Comencem

- **Donades dues rectes que tenen la mateixa direcció, quants plans hi ha que siguin perpendiculars a les dues rectes a la vegada?**

  Hi ha infinits plans, que són paral·lels.

- **Donats un punt i un pla que no el contingui, quantes rectes hi ha que passin pel punt i siguin perpendiculars al pla?**

  Una única recta.

- **Donats un punt i una recta que no el conté, quants plans hi ha que passin pel punt i continguin la recta?**

  Un únic pla.

Exercicis

1. Determina tres punts de la recta:

r: $(x, y, z) = (4, -2, 5) + \lambda(-3, 1, -2)$

r: $(x,y,z) = (4,-2,5) + 1(-3,1,-2)$

$\lambda = 0 \rightarrow A(4,-2,5)$

$\lambda = 1 \rightarrow B(1,-1,3)$

$\lambda = -1 \rightarrow C(7,-3,7)$

2. Escriu les equacions paramètriques de la recta que passa pel punt $P(3, -2, 4)$ i té la direcció del vector $\vec{u} = (2, -3, 3)$.

$$\begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = -2 - 3\lambda \\ z = 4 + 3\lambda \end{cases}$$

3. Determina l'equació vectorial i les equacions contínues de la recta que passa per l'origen de coordenades i pel punt $P(-1, 4, -2)$.

$$\left.\begin{array}{r} P(-1,4,-2) \rightarrow \vec{v} = \vec{p} = \overrightarrow{OP} = (-1,4,-2) \\ 0(0,0,0) \end{array}\right\}$$

equació vectorial: $(x,y,z) = \lambda(-1,4,-2)\ \forall\lambda\in R$

equacions contínues: $\dfrac{x}{-1} = \dfrac{y}{4} = \dfrac{z}{-2}$

4. Determina la recta que passa pels punts $P(2, 0, -1)$ i $Q(3, 1, 1)$, i comprova que conté el punt $R(5, 3, 5)$.

$$\left.\begin{array}{l} P(2,0,-1) \\ Q(3,1,1) \end{array}\right\} \vec{v} = \overrightarrow{PQ} = (1,1,2)$$

$$\left.\begin{array}{l} P(2,0,-1) \\ \vec{v}(1,1,2) \end{array}\right\} r\colon x - 2 = y = \frac{z+1}{2}$$

$$R(5,3,5) \rightarrow \begin{cases} 5 - 2 = 3 \\ \dfrac{5+1}{2} = 3 \end{cases}$$

5. Escriu l'equació vectorial de cadascuna de les rectes que determinen els eixos de coordenades.

L'eix OX: $(x, y, z) = \lambda\,(1, 0, 0)$, l'eix OY: $(x, y, z) = \mu(0, 1, 0)$, l'eix OZ: $(x, y, z) = \gamma(0, 0, 1)$.

6. Un vector director d'una recta és $\vec{u} = (-2, 3, -1)$. Troba els components d'un altre vector director d'aquesta recta que sigui unitari.

$$|\vec{u}| = \sqrt{4+9+1} = \sqrt{14}$$

$$\vec{v} = \frac{1}{|\vec{u}|}\cdot\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{14}},(-2,3,-1) =$$

$$= \left(-\frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}, -\frac{1}{\sqrt{14}}\right)$$

7. Sigui $\vec{u} = (3, -5, -2)$ un vector director d'una recta. Esbrina el valor que tenen v_1 i v_2 per tal que el vector $\vec{v} = (v_1, v_2, 3)$ també sigui un vector director de la mateixa recta. Escriu el vector $\vec{u}$ com a combinació lineal del vector $\vec{v}$.

$$\vec{u} = \alpha\vec{v} \rightarrow (3,-5,-2) = \alpha(v_1, v_2, 3)$$

$$\begin{cases} \alpha v_1 = 3 \\ \alpha v_2 = -5 \\ 3\alpha = -2 \rightarrow \alpha = -\dfrac{2}{3} \end{cases}$$

$$v_1 = \frac{3}{\alpha} = -\frac{9}{2}$$

$$v_2 = -\frac{5}{\alpha} = \frac{15}{2}$$

8. Determina tres punts del pla següent:

π: $(x, y, z) = (6, -1, 3) + \lambda(2, -4, 5) + \mu(1, 0, -7)$

$(x,y,z) = (6,-1,3) + \lambda(2,-4,5) + \mu(1,0,-7)$

$\lambda = \mu = 0 \rightarrow A(6,-1,3)$

$\lambda = 0,\ \mu = 1 \rightarrow B(7,-1,-4)$

$\lambda = 1,\ \mu = 0 \rightarrow C(8,-5,8)$

9. Determina l'equació general del pla que té el vector $\vec{u} = (2, -2, 5)$ com a vector orientador i que passa pels punts $P(0, -2, 3)$ i $Q(1, 1, 4)$.

$$\left.\begin{matrix} P(0,-2,3) \\ Q(1,1,4) \end{matrix}\right\} \vec{v} = \overrightarrow{PQ} = (1,3,1)$$

$$\left.\begin{matrix} P(0,-2,3) \\ \vec{u} = (2,-2,5) \\ \vec{v} = (1,3,1) \end{matrix}\right\} \rightarrow \begin{vmatrix} x & 2 & 1 \\ y+2 & -2 & 3 \\ z-3 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 17x - 3y - 8z + 18 = 0$$

10. Escriu les diferents equacions del pla que passa pel punt $A(3, -1, 2)$ sabent que els vectors que determinen la seva orientació són $\vec{u} = (2, 5, -3)$ i $\vec{v} = (4, 1, 3)$.

Equació vectorial: $(x, y, z) = (3, -1, 2) + \lambda(2, 5, -3) + \mu(4, 1, 3)$.

Equacions paramètriques:

$$y = \begin{cases} x = 3 + 2\lambda + 4\mu \\ y = -1 - 5\lambda + \mu \\ z = 2 - 3\lambda + 3\mu \end{cases}$$

Equació general: $x - y - z - 2 = 0$

Equació canònica: $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{-2} + \dfrac{z}{-2} = 1$

11. Demostra que el pla que té per equació general $By + Cz + D = 0$ és paral·lel a l'eix OX.

$By + Cz + D = 0 \rightarrow y = -D/B - (C/B)z$

$(x, y, z) = (0, -D/B, 0) + \lambda(1, 0, 0) + \mu(0, -C, B)$, el vector $\vec{e}_1 = (1, 0, 0)$ que determina la direcció de l'eix OX, és un vector orientador del pla, per tant el pla és paral·lel a l'eix OX.

12. Comprova que les equacions vectorials següents:

$(x, y, z) = (1, 2, 3) + \lambda(1, -1, 0) + \mu(-1, 0, 1)$
$(x, y, z) = (0, 0, 6) + \rho(0, -1, 1) + \sigma(2, -1, -1)$
són del mateix pla.

$(x,y,z) = (1,2,3) + \lambda(1,-1,0) + \mu(-1,0,1)$

$$\begin{vmatrix} x-1 & 1 & -1 \\ y-2 & -1 & 0 \\ z-3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow x + y + z - 6 = 0$$

$(x,y,z) = (0,0,6) + \rho(0,-1,1) + \sigma(2,-1,-1)$

$$\begin{vmatrix} x & 0 & 2 \\ y & -1 & -1 \\ z-6 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow x + y + z - 6 = 0$$

Com que dóna la mateixa equacio general, és el mateix pla.

13. Determina un punt i els vectors orientadors del pla que té per equació general:

$x - 3y + 2z - 5 = 0$

$$\left.\begin{matrix} x = 5 + 3y - 2z \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{matrix}\right\} \rightarrow \left.\begin{matrix} x = 5 + 3\lambda - 2\mu \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{matrix}\right\} P(5,0,0);$$

$\vec{u} = (3,1,0), \vec{v} = (-2,0,1)$

14. Emprant l'equació general del pla, comprova que els punts $P(1, 2, -1)$, $Q(3, 1, 2)$, $R(1, -1, 0)$ i $S(0, -2, -1)$ són coplanaris.

$$\left.\begin{matrix} P(1,2,-1) \\ Q(3,1,2) \end{matrix}\right\} \vec{u} = \overrightarrow{PQ} = (2,-1,3)$$

$$\left.\begin{matrix} P(1,2,-1) \\ R(1,-1,0) \end{matrix}\right\} \vec{v} = \overrightarrow{PR} = (0,-3,1)$$

$$\left.\begin{matrix} P(1,2,-1) \\ \vec{u} = (2,-1,3) \\ \vec{v} = (0,-3,1) \end{matrix}\right\} \rightarrow \begin{vmatrix} x-1 & 2 & 0 \\ y-2 & -1 & -3 \\ z+1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 4x - y - 3z - 5 = 0$$

$S(0,-2,-1) \rightarrow 2 + 3 - 5 = 0 \rightarrow$ S és del pla que determinen els punts P, Q i R, per tant els quatre punts són coplanaris.

15. Troba dos vectors associats al pla següent:

$3x - 2y + 2z + 5 = 0$ que siguin unitaris.

$$3x - 2y + 2z + 5 = 0 \rightarrow \vec{n} = (3,-2,2)$$

$$|\vec{n}| = \sqrt{9+4+4} = \sqrt{17}$$

$$\vec{v} = \frac{1}{|\vec{n}|} \cdot \vec{n} = \frac{1}{\sqrt{17}} \cdot (3,-2,2) = \left(\frac{3}{\sqrt{17}}, -\frac{2}{\sqrt{17}}, \frac{2}{\sqrt{17}}\right)$$

$$\vec{u} = -\frac{1}{|\vec{n}|} \cdot \vec{n} = -\frac{1}{\sqrt{17}} \cdot (3,-2,2) = \left(-\frac{3}{\sqrt{17}}, \frac{2}{\sqrt{17}}, -\frac{2}{\sqrt{17}}\right)$$

16. Troba l'equació general del pla que passa pel punt (–3, –2, 1) i és perpendicular a una recta que té la direcció del vector $\vec{u}$ = (0, 3, 1).

$$\vec{n} = \vec{u} = (0,3,1) \rightarrow 3y + z + D = 0$$

$$P(-3,-2,1) \rightarrow -6 + 1 + D = 0 \rightarrow D = 5$$

$$\pi : 3y + z + 5 = 0$$

17. Donat el pla π: 5*x* + 3*y* – 2*z* – 8 = 0 i el punt *P*(3, 4, –2), troba l'equació de la recta que passa per *P* i és perpendicular al pla π.

$$\left.\begin{array}{r} \pi\text{: } 5x + 3y - 2z - 8 = 0 \rightarrow \vec{v} = \vec{n} = (5,3,-2) \\ P(3,4,-2) \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow r\text{: } \frac{x-3}{5} = \frac{y-4}{3} = \frac{z+2}{-2}$$

18. Troba l'equació general i les equacions paramètriques del pla que passa pel punt (0, 0, 3) i és perpendicular a l'eix *OZ*.

$$\text{eix } OZ\text{: } \vec{v} = (0,0,1)$$

$$\vec{n} = \vec{v} = (0,0,1) \rightarrow z + D = 0$$

$$P(0,0,3) \rightarrow 3 + D = 0 \rightarrow D = -3$$

$$\pi\text{: } z - 3 = 0 \quad \text{equació general}$$

$$\left.\begin{array}{l} x = \lambda \\ y = \mu \\ z = 3 \end{array}\right\} \text{equacions paramètriques}$$

19. Donada la recta:

$$\boldsymbol{r}\text{:}\begin{cases} \boldsymbol{x - 3y + 4z = 5} \\ \boldsymbol{3x + 2y - z - 1 = 0} \end{cases}$$

troba un punt i un vector director.

$$r\text{:}\begin{cases} x - 3y + 4z = 5 \\ 3x + 2y - z - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} x - 3y = 5 - 4z \\ 3x + 2y = 1 + z \end{array}\right\} \text{resolent el sistema: } x = \frac{13}{11} - \frac{5}{11}z;\ y = -\frac{14}{11} + \frac{13}{11}z$$

$$\text{d'on s'obté: } P\left(\frac{13}{11}, -\frac{14}{11}, 0\right) \text{ i } \vec{v} = (-5,13,11)$$

20. Escriu les equacions paramètriques i contínues de la recta de l'exercici anterior.

$$\text{Equacions paramètriques: } \begin{cases} x = \dfrac{13}{11} - 5\lambda \\ y = \dfrac{-14}{11} + 13\lambda \\ z = 11\lambda \end{cases}$$

$$\text{Equacions contínues: } \frac{x - \frac{13}{11}}{-5} = \frac{y + \frac{14}{11}}{13} = \frac{z}{11}$$

21. Troba un punt i un vector director de cadascuna de les rectes

$$\boldsymbol{r}\text{:}\begin{cases} \boldsymbol{x - y + 1 = 0} \\ \boldsymbol{z = 4} \end{cases} \qquad \boldsymbol{s\text{: } 2x = y - 1 = 2z}$$

$$r\text{:}\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ z = 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -1 + y \\ z = 4 \end{cases} \text{si } y = \lambda \rightarrow \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 4 \end{cases}$$

$$P(-1,0,4), \vec{u} = (1,1,0)$$

$$s\text{: } 2x = y - 1 = 2z \rightarrow \frac{x}{1/2} = y - 1 = \frac{z}{1/2} \text{ d'on}$$

$$\text{sóbté: } Q(0,1,0),\ \vec{v} = (1,2,1)$$

22. Escriu la recta *r*: (*x*, *y*, *z*) = (–3, –2, 4) + λ(2, 2, –5) com a intersecció de dos plans.

Resposta oberta, per exemple:

$$\text{De } \frac{x+3}{2} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-4}{-5} \text{ tenim:}$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x+3}{2} = \dfrac{y+2}{2} \rightarrow x - y + 1 = 0 \\ \dfrac{x+3}{2} = \dfrac{z-4}{-5} \rightarrow 5x + 2z + 7 = 0 \end{array}\right\}$$

23. Considera les dues equacions següents:

$$\begin{cases} \boldsymbol{kx - y + z = 5} \\ \boldsymbol{-kx + y + 2kz = 2} \end{cases}$$

***a*) Digues per a quins valors de *k* aquestes dues equacions representen una recta.**

Perquè determinin una recta, els dos plans no han de ser paral·lels. Considerant que són paral·les, tenim:

$$\frac{k}{-k} = -1 = \frac{1}{2k} \rightarrow k = -\frac{1}{2}$$

Per tant, si $k \neq -\frac{1}{2}$, els dos plans determinen una resta.

***b*) Per a *k* = –1 és una recta? En cas afirmatiu, escriu-ne les equacions contínues.**

$$k = -1 \neq \frac{1}{2} \rightarrow \text{si és una recta}$$

Substituim per $k = -1$:

$$\begin{cases} -x - y + z = 5 \\ x + y - 2z = 2 \end{cases} \text{ obtenim:}$$

$$\left.\begin{array}{l} x = \lambda \\ y = -12 - \lambda \\ z = -7 \end{array}\right\}$$ no es poden escriure les equacions contínues perquè el 3r component del vector director és zero.

24. Donada la recta:

$$r: \begin{cases} \boldsymbol{x - 2y + z - 1 = 0} \\ \boldsymbol{x - y + 5z + 3 = 0} \end{cases}$$

***a*) Determina'n un punt *Q* i un vector director $\vec{u}$.**

$$\left.\begin{array}{l} x - 2y = 1 - z \\ x - y = -3 - 5z \end{array}\right\} x = -7 - 9z,\ y = -4 - 4z$$

$$\left.\begin{array}{l} x = -7 - 9\lambda \\ y = -4 - 4\lambda \\ z = \lambda \end{array}\right\} Q(-7,-4,0);\ \vec{u} = (-9,-4,1)$$

***b*) Escriu l'equació general del pla que passa pel punt *P*(–4, –2, 3) i té per vectors orientadors $\vec{u}$ i $\overrightarrow{PQ}$.**

$$\left.\begin{array}{l} P(-4,-2,3) \\ Q(-7,-4,0) \end{array}\right\} \vec{v} = \overrightarrow{PQ} = (-3,-2,-3)$$

$$\left.\begin{array}{l} P(-4,-2,3) \\ \vec{u} = (-9,-4,1) \\ \vec{v} = (-3,-2,-3) \end{array}\right\} \rightarrow \begin{vmatrix} x+4 & -9 & -3 \\ y+2 & -4 & -2 \\ z-3 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow$$
$$\rightarrow 7x - 15y + 3z - 11 = 0$$

***c*) Comprova que és el mateix pla que hem obtingut a l'exemple 4.**

Comparant les dues equacions generals, s'observa que efectivament és el mateix pla.

25. A partir de l'expressió del feix de plans, determina l'equació general del pla que passa per l'origen de coordenades i conté la recta següent:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x = -1 + z} \\ \boldsymbol{y = 2 - 3z} \end{cases}$$

$r: \begin{cases} x - z + 1 = 0 \\ y + 3z - 2 = 0 \end{cases}$, escrivim, el feix de plans:

$$\alpha(x - z + 1) + \beta(y + 3z - 2) = 0$$

Imposem que passi per l'origen:

$$O(0,0,0) \rightarrow \alpha - 2\beta = 0 \rightarrow \alpha = 2\beta$$
$$2\beta(x - z + 1) + \beta(y + 3z - 2) = 0$$
$$2(x - z + 1) + y + 3z - 2 = 0$$
$$2x - 2z + 2 + y + 3z - 2 = 0$$
$$\pi: 2x + y + z = 0$$

26. Escriu l'equació del feix de plans que contenen la recta que passa pels punts *P*(5, 7, 4) i *Q*(4, 3, –1). Comprova que el sistema definit per tres plans qualssevol del feix és compatible indeterminat amb un grau de llibertat i que la solució d'aquest sistema és la recta *PQ*.

$$\left.\begin{array}{l} P(5,7,4) \\ Q(4,3,-1) \end{array}\right\} \overrightarrow{PQ} = (-1,-4,-5)$$

$$\left.\begin{array}{r} \vec{v} = -\overrightarrow{PQ} = (1,4,5) \\ P(5,7,4) \end{array}\right\} x - 5 = \frac{y-7}{4} = \frac{z-4}{5}$$

Resposta oberta, per exemple:

$$\left.\begin{array}{l} x - 5 = \dfrac{y-7}{4} \rightarrow 4x - y - 13 = 0 \\ x - 5 = \dfrac{z-4}{5} \rightarrow 5x - z - 21 = 0 \end{array}\right\}$$
$$\alpha(4x - y - 13) + \beta(5x - z - 21) = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha = 1,\ \beta = 0 \rightarrow 4x - y - 13 = 0 \\ \alpha = 0,\ \beta = 1 \rightarrow 5x - z - 21 = 0 \\ \alpha = -1,\ \beta = 1 \rightarrow x + y - z - 8 = 0 \end{array}\right\} \text{és el sistema}$$

Efectivament és un sistema compatible indeterminat amb un grau de llibertat, ja que rang M = rang M' = 2.
La resolució del sistema dóna: $(x,y,z) = (5,7,4) + \lambda(1,4,5)$ que és la recta que passa per P i Q.

Acabem

1. Justifica la certesa o la falsedat de cadascuna de les afirmacions següents:

***a*) Els plans següents: $Ax + By + Cz + D = 0$ i $(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda(A, B, C) + \mu(v_1, v_2, v_3)$ són perpendiculars.**

Veritat. Un dels vectors orientadors del segon pla és el vector associat del primer.

***b*) La recta $(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda(u_1,u_2,u_3)$ i el pla $Ax + By + Cz + D = 0$ són perpendiculars si els vectors $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ i $\vec{v} = (A, B, C)$ són linealment dependents.**

Veritat. Si $\vec{u}$ i $\vec{v}$ són linealment dependents, vol dir que tenen la mateixa direcció, i per tant la recta té la direcció d'un vector perpendicular al pla, aleshores, la recta és perpendicular al pla.

c) **Si $\vec{u}$ és un vector director d'una recta; $\vec{n}$, un vector associat a un pla i $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$, la recta i el pla són perpendiculars.**

Fals. Si $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$, o bé la recta i el pla són paral·lels o el pla conté la recta.

d) **Si $A \cdot B \cdot C \neq 0$ i $A \cdot B \cdot C \cdot D = 0$, el pla: $Ax + By + Cz + D = 0$ talla els eixos de coordenades només a l'origen.**

Veritat. Es dedueix que D = 0, per tant el pla passa pel l'origen.

2. Els punts $P(p_1, p_2, p_3)$, $Q(q_1, q_2, q_3)$ i $R(r_1, r_2, r_3)$ defineixen un pla si no estan alineats. Justifica que la seva equació general es pot expressar així:

$$\begin{vmatrix} x - p_1 & q_1 - p_1 & r_1 - p_1 \\ y - p_2 & q_2 - p_2 & r_2 - p_2 \\ z - p_3 & q_3 - p_3 & r_3 - p_3 \end{vmatrix} = 0$$

Considerem els vectors orientadors:

$\vec{u} = \overrightarrow{PQ} = (q_1 - p_1, q_2 - p_2, q_3 - p_3)$ i

$\vec{v} = \overrightarrow{PR} = (r_1 - p_1, r_2 - p_2, r_3 - p_3)$

Amb el punt $P(p_1, p_2, p_3)$ i el punt $X(x, y, z)$ que és un punt qualsevol del pla, tenim el vector $\overrightarrow{PX} = (x - p_1, x - p_2, x - p_3)$ que és un vector del pla, per tant el vector $\overrightarrow{PX}$ és combinació lineal dels vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$, és a dir, els vectors $\overrightarrow{PX}$, $\vec{u}$ i $\vec{v}$ són linealment dependents, d'on tenim que $D(\overrightarrow{PX}, \vec{u}, \vec{v}) = 0$.

3. Demostra que el pla d'equació $Ax + By = 0$ conté l'eix OZ.

$Ax + By = 0 \rightarrow (x, y, z) = \lambda(-B, A, 0) + \mu(0, 0, 1)$

Per l'equació vectorial tenim que el vector $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$, que és el vector que determina l'eix OZ, és un vector orientador del pla, per tant el pla és paral·lel a l'eix OZ, a més el pla passa per l'origen, ja que D = 0, aleshores el pla passa per l'eix OZ.

4. Escriu l'equació canònica i general del pla que passa pels punts $P(-3, 0, 0)$, $Q(0, 4, 0)$ i $R(0, 0, -5)$. Indica'n dos vectors orientadors.

Equació canònica: $\dfrac{x}{-3} + \dfrac{y}{4} + \dfrac{z}{-5} = 1$

Equació general: $20x - 15y + 12z + 60 = 0$

$\vec{u} = \overrightarrow{PQ} = (3, 4, 0)$ i $\vec{v} = \overrightarrow{PR} = (3, 0, -5)$

5. Donades les equacions:

$$\begin{cases} x = 3 + 3y - 3\mu \\ y = 3\lambda + 2\mu \\ z = -2\mu \end{cases} \quad \forall\, \lambda \text{ i } \mu \in \mathbb{R}$$

a) **Comprova que es tracta d'un pla.**

De les equacions paramètriques es dedueix:

$\vec{u} = (3,3,0)$ i $\vec{v} = (-3,2,-2)$ que són dos rectes linealment independents, per tant determinem un pla.

b) **Troba'n els punts de tall amb els eixos de coordenades.**

$P(3,0,0)$ de les equacions paramètriques, és el punt on talla l'eix OX.

$$\begin{vmatrix} x-3 & 1 & -3 \\ y & 1 & 2 \\ z & 0 & -2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 2x - 2y - 5z - 6 = 0$$

Per trobar els altres dos punts:

$x = z = 0 \rightarrow y = -3 \rightarrow Q(0,-3,0)$ talla l'eix OY

$x = y = 0 \rightarrow z = -6/5 \rightarrow R\left(0,0,-\dfrac{6}{5}\right)$ talla l'eix OZ

6. Donats els punts $P(1, 2, 3)$, $Q(1, 1, 1)$ i $R(2, 0, 4)$, busca les equacions paramètriques de la recta que passa pel punt P i és perpendicular al pla que passa pels tres punts.

$$\left.\begin{matrix} P(1,2,3) \\ Q(1,1,1) \end{matrix}\right\} \vec{u} = \overrightarrow{PQ} = (0,-1,-2)$$

$$\left.\begin{matrix} P(1,2,3) \\ Q(2,0,4) \end{matrix}\right\} \vec{v} = \overrightarrow{PR} = (1,-2,1)$$

$$\left.\begin{matrix} P(1,2,3) \\ \vec{u} = (0,-1,-2) \\ \vec{v} = (1,-2,1) \end{matrix}\right\} \rightarrow \begin{vmatrix} x-1 & 0 & 1 \\ y-2 & -1 & -2 \\ z-3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow$$

$\rightarrow 5x + 2y - z - 6 = 0$

$$\left.\begin{matrix} \vec{w} = \vec{n} = (5,2,-1) \\ P(1,2,3) \end{matrix}\right\} \rightarrow \begin{cases} x = 1 + 5\lambda \\ y = 2 + 2\lambda \\ z = 3 - \lambda \end{cases}$$

7. Indica les condicions que han de complir en cada cas els coeficients *A*, *B*, *C* i *D* de l'equació general del pla, de manera que aquest:

***a*) Sigui paral·lel al pla determinat per *OX* i *OZ*.**

Pla paral·lel a l'eix $OX \rightarrow A = 0$
Pla paral·lel a l'eix $OZ \rightarrow C = 0$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Pla paral·lel}\\ \text{a l'eix } OX \rightarrow A=0\\ \text{Pla paral·lel}\\ \text{a l'eix } OZ \rightarrow C=0\end{array}\right\}\begin{array}{c}\text{Pla paral·lel a l'eix}\\ OX \text{ i } OZ\text{:}\\ A=C=0\end{array}$$

***b*) Talli els tres semieixos de coordenades positius en punts equidistants de l'origen.**

Punt de tall amb l'eix OX: $y = z = 0 \rightarrow$

$$x = \pm\frac{D}{A}$$

Punt de tall amb l'eix OY: $x = z = 0 \rightarrow$

$$y = \pm\frac{D}{B}$$

Punt de tall amb l'eix OZ: $x = y = 0 \rightarrow$

$$z = \pm\frac{D}{C}$$

Per tant:

$$\pm\frac{D}{A} = \pm\frac{D}{B} = \pm\frac{D}{C} \rightarrow \left|\frac{D}{A}\right| = \left|\frac{D}{B}\right| = \left|\frac{D}{C}\right|$$

8. Troba l'equació general del pla que passa pel punt *P*(–4, –2, 3) i conté la recta d'equació:

$$\mathbf{(x, y, z) = (1, -2, -2) + \lambda(2, 1, 2)}$$

$$P(-4,-2,3)$$

$(x,y,z) = (1,-2,-2) + \lambda(2,1,2) \rightarrow Q(1,-2,-2)$, $\vec{u} =$
$= (2,1,2)$

$$\overrightarrow{PQ} = (5,0,-5) \rightarrow \vec{v} = (1,0,-1)$$

$$\left.\begin{array}{l}P(-4,-2,3)\\ \vec{u}=(2,1,2)\\ \vec{v}=(1,0,-1)\end{array}\right\} \rightarrow \begin{vmatrix} x+4 & 2 & 1\\ y+2 & 1 & 0\\ z-3 & 2 & -1\end{vmatrix} = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow x - 4y + z - 7 = 0$$

9. Determina els valors de *a* que fan que els dos plans d'equacions:

$$\mathbf{ax + y + z - 3 = 0 \text{ i } (a + 2)x + ay + az = 5}$$

siguin paral·lels.

$$\left.\begin{array}{l}ax+y+z-3=0\\ (a+2)x+ay+az-5=0\end{array}\right\}$$

perquè siguin paral·leles: $\dfrac{a}{a+2} = \dfrac{1}{a}$

d'on $a^2 = a + 2 \rightarrow a^2 - a - 2 = 0 \rightarrow a_1 = 2$,
$a_2 = -1$

10. Troba l'equació canònica del pla que passa pel punt (–3, 1, 4) i és perpendicular als plans:

$$\mathbf{2x - 5y + 3z + 5 = 0 \text{ i } 7x - y + 3z = 21}$$

$$\left.\begin{array}{l}2x-5y+3z+5=0 \rightarrow \vec{u}=\vec{n}_1=(2,-5,3)\\ 7x-y+3z-21=0 \rightarrow \vec{v}=\vec{n}_2=(7,-1,3)\end{array}\right\} \text{són}$$

els vectors orientadors.

$$\left.\begin{array}{l}P(-3,1,4)\\ \vec{u}=(2,-5,3)\\ \vec{v}=(7,-1,3)\end{array}\right\} \rightarrow \begin{vmatrix} x+3 & 2 & 7\\ y-1 & -5 & -1\\ z-4 & 3 & 3\end{vmatrix} = 0 \rightarrow 4x - 5y -$$

$$-11z + 61 = 0$$

$$\left.\begin{array}{l}y=z=0 \rightarrow x=-\dfrac{61}{4}\\ x=z=0 \rightarrow y=\dfrac{61}{5}\\ x=y=0 \rightarrow z=\dfrac{61}{11}\end{array}\right\} \frac{x}{-61/4} + \frac{y}{61/5} + \frac{z}{61/11} = 1$$

11. Escriu les equacions contínues de la recta que passa pel punt *P*(2, –3, 5) i té la mateixa direcció que la recta $\begin{cases}\mathbf{x - y + 2z + 4 = 0}\\ \mathbf{2x + 3y + 6z = 12}\end{cases}$

ho escrivim en forma de sistema:

$$\left.\begin{array}{l}x-y=-4-2z\\ 2x+3y=12-6z\end{array}\right\} \text{resolent, s'obté: } x=-\frac{12}{5}z,$$

$$y = 4 - \frac{2}{5}z$$

Podem prendre com a vector director de la recta: $\vec{u} = (-12,-2,5)$

$$\left.\begin{array}{l}P(2,-3,5)\\ \vec{u}=(-12,-2,5)\end{array}\right\} \rightarrow \frac{x-2}{-12} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z-5}{5}$$

12. Troba l'equació general del pla que conté la recta:

$$\begin{cases}\mathbf{2x + y - 3z = 6}\\ \mathbf{x - 2y + z = 0}\end{cases}$$

considerant que un dels vectors que deter-

mina l'orientació del pla és un vector director de la recta:

$$\boldsymbol{x = \frac{2y}{-3} = 2(z+1)}$$

$$\left.\begin{array}{l} 2x+y-3z=6 \\ x-2y+z=0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x+y=6+3z \\ x-2y=-z \end{array}\right\} (x,y,z)=$$

$$=\left(\frac{12}{5},\frac{6}{5},0\right)+\lambda(1,1,1)$$

$$x=\frac{2y}{-3}=2(z+1) \rightarrow x=\frac{y}{-3/2}=\frac{z+1}{1/2} \rightarrow \vec{v}=$$

$$=(2,-3,1)$$

$$\left.\begin{array}{l} P\left(\frac{12}{5},\frac{6}{5},0\right) \\ \vec{u}=(1,1,1) \\ \vec{v}=(2,-3,1) \end{array}\right\} \rightarrow \begin{vmatrix} x-\frac{12}{5} & 1 & 2 \\ y-\frac{6}{5} & 1 & -3 \\ z & 1 & 1 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{array}{c} 20x+5y- \\ -25z-54=0 \end{array}$$

13. Donats el pla π: $x + y - 2z + 1 = 0$ i la recta:

$$\boldsymbol{r: \begin{cases} 4x+3y+2z-4=0 \\ 2x-y-4z-12=0 \end{cases}}$$

escriu l'equació vectorial del pla que és perpendicular al pla π i conté la recta *r*.

$$\pi\text{: } x+y-2z+1=0 \rightarrow \vec{u}=\vec{n}=(1,1,-2)$$

r: $\begin{cases} 4x+3y+2z-4=0 \\ 2x-y-4z-12=0 \end{cases}$ escrivim el sistema i el resolem:

$$\left.\begin{array}{l} 4x+3y=4-2z \\ 2x-y=12+4z \end{array}\right\} (x,y,z)=(4,-4,0)+\lambda(1,-2,1)$$

$$\left.\begin{array}{l} P(4,-4,0) \\ \vec{u}=(1,1,-2) \\ \vec{v}=(1,-2,1) \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{c} (x,y,z)=(4,-4,0)+\lambda(1,1,-2)+ \\ +\mu(1,-2,1) \end{array}$$

14. Considera la recta *r* que passa pel punt de coordenades (1, 1, 2) i té el vector de components (1, 1, 1) com a vector director. Considera el vector $\vec{v}$ de components (1, 1, *a*) i digues si per a algun valor de *a* existeix un pla que conté *r* i és perpendicular a $\vec{v}$. En cas afirmatiu, escriu l'equació cartesiana del pla.

$$r\text{: } (x,y,z) = (1,1,2) + \lambda(1,1,1)$$

$\left.\begin{array}{l} \vec{v}=(1,1,a) \\ \vec{u}=(1,1,1) \end{array}\right\}$ han de ser ortogonals, per tant

$$\vec{v}\cdot\vec{u}=0$$

$$\vec{v}\cdot\vec{u}=(1,1,a)\cdot(1,1,1)=1+1+a=2+a$$

$$\vec{v}\cdot\vec{u}=0 \rightarrow 2+a=0 \rightarrow a=-2$$

Per tant, tenim:

$$\vec{n}=\vec{v}=(1,1,-2) \rightarrow x+y-2z+D=0$$

$$P(1,2,2) \rightarrow 1 + 1 - 4 + D = 0 \rightarrow D = 2$$

$$x + y - 2z + 2 = 0 \rightarrow x + y - 2z = -2$$