$

$$= 8 + 10 - 2 - 5 = 11 \text{ m}$$

$$2t^2 + 5t = 75 \rightarrow 2t^2 + 5t - 75 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow t = 5\,s$$

**12. En mesurar la temperatura a diferents alçades, s'ha observat que la temperatura disminueix 1 °C cada 200 m d'alçada. Si en un dia determinat la temperatura arran de terra és de 12 °C, escriu l'expressió algèbrica de la funció *t*(*h*), essent *h* l'alçada en metres i *t*(*h*) la temperatura en °C. Quina temperatura hi haurà a 6 km d'alçada? A quina alçada hi haurà una temperatura de −50 °C?**

$$t(h) = 12 - \frac{h}{200}$$

$$t(6\,000) = 12 - \frac{6\,000}{200} = 12 - 30 = -18 \text{ °C}$$

$$12 - \frac{h}{200} = -50 \rightarrow$$

$$\rightarrow h = 12\,400 \text{ m} = 12{,}4 \text{ km}$$

**13. Dividim un segment de 10 cm de longitud en dues parts. Expressa la suma de les àrees dels triangles equilàters construïts**

**sobre cadascuna d'aquestes dues parts (fig. 9.14), en funció del costat d'un dels triangles. Troba'n el domini.**

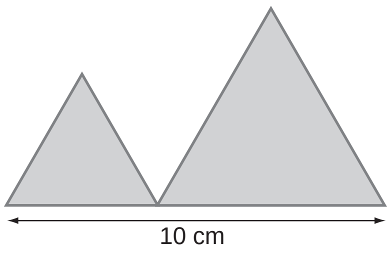


Fig. 9.14

$$S(x) = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}(10 - x)^2 =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}(100 - 20x + x^2) =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 + 25\sqrt{3} - 5\sqrt{3}\,x + \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}x^2 - 5\sqrt{3}\,x + 25\sqrt{3} \text{ en cm}^2$$

$$D_s = (0, 10)$$

**14.** **Troba el domini de les funcions següents:**

*a)* $\mathbf{f(x) = \dfrac{2}{x^2 - 10x + 16}}$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} | \, x^2 - 10x + 6 \neq 0\} =$$
$$= \mathbb{R} - \{2, 8\}$$

*b)* $\mathbf{g(x) = \sqrt{-\dfrac{2}{3}x + 8}}$

$$D_g = \left\{x \in \mathbb{R} | -\frac{2}{3}x + 8 \geqslant 0\right\} =$$
$$= (-\infty, 12]$$

*c)* $\mathbf{h(x) = \sqrt[3]{8 - x^5}}$

$$D_h = \mathbb{R}$$

*d)* $\mathbf{k(x) = \dfrac{7x}{3x^2 + 3}}$

$$D_k = \mathbb{R}$$

**15.** **Defineix una funció que tingui per domini els conjunts:**

Respostes obertes, per exemple:

*a)* $\mathbf{D_f = \mathbb{R} - \{2; 7\}}$

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 9x + 14}$$

*b)* $\mathbf{D_g = \{x \in \mathbb{R} | \, x < 0\}}$

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{-x}}$$

*c)* $\mathbf{D_h = (-\infty, -3]}$

$$h(x) = \sqrt{-x - 3}$$

*d)* $\mathbf{D_q = \mathbb{R}}$

$$q(x) = x^2 + x - 4$$

*e)* $\mathbf{D_p = \{x \in \mathbb{R} | \, x \neq -2, x \neq 0\}}$

$$p(x) = \frac{10}{x^2 + 2x}$$

**16.** **Determina el domini de cadascuna de les funcions següents:**

*a)* $\mathbf{f(x) = \dfrac{2 + x}{\sqrt{3 - x}}}$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} | \, 3 - x > 0\} = (-\infty, 3)$$

*b)* $\mathbf{g(x) = \dfrac{4x + 1}{x^2 + 7x}}$

$$D_g = \{x \in \mathbb{R} | \, x^2 + 7x \neq 0\} = \mathbb{R} - \{0, -7\}$$

*c)* $\mathbf{h(x) = \dfrac{2x + 1}{\sqrt[3]{8 - x^3}}}$

$$D_h = \{x \in \mathbb{R} | \, 8 - x^3 \neq 0\} = \mathbb{R} - \{2\}$$

*d)* $\mathbf{k(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x + 1} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{3x + 1}{2x - 5} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}}$

$$D_k = \{x \in \mathbb{R} | \, x + 1 \neq 0 \text{ i } 2x - 5 \neq 0\} =$$
$$= \mathbb{R} - \left\{-1, \frac{5}{2}\right\}$$

**17.** **Troba el domini de la funció representada en cadascuna de les gràfiques (fig. 9.15).**

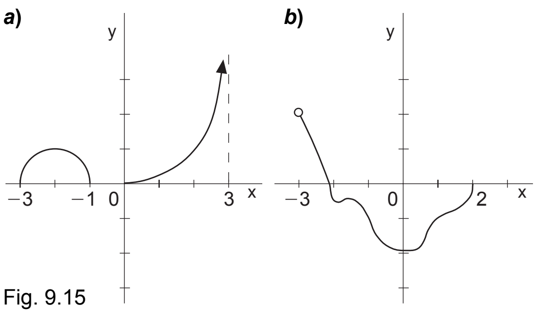


Fig. 9.15

*a*) $D_f = [-3, -1] \cup [0, 3)$

*b*) $D_g = (-3, 2]$

**18.** **Defineix una funció a trossos que tingui per domini $D_f = \{x \in \mathbb{R} | x \neq 0\}$.**

Resposta oberta, per exemple:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } x < 1 \\ x & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

**19.** **Calcula $f(-3)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$ i $f(2)$, i troba el domini de:**

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 3 & x < -1 \\ \dfrac{x^2 + 1}{x - 2} & -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ \sqrt{x + 3} & x > 1 \end{cases}$$

$$f(-3) = -2\,(-3) + 3 = 6 + 3 = 9$$

$$f(-1) = \frac{(-1)^2 + 1}{-1 - 2} = -\frac{2}{3}$$

$$f(0) = -\frac{1}{2}$$

$$f(1) = \frac{1 + 1}{1 - 2} = -2$$

$$f(2) = \sqrt{5}$$

$$D_f = \mathbb{R}$$

**20.** **Donades les funcions $f(x) = 3x^2 - 4$ i $g(x) = 3(x - 1)^2$, troba:**

*a*) $(f + g)(x)$

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) =$$
$$= 3x^2 - 4 + 3(x - 1)^2 =$$
$$= 3x^2 - 4 + 3x^2 - 6x + 3 =$$
$$= 6x^2 - 6x - 1$$

*b*) $g(x - 2)$

$$g(x - 2) = 3(x - 2 - 1)^2 = 3(x - 3)^2 =$$
$$= 3(x^2 - 6x + 9) = 3x^2 - 18x + 27$$

*c*) $(f \cdot g)(x)$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) =$$
$$= (3x^2 - 4)\,3(x - 1)^2 =$$
$$= (3x^2 - 4)\,3(x^2 - 2x + 1) =$$
$$= (3x^2 - 4)(3x^2 - 6x + 3) =$$
$$= 9x^4 - 18x^3 - 3x^2 + 24x - 12$$

*d*) $\left(\dfrac{g}{f}\right)(x)$

$$\left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{g(x)}{f(x)} =$$
$$= \frac{3(x - 1)^2}{3x^2 - 4} = \frac{3x^2 - 6x + 3}{3x^2 - 4}$$

*e*) $(f \circ g)(x)$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(3(x - 1)^2) =$$
$$= 3\big(3(x - 1)^2\big)^2 - 4 = 3 \cdot 9(x - 1)^4 - 4 =$$
$$= 27(x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1) - 4 =$$
$$= 27x^4 - 108x^3 + 162x^2 - 108x + 23$$

*f*) $(g \circ f)(x)$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x^2 - 4) =$$
$$= 3(3x^2 - 4 - 1)^2 = 3(3x^2 - 5)^2 =$$
$$= 3(9x^4 - 30x^2 + 25) =$$
$$= 27x^4 - 90x^2 + 75$$

**21.** **El nombre d'articles $n$ produïts en una empresa un dia qualsevol, $t$ hores després de l'inici de la feina, és $n(t) = -t^2 + 20t$, amb una jornada laboral de vuit hores diàries. Si el cost de producció de $n$ articles és, en euros, $c(n) = 5 + 6n$, determina l'expressió de la funció $c(t)$ que en dóna el cost en funció del temps. Indica'n el domini.**

$$c(t) = c(n(t)) = c(-t^2 + 20t) =$$
$$= 5 + 6(-t^2 + 20t) = 5 - 6t^2 + 120t =$$
$$= -6t^2 + 120t + 5$$
$$D_c = (0, 8]$$

**22.** **Siguin $f(x) = \dfrac{2x - 1}{x + 1}$ i $g(x) = \dfrac{x^2 - 1}{3x}$**

*a*) **Troba les funcions: $f + g$, $f \cdot g$, $\dfrac{f}{g}$, $f \circ f$, $g \circ g$, $f^{-1}$.**

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) =$$
$$= \frac{2x - 1}{x + 1} + \frac{x^2 - 1}{3x} =$$
$$= \frac{3x(2x - 1) + (x + 1)(x^2 - 1)}{3x(x + 1)} =$$
$$= \frac{6x^2 - 3x + x^3 + x^2 - x - 1}{3x(x + 1)} =$$
$$= \frac{x^3 + 7x^2 - 4x - 1}{3x(x + 1)} =$$
$$= \frac{x^3 + 7x^2 - 4x - 1}{3x^2 + 3x}$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) =$$
$$= \frac{2x-1}{x+1} \cdot \frac{x^2-1}{3x} =$$
$$= \frac{(2x-1)(x^2-1)}{(x+1)\,3x} = \frac{(2x-1)(x-1)}{3x} =$$
$$= \frac{2x^2-3x+1}{3x}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\dfrac{2x-1}{x+1}}{\dfrac{x^2-1}{3x}} =$$
$$= \frac{3x\,(2x-1)}{(x+1)\,(x^2-1)} = \frac{6x^2-3x}{x^3+x^2-x-1}$$

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f\left(\frac{2x-1}{x+1}\right) =$$
$$= \frac{2\dfrac{2x-1}{x+1}-1}{\dfrac{2x-1}{x+1}+1} = \frac{\dfrac{4x-2-x-1}{x+1}}{\dfrac{2x-1+x+1}{x+1}} =$$
$$= \frac{3x-3}{3x} = \frac{x-1}{x}$$

$$(g \circ g)(x) = g(g(x)) = g\left(\frac{x^2-1}{3x}\right) =$$
$$= \frac{\left(\dfrac{x^2-1}{3x}\right)^2-1}{3\,\dfrac{x^2-1}{3x}} =$$
$$= \frac{\dfrac{x^4-2x^2+1-9x^2}{9x^2}}{\dfrac{x^2-1}{x}} =$$
$$= \frac{x^4-11x^2+1}{9x\,(x^2-1)} = \frac{x^4-11x^2+1}{9x^3-9x}$$

$$y = \frac{2x-1}{x+1} \rightarrow xy + y = 2x - 1 \rightarrow$$
$$\rightarrow 2x - xy = y + 1 \rightarrow x\,(2-y) = y + 1$$
$$x = \frac{y+1}{2-y} \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+1}{2-x}$$

***b)*** **Troba el domini de cadascuna de les funcions anteriors.**

$$D_{f+g} = D_{f \cdot g} = D_{f \circ f} =$$
$$= \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0,\ x+1 \neq 0\} = \mathbb{R} - \{0, -1\}$$

$$D_{\frac{f}{g}} = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 1 \neq 0\} = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$$
$$D_{g \circ g} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0,\ x^2 - 1 \neq 0\} =$$
$$= \mathbb{R} - \{0, 1, -1\}$$
$$D_{f^{-1}} = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 - x \neq 0\} = \mathbb{R} - \{2\}$$

***c)*** **Comprova que $f^{-1}$ és la funció inversa de *f*.**

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}\left(\frac{2x-1}{x+1}\right) =$$
$$= \frac{\dfrac{2x-1}{x+1}+1}{2-\dfrac{2x-1}{x+1}} =$$
$$= \frac{\dfrac{2x-1+x+1}{x+1}}{\dfrac{2x+2-2x+1}{x+1}} = \frac{3x}{3} = x$$

$$(f \circ f^{-1})(x) = f\left(\frac{x+1}{2-x}\right) =$$
$$= \frac{2\dfrac{x+1}{2-x}-1}{\dfrac{x+1}{2-x}+1} =$$
$$= \frac{\dfrac{2x+2-2+x}{2-x}}{\dfrac{x+1+2-x}{2-x}} = \frac{3x}{3} = x$$

**23.** **Donada la funció $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$, comprova que $(f \circ f)(x) = x$. Per què creus que passa això? Justifica'n la resposta.**

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f\left(\frac{x}{x-1}\right) =$$
$$= \frac{\dfrac{x}{x-1}}{\dfrac{x}{x-1}-1} = \frac{\dfrac{x}{x-1}}{\dfrac{x-x+1}{x-1}} = x$$

Perquè $f^{-1}(x) = f(x)$, és a dir és la inversa d'ella mateixa.

**24.** **Troba la funció inversa i fes-ne la comprovació en cada cas, per a cadascuna de les funcions següents:**

*a)* $\boldsymbol{f(x) = \dfrac{x-1}{x+2}}$

$$y = \frac{x-1}{x+2} \rightarrow xy + 2y = x - 1 \rightarrow$$

$$\rightarrow x - xy = 1 + 2y \rightarrow x(1-y) = 1 + 2y$$

$$x = \frac{1+2y}{1-y} \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1+2x}{1-x}$$

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}\left(\frac{x-1}{x+2}\right) =$$

$$= \frac{1 + 2\,\dfrac{x-1}{x+2}}{1 - \dfrac{x-1}{x+2}} =$$

$$= \frac{\dfrac{x+2+2x-2}{x+2}}{\dfrac{x+2-x+1}{x+2}} = \frac{3x}{3} = x$$

$$(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = f\left(\frac{1+2x}{1-x}\right) =$$

$$= \frac{\dfrac{1+2x}{1-x} - 1}{\dfrac{1+2x}{1-x} + 2} =$$

$$= \frac{\dfrac{1+2x-1+x}{1-x}}{\dfrac{1+2x+2-2x}{1-x}} = \frac{3x}{3} = x$$

*b)* $\boldsymbol{g(x) = \sqrt{x^2 - 2}}$

$$y = \sqrt{x^2 - 2} \rightarrow y^2 = x^2 - 2 \rightarrow$$

$$\rightarrow x^2 = y^2 + 2 \rightarrow x = \sqrt{y^2 + 2} \rightarrow$$

$$\rightarrow g^{-1}(x) = \sqrt{x^2 + 2}$$

$$(g^{-1} \circ g)(x) = g^{-1}(g(x)) =$$

$$= g^{-1}\left(\sqrt{x^2 - 2}\right) = \sqrt{\left(\sqrt{x^2 - 2}\right)^2 + 2} =$$

$$= \sqrt{x^2 - 2 + 2} = \sqrt{x^2} = x$$

$$(g \circ g^{-1})(x) = g(g^{-1}(x)) =$$

$$= g\left(\sqrt{x^2 + 2}\right) = \sqrt{\left(\sqrt{x^2 + 2}\right)^2 - 2} =$$

$$= \sqrt{x^2 + 2 - 2} = \sqrt{x^2} = x$$

*c)* $\boldsymbol{h(x) = \dfrac{1}{2}x + 3}$

$$y = \frac{1}{2}x + 3 \rightarrow 2y = x + 6 \rightarrow$$

$$\rightarrow x = 2y - 6 \rightarrow h^{-1}(x) = 2x - 6$$

$$(h^{-1} \circ h)(x) = h^{-1}(h(x)) =$$

$$= h^{-1}\left(\frac{1}{2}x + 3\right) = 2\left(\frac{1}{2}x + 3\right) - 6 =$$

$$= x + 6 - 6 = x$$

$$(h \circ h^{-1})(x) = h(h^{-1}(x)) =$$

$$= h(2x - 6) = \frac{1}{2}(2x - 6) + 3 =$$

$$= x - 3 + 3 = x$$