Comencem

- **Dóna la interpretació geomètrica de les solucions dels sistemes següents:**

a) $\begin{cases} 3x + 2y - z = 1 \\ x - y + 5z = -2 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$

Resolem el sistema: rang M = rang M' = 3 i el sistema és compatible determinat i la solució (12, –21, –7) correspon a les coordinades d'un punt. Els tres plans son concorrents en un punt.

b) $\begin{cases} 4x - y + 2z = 3 \\ 5x + 3z = 1 \\ -3x + 2y - z = -5 \end{cases}$

Rang M = rang M' = 2 i el sistema és compatible indeterminat. Els tres plans tenen una recta en comú l'equació de la qual es pot donar amb el sistema format per les equacions de dos dels tres plans.

Exercicis

1. **Dos plans o són paral·lels o són secants. Considera els plans d'equacions:**

$$\pi_1: \quad 2x + 3y + z = 0$$
$$\pi_2: \quad -x + ky - 4z = 2$$

Raona si poden ser paral·lels per a algun valor de *k*.

Condició de paral·lelisme: $\frac{2}{-1} = \frac{3}{k} = \frac{1}{-4}$ que no es verifica ja que $\frac{2}{1} \neq \frac{1}{-4}$ independement del valor de k: els dos plans no poden ser paral·lels per cap valor de k.

2. **Determina *m* i *n* per tal que els dos plans siguin paral·lels.**

$$\pi_1: \quad 6x - my + 4z = -9$$
$$\pi_2: \quad 9x - 3y + nz = n$$

Condició de paral·lelisme:

$\frac{6}{9} = \frac{-m}{-3} = \frac{4}{n} \neq \frac{-9}{n} \rightarrow m = 2 \text{ i } n = 6$.

Per aquests valors els dos plans són paral·lels no coincidents.

3. **Estudia la posició relativa dels tres plans:**

$$\pi_1: \quad -2x + y + z = 1$$
$$\pi_2: \quad x - 2y + z = 1$$
$$\pi_3: \quad x + y - 2z = 1$$

Estudiem els rangs: rang M = 2 i rang M' = 3. El sistema és incompatible, però els plans no són paral·lels, per tant, són secants dos a dos.

4. **Considera els plans d'equacions: $x + y - 2z + 1 = 0$ i $-x - y + 3z = 0$. Justifica que són secants. Escriu l'equació d'un tercer pla que passi per la recta que determinen aquests dos. És únic aquest pla? Raona la teva resposta.**

Els dos plans no són paral·lels ja que $\frac{1}{-1} = \frac{1}{-1} \neq \frac{-2}{3}$, per tant, són secants. La recta intersecció és:

$$r: \begin{cases} x + y - 2z = -1 \\ -x - y + 3z = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} x = \lambda \\ y = -3 - \lambda \\ z = -1 \end{matrix}$$

Qualsevol combinació lineal de les dues equacions és un pla que conté aquesta recta, per tant, aquest pla no és únic.

5. **Troba la intersecció de la recta determinada pels punts *P*(1, 2, 1) i *Q*(1, 6, 0) i el pla d'equació:**

$$x - y + 3z = 2$$

Equació de la recta PQ: $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + 4\lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases}$

Intersecció: $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + 4\lambda \\ z = 1 - \lambda \\ x - y + 3z = 2 \end{cases} \rightarrow$ Punt: (1, 2, 1)

6. **Estudia la posició relativa de la recta:**

$r: \begin{cases} x = 3\lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 5 \end{cases}$ **i el pla d'equació $x - 3y + z = 0$.**

Intersecció:

$$\begin{cases} x = 3\lambda \\ y = 1+\lambda \\ z = 5 \\ x - 3y + z = 0 \end{cases} \rightarrow 3\lambda - 3 - 3\lambda + 5 = 0$$

$0 \neq -2$ indica que el sistema és incompatible.

La recta i el pla són paral·lels.

7. **Determina quina és la posició relativa del pla d'equació 3*x* – 2*y* + *z* = 3 i la recta d'equació:**

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y}{2} = z + 3$$

Recta en paramètriques: $\begin{cases} x = 1+3\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = -3+\lambda \end{cases}$

Intersecció amb el pla: per substitució:

$$3(1+3\lambda) - 2\cdot 2\lambda + (-3+\lambda) = 3 \rightarrow \lambda = 1/2$$

Són secants i el punt d'intersecció: $\left(\frac{5}{2}, 1, -\frac{5}{2}\right)$

8. **Considera la recta *r*: $\begin{cases} x + z = 3 \\ 3x + 2y - 1 = 0 \end{cases}$ i estudia la posició relativa respecte del pla d'equació:**

2*x* + 8*y* – 5*z* + 26 = 0

Podem considerar el sistema format per les tres equacions:

$$\begin{cases} x + z = 3 \\ 3x + 2y - 1 = 0 \\ 2x + 8y - 5z + 26 = 0 \end{cases} \qquad \text{rang } M = \text{rang } M' = 3$$

El sistema és compatible determinat: la recta i el pla són secants.

9. **Comprova que les rectes *r* i *s* són secants i escriu l'equació general del pla que les conté.**

$$r: \begin{cases} x = -7 + 4\lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 2 \end{cases} \qquad s: \frac{x+3}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z-2}{2}$$

Les rectes no són paral·leles:

$$(4,-1,0) \neq \lambda(2,-3,2)$$

Considerem aquests dos vectors i un tercer $\overrightarrow{PQ}$ format amb un punt de cada recta: $\overrightarrow{PQ}$ = (4, –1, 0) que és el mateix que el vector director de la primera recta, per tant els tres vectors estan en un mateix pla i són secants.

L'equació del pla:

$$\begin{vmatrix} x+7 & 4 & 2 \\ y-1 & -1 & -3 \\ z-2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow x + 4y + 5z - 7 = 0$$

10. **Determina la posició relativa de les rectes *r* i *s* en cada cas:**

a) $r: \begin{cases} x - z + 1 = 0 \\ y + 3z = 2 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x - 5z = 4 \\ y - 4z + 3 = 0 \end{cases}$

$$r: \begin{cases} x = -1+\lambda \\ y = 2 - 3\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = 4 + 5\mu \\ y = -3 + 4\mu \\ z = \mu \end{cases}$$

No són paral·leles: (1, –3, 1) $\neq k$ (5, 4, 1)

$$\overrightarrow{PQ} = (5,-5,0)$$

$$\text{Det}\left(\vec{u},\vec{v},\overrightarrow{PQ}\right) = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 5 \\ -3 & 4 & -5 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow \text{ les rectes}$$

s'encreuen.

b) $r: \begin{cases} 2x + z = 9 \\ y = 1 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x + y = 0 \\ -x + 2y + 2z = 5 \end{cases}$

$$r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 \\ z = 9 - 2\lambda \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = \mu \\ y = \mu \\ z = \frac{5}{2} + \frac{3\lambda}{2} \end{cases}$$

$$\text{vector } \overrightarrow{PQ} = \left(0, -1, \frac{-13}{2}\right)$$

$$\text{Det}\left(\vec{u},\vec{v},\overrightarrow{PQ}\right) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ -2 & \frac{-3}{2} & \frac{-13}{2} \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow \text{ les}$$

rectes s'encreuen.

11. **Troba la posició relativa de les rectes *r*, determinada pels punts *P*(1, –1, 0) i *Q*(–2, 3, 1), i *s*, paral·lela a l'eix *OX* i que passa pel punt *R*(0, 1, –3).**

Vector director de la recta *r*: $\vec{u}$ = (–3, 4, 1); vector director de la recta *s*: $\vec{v}$ = (1, 0, 0). No són paral·leles. Vector $\overrightarrow{PR}$ = (–1, 2, –3)

$$\det\left(\vec{u},\vec{v},\overrightarrow{PR}\right)=\begin{vmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix}\neq 0 \rightarrow r \text{ i } s \text{ s'en-}$$

creuen.

12. Escriu l'equació del pla que determinen les rectes

$$r: \begin{cases} x = 3\lambda \\ y = -\dfrac{5}{2}+\lambda \\ z = 1-\dfrac{1}{2}\lambda \end{cases}$$

i la que té de direcció el vector $\vec{u}$ = (6, 2, –1) i passa per l'origen de coordenades.

Vector director de r:

$$\vec{v} = \left(3, 1, \frac{-1}{2}\right) \rightarrow 2\left(3, 1, \frac{-1}{2}\right) = (6, 2, -1) = \vec{u}.$$

Les rectes són paral·leles. Els dos vectors no poden ser orientadors del pla. En prenem un, el $\vec{u}$ i el format per un punt de cada recta: $\left(0, \frac{-5}{2}, 1\right)$.

Equació del pla:

$$\begin{vmatrix} x & 6 & 0 \\ y & 2 & \frac{-5}{2} \\ z & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow x + 12y - 30z = 0$$

13. Verifica que les rectes *r* i *s* són coplanàries. Són paral·leles? Si no és així, troba el punt d'intersecció.

$$r: \begin{cases} x = 1 \\ y = 2+\lambda \\ z = 1+\lambda \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = 2+\mu \\ y = 1 \\ z = 1+\mu \end{cases}$$

Vector director de r: $\vec{v}$ = (0, 1, 1), vector director de s: $\vec{u}$ = (1, 0, 1). $\vec{v} \neq k\vec{u}$ i les rectes no són paral·leles.

$$\text{Intersecció} \quad \left.\begin{aligned} 1 &= 2+\mu \\ 2+\lambda &= 1 \\ 1+\lambda &= 1+\mu \end{aligned}\right\} \lambda = \mu = -1 \rightarrow$$

→ Punt: (1, 1, 0)

14. Considera els vectors $\vec{u}$, $\vec{v}$ i $\overrightarrow{PR}$ de l'exercici 11 i estableix la relació que puguis trobar entre ells.

Els tres vectors ja han estat considerats en l'exercici 11. Els tres vectors són linealment independents.

15. Comprova que els tres plans que conformen els tres eixos de coordenades cartesianes són perpendiculars dos a dos.

Els tres plans tenen de vectors associats respectivament els tres eixos de coordenades: $\vec{e}_1$ = (1, 0, 0); $\vec{e}_2$ = (0, 1, 0) i $\vec{e}_3$ = (0, 0, 1)

Dos a dos són perpendiculars tal com es comprova amb el producte escalar: $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = 0$; $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3 = 0$ i $\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 = 0$

16. Troba *k* per tal que les dues rectes *r* i *s* siguin perpendiculars. Hi ha algun valor de *k* per tal que aquestes rectes siguin secants?

$$r: \begin{cases} x = 1-\lambda \\ y = 3\lambda \\ z = -1+\lambda \end{cases} \qquad s: x = \frac{y+3}{-1} = \frac{z-1}{k}$$

Condició de perpendicularitat: producte escalar dels dos vectors directors nul:

(–1, 3, 1) · (1, –1, k) = –1 – 3 + k = 0 → k = 4

Condició de secants:

$$\left.\begin{aligned} 1-\lambda &= \mu \\ 3\lambda &= -3-\mu \\ -1+\lambda &= 1+k\mu \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\lambda = -2 \\ &\mu = -3 \\ &-1-2 = 1-3k \rightarrow k = \frac{-4}{3} \end{aligned}$$

17. Considera el pla π d'equacions paramètriques:

$$\pi: \begin{cases} x = 3-\lambda \\ y = \lambda-\mu \\ z = 2\mu \end{cases}$$

Troba l'equació de la recta perpendicular a π que passa per l'origen de coordenades.

El vector associat al pla és el vector director de la recta perpendicular al pla.
Equació del pla:

$$\begin{vmatrix} x-3 & -1 & 0 \\ y & 1 & -1 \\ z & 0 & -2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow -2x-2y+z+6=0$$

$$\vec{n} = \vec{v} = (-2, -2, 1)$$

$$\text{Equació de la recta: } \begin{cases} x = -2\lambda \\ y = -2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

18. Troba l'equació del pla mitjaner del segment determinat pels punts *P*(1, 3, 0) i *Q*(–1, 5, –2).

Per pla mitjaner s'entén el perpendicular al segment pel seu punt mitjà.

Punt mitjà: (0, 4, –1); vector $\overrightarrow{PQ} = (-2, 2, -2) = \vec{n}$
Equació del pla: $-2x + 2y - 2z + D = 0$ conté el punt (0, 4, –1): $8 + 2 + D = 0 \rightarrow D = -10 \rightarrow$
$\rightarrow -2x + 2y - 2z - 10 = 0 \rightarrow -x + y - z - 5 = 0$

19. Troba el peu de la perpendicular traçada pel punt *P* (1, –1, 0) al pla d'equació:

$$\boldsymbol{x - y + 3z = -2}$$

El peu de la perpendicular és la intersecció de la recta i el pla: *P'*

recta: $\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -1 - \lambda \\ z = 3\lambda \end{cases}$

Punt: $1 + \lambda + 1 + \lambda + 9\lambda = -2 \rightarrow \lambda = \dfrac{-4}{11}$

$P': \left(\dfrac{7}{11}, \dfrac{-7}{11}, \dfrac{-12}{11}\right)$

20. Troba la projecció ortogonal de l'origen de coordenades sobre la recta d'equacions:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x - y = 1} \\ \boldsymbol{x - z = 2} \end{cases}$$

Pla perpendicular a la recta per l'origen i la seva intersecció amb la recta és la projecció ortogonal.

recta: $\begin{cases} x = \lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = -2 + \lambda \end{cases}$

pla: $x + y + z = 0$

Projecció de l'origen:
$\lambda - 1 + \lambda - 2 + \lambda = 0 \rightarrow \lambda = 1$
O': (1, 0, –1)

21. Calcula les coordenades del punt simètric del punt *P*(5, 0, –1), respecte de la recta *r*:

$$\boldsymbol{x - 1 = \frac{y}{2} = \frac{z}{-1}}$$

El punt *P* i el seu simètric *P"* determinen un segment en el que el punt mitjà *P'* és la projecció de *P* sobre *r*.
La projecció és el punt intersecció del pla perpendicular a *r* per *P* i la recta *r*:
$x + 2y - z + D = 0$ per *P*(5, 0, –1) $\rightarrow D = -6 \rightarrow$
$\rightarrow x + 2y - z - 6 = 0$

$\lambda + 1 + 2 \cdot 2\lambda + \lambda - 6 = 0 \rightarrow \lambda = \dfrac{5}{6} \rightarrow P': \left(\dfrac{11}{6}, \dfrac{5}{3}, \dfrac{-5}{6}\right)$

el simètric *P"*: $\left(\dfrac{-4}{3}, \dfrac{10}{3}, \dfrac{-2}{3}\right)$

22. Donada la recta *r*: $x - 1 = \dfrac{2 - y}{2} = \dfrac{z}{-2}$ i el pla π: *x* – 2*y* + *z* + 3 = 0, troba les equacions de la recta *r'* projecció ortogonal de la recta *r* sobre π.

La recta *r'* és la intersecció del pla π amb el pla perpendicular a ell que conté la recta *r*. Equació d'aquest pla:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 1 \\ y-2 & -2 & -2 \\ z & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 2x + y - 4 = 0$$

$r': \begin{cases} 2x + y - 4 = 0 \\ x - 2y + z + 3 = 0 \end{cases}$

23. Troba l'equació del pla que passa pel punt intersecció dels plans:

$\boldsymbol{\pi_1}$: ***x* + *y* – 2*z* –5 = 0**
$\boldsymbol{\pi_2}$: **2*x* – 3*z* + 1 = 0**
$\boldsymbol{\pi_3}$: ***x* + 2*y* – *z* = –1**

i és paral·lel al pla *x* + *y* + *z* – 2 = 0.

Resoldre el sistema per trobar el punt:

$$\left.\begin{array}{r} x + y - 2z = 5 \\ 2x - 3z = -1 \\ x + 2y - z = -1 \end{array}\right\} P\left(-12, \frac{5}{3}, \frac{-23}{3}\right)$$

Pla paral·lel:

$x + y + z + D = 0 \rightarrow -12 + \dfrac{5}{3} - \dfrac{23}{3} + D = 0$

$D = 18 \rightarrow x + y + z + 18 = 0$

24. Esbrina la posició relativa dels plans:

$$\boldsymbol{2x + y - z + 2 = 0}$$

$$\textbf{i } \boldsymbol{x - 3y - z = -1}$$

Si es tallen, troba l'equació de la recta paral·lela a la seva intersecció, que passa pel punt *P*(2, –1, 1).

Els plans no són paral·lels, són secants:

$$r: \left.\begin{cases} 2x + y - z + 2 = 0 \\ x - 3y - z = -1 \end{cases}\right\} \begin{array}{l} x = -1 - 4\lambda \\ y = \lambda \\ z = -7\lambda \end{array}$$

$\rightarrow \vec{v} = (-4, 1, -7)$

Recta paral·lela per *P*(2, –1, 1) → (*x*, *y*, *z*) =
= (2, –1, 1) + λ (–4, 1, –7)

25. Considera el pla $x + y + z = 3$ i la recta,

$$\begin{cases} x - y - 2z = 6 \\ -x + 5y + 8z = 1 \end{cases}$$

Digues si la recta talla el pla en un punt, si està continguda en el pla, o bé si la recta i el pla són paral·lels.

La recta en paramètriques:

$$r: \begin{cases} x = \dfrac{31 + 2\lambda}{4} \\ y = \dfrac{7 - 6\lambda}{4} \\ z = \lambda \end{cases}$$

vector director: $\vec{v} = \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{-3}{2}, 1\right)$

vector associat al pla: $\vec{u}$ = (1, 1, 1)

$\vec{v} \cdot \vec{n} = 0 \rightarrow$ la recta i el pla són paral·lels.

26. Determina l'equació de la recta que passa pel punt *P*(1, 2, 0), és paral·lela al pla d'equació $3x - y + z = 2$ i talla la recta:

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x - y + 2z = -2 \end{cases}$$

El vector director $\vec{v}$ de la recta està determinat per *P* i un punt arbitrari de la recta donada:

$$r: \left.\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x - y + 2z = -2 \end{cases}\right\} \left.\begin{matrix} x = \lambda \\ y = -2 - 4\lambda \\ z = -2 - 3\lambda \end{matrix}\right\}$$

$$\vec{v} = (\lambda - 1, -4 - 4\lambda, -2 - 3\lambda)$$

La condició de paral·lelisme amb el pla és:

$$\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$$

$$(3, -1, 1) \cdot (\lambda - 1, -4 - 4\lambda, -2 - 3\lambda) = 0 \rightarrow \lambda = \frac{1}{4}$$

$$\vec{v} = \left(\frac{-3}{4}, -5, \frac{-11}{4}\right)$$

Equació de la recta:

$$(x, y, z) = (1, 2, 0) + \left(\frac{-3}{4}, -5, \frac{-11}{4}\right)\lambda$$

27. Determina quina és l'equació del pla que conté la recta $\dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y-2}{2} = z$ és paral·lel al vector d'extrems *P*(4, 0, 1) i *Q*(0, 2, –1) i passa per *P*.

Els vector orientadors del pla son el vector director de la recta: $\vec{v}$ = (3, 2, 1) i el $\overrightarrow{PQ}$ = (–4, 2, –2) i passa per *P*.

Equació del pla:

$$\begin{vmatrix} x - 4 & -4 & 3 \\ y & 2 & 2 \\ z - 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 3x - y - 7z - 5 = 0$$

28. Considera les rectes:

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ \sqrt{2}x - z = 0 \end{cases}$$

$$(x, y, z) = (\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 2) + \lambda(1, a, 1)$$

on *a* és un nombre real. Comprova que les dues rectes es tallen per a qualsevol valor de *a*. Troba *a*, si és possible, per tal que les dues rectes siguin perpendiculars.

Trobem la intersecció de les dues rectes:

$$\left.\begin{cases} x + y = 0 \\ \sqrt{2}x - z = 0 \end{cases}\right\} \begin{matrix} x = \mu \\ y = -\mu \\ z = \sqrt{2}\mu \end{matrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} \mu = \sqrt{2} + \lambda \\ -\mu = -\sqrt{2} + a\lambda \\ \sqrt{2}\mu = 2 + \lambda \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} \mu = \sqrt{2} \\ \lambda = 0 \end{matrix}$$

La solució del sistema indica que les rectes es tallen per a qualsevol valor de *a*.
Les rectes seran perpendiculars si:

$$(1, -1, \sqrt{2}) \cdot (1, a, 1) = 0$$

$$a = 1 + \sqrt{2}$$

Acabem

1. Determina l'equació del pla que passa per *P*(1, 2, 1) i conté la recta intersecció dels plans:

π: $x - 2y + z = 3$ i el pla *YZ*

Recta intersecció:

$$\left.\begin{cases} x - 2y + z = 3 \\ x = 0 \end{cases}\right\} \begin{matrix} x = 0 \\ y = \lambda \\ z = 3 + 2\lambda \end{matrix} \rightarrow \vec{v} = (0, 1, 2)$$

P(1, 2, 1) i el punt de la recta (0, 0, 3) donen: $\vec{u}$ = (1, 2, –2)

Equació del pla amb $\vec{v}$, $\vec{u}$ i *P*:

$$\begin{vmatrix} x - 1 & 0 & 1 \\ y - 2 & 1 & 2 \\ z - 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 6x - 2y + z - 3 = 0$$

2. Estudia la posició relativa de la recta:

$$r: \frac{x+2}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z-3}{2}$$

i el pla π: $3x + 2y - z = -3$.

Recta en paramètriques: $\begin{cases} x = -2 + 3\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 3 + 2\lambda \end{cases}$

Substituim en l'equació del pla: $3(-2 + 3\lambda) + 2 \cdot 2\lambda - (3 + 2\lambda) = -3$

$\lambda = \frac{6}{11}$. La recta i el pla són secants. El punt d'intersecció és: $P\left(\frac{-4}{11}, \frac{12}{11}, \frac{45}{11}\right)$.

3. Considera les rectes:

$$r: \begin{cases} x = z \\ y = 1 \end{cases} \quad \text{i} \quad r': \frac{x-1}{2} = y - 1 = \frac{z-1}{a}$$

on *a* és una constant. Comprova que aquestes dues rectes són secants per a qualsevol valor de *a* i determina el valor de *a* per tal que siguin perpendiculars.

Al considerar $y = 1$ en la recta r', s'obté $x = 1$ i $z = 1$ per a qualsevol valor de a. Les rectes són secants i es tallen en el punt (1, 1, 1).

Per ser perpendiculars: $(1, 0, 1) \cdot (2, 1, a) = 0 \rightarrow a = -2$

4. Comprova que les rectes:

$$r: x - 1 = y = z - 2 \quad \text{i} \quad s: \begin{cases} x - z = 5 \\ y - z = 2 \end{cases}$$

són paral·leles i escriu l'equació del pla que les conté.

Vector director de r: $\vec{v} = (1, 1, 1)$. Vector director de la recta s: $\vec{u} = (1, 1, 1)$. Per tant, són paral·leles.

Per l'equació del pla cal un vector determinat per un punt de cada recta: $P(1, 0, 2)$ i $P'(5, 2, 0)$ $\rightarrow \overrightarrow{PP'} = (4, 2, -2)$

Equació del pla:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 4 \\ y & 1 & 2 \\ z-2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow -2x + 3y - z + 4 = 0$$

5. Escriu l'equació de la recta que passa per l'origen de coordenades i és paral·lela a la recta:

$$\begin{cases} 3x - 2y + 3z = 5 \\ 4x - y + z = 7 \end{cases}$$

Cal trobar l'expressió de la recta en paramètriques tot resolent el sistema:

$$\begin{cases} 3x - 2y + 3z = 5 \\ 4x - y + z = 7 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x - 2y + 3z = 5 \\ -5x + z = -9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = -16 + 9\lambda \\ z = -9 + 5\lambda \end{cases} \rightarrow \text{ vector director: } \vec{v} = (1, 9, 5)$$

Recta paral·lela per l'origen: $(x, y, z) = \lambda(1, 9, 5)$

6. Sigui *r* la recta d'equacions:

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x + y - 2z = 0 \end{cases}$$

troba l'equació cartesiana del pla que conté la recta *r* i és perpendicular al pla $y = 0$.

Un dels vectors orientadors del pla és el vector associat del pla perpendicular: $\vec{n} = (0, 1, 0)$. L'altre vector i el punt els trobem en la recta r.

$$r: \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x + y - 2z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{cases} \quad \vec{v} = (1, 0, 1)$$

Equació del pla: $\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ y & 0 & 1 \\ z & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow -x + z = 0$

7. Troba les equacions de la recta que passa pel punt $P(-1, 0, 0)$ i és paral·lela als plans:

$$\pi_1: 2x - y - z + 1 = 0 \quad \text{i} \quad \pi_2: x + 3y + z = 5$$

La recta és paral·lela a la intersecció dels dos plans:

$$\begin{cases} 2x - y - z + 1 = 0 \\ x + 3y + z = 5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \lambda \\ y = 2 - \frac{3}{2}\lambda \\ z = -1 + \frac{7}{2}\lambda \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \vec{v} = \left(1, -\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right)$$

Equació de la recta paral·lela:

$$(x, y, z) = (-1, 0, 0) + \left(1, \frac{-3}{2}, \frac{7}{2}\right)\lambda$$

8. Considera l'equació:

$$(x + y + z)^2 + (3x - y + 2z - 1)^2 = 0$$

Raona i dóna una interpretació geomètrica dels punts *P*(*x*, *y*, *z*) que verifiquen aquesta equació. No cal desenvolupar els quadrats.

L'equació consta d'una suma de dos quadrats que és 0. Només pot ser aquest valor si es verifica.

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ 3x-y+2z-1=0 \end{cases}$$

el que equival a la intersecció de dos plans no paral·lels, per tant, els punts $P(x, y, z)$ són de la recta intersecció.

9. Calcula els valors de *m* i *n* per tal que el pla:

$$\pi\text{: } nx + my - z - 2 = 0$$

contingui la recta:

$$r\text{:}\begin{cases} 2x-y-3=0 \\ x+z=4 \end{cases}$$

Es trien dos punts qualssevol de la recta, per exemple: $P(0, -3, 4)$ i $R(3, 3, 1)$ que han de ser del pla:

$$-3m - 4 - 2 = 0 \rightarrow m = -2$$
$$3n + 3m - 1 - 2 = 0 \rightarrow n = 3$$

10. Troba l'equació de la recta projecció ortogonal de:

$$r\text{:}\begin{cases} x-2y+5z=9 \\ -2x+3y+z+3=0 \end{cases}$$

sobre el pla d'equació:

$$2x + 2y - z + 6 = 0$$

La projecció ortogonal de *r* sobre el pla, és la intersecció d'aquest pla amb el pla que conté la recta i és perpendicular al pla donat.

$$r:\begin{cases} x-2y+5z=9 \\ -2x+3y+z+3=0 \end{cases} \rightarrow r:\begin{cases} x=-21+17\lambda \\ y=-15+11\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$$

Equació del pla:

$$\begin{vmatrix} x+21 & 17 & 2 \\ y+15 & 11 & 2 \\ z & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow -13x+19y+12z+12=0$$

La recta projecció és:

$$r':\begin{cases} 2x+2y-z+6=0 \\ -13x+19y+12z+12=0 \end{cases}$$

11. Escriu l'equació del pla perpendicular a la recta que passa pels punts *P*(2, –1, 3) i *Q*(–3, 1, –2) i que conté el punt mitjà del segment *PQ*.

Vector associat al pla: $\overrightarrow{PQ} = (-5, 2, -5)$

Punt mitjà del segment *PQ*: $\left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$

Equació del pla: $-5x + 2y - 5z + D = 0$

$$-5\left(\frac{-1}{2}\right) + 2\cdot 0 - 5\cdot\frac{1}{2} + D = 0 \rightarrow D = 0$$

$-5x + 2y - 5z = 0$

12. Considera una recta *r* d'equacions:

$$r\text{:}\begin{cases} Ax+By+Cz+D=0 \\ A'x+B'y+C'z+D'=0 \end{cases}$$

i el pla π d'equació

$$A''x + B''y + C''z + D'' = 0$$

Digues què significa geomètricament que el sistema que s'obté considerant les tres equacions sigui incompatible. Digues què significa geomètricament que aquest sistema sigui compatible determinat o indeterminat.

Si el sistema format per les tres equacions és incompatible, la recta i el pla són paral·lels. Si el sistema és compatible determinat, el pla i la recta són secants, tenen un punt en comú. Si el sistema és compatible indeterminat, la recta està continguda en el pla.

13. Determina si la recta $\frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+1}{5}$ i el pla $3x + 2y + 5 = 0$ són paral·lels. Es troba la recta continguda en el pla?

Si la recta és paral·lela al pla, el vector director $\vec{v}$ ha de ser perpendicular al vector $\vec{n}$ associat al pla. Comprovem-ho:
$\vec{v}\cdot\vec{n} = (2, -3, 5)\cdot(3, 2, 0) = 6 - 6 = 0 \rightarrow$ Són paral·lels.
La recta està continguda en el pla si, en aquest cas, qualsevol punt de la recta és del pla:
$P(3, 1, -1) \rightarrow 3\cdot 3 + 2\cdot 1 + 5 = 16 \neq 0 \rightarrow$ la recta no està continguda en el pla.

14. Considera la recta *r* que té com a equacions:

$$r\text{:}\begin{cases} x=3+\lambda \\ y=4+\lambda \\ z=6+\lambda \end{cases}$$

i la *r*', que té com a equacions:

$x-1=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{2}$. Comprova que les dues rectes s'encreuen. Dóna les coordenades d'un punt *P* de *r* i un punt *Q* de *r*' que verifi-

quin la condició que la recta *PQ* sigui la perpendicular comuna a *r* i a *r'*.

Esbrinem el valor del determinant format pels vectors directors $\vec{v}$ i $\vec{u}$ i el $\overrightarrow{P_1Q_1}$ = (–2, –3, –5)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -5 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \rightarrow \text{ les rectes s'encreuen.}$$

Punts arbitraris de cada recta:

$P(3+\lambda, 4+\lambda, 6+\lambda)$, $Q(1+\mu, 1+2\mu, 1+2\mu)$

$\overrightarrow{PQ} = (-2+\mu-\lambda, -3+2\mu-\lambda, -5+2\mu-\lambda)$

Condició de perpendicularitat:

$$\left.\begin{array}{r} \vec{v}\cdot\overrightarrow{PQ} = 0 \rightarrow -2+\mu-\lambda-3+2\mu-\lambda-5+2\mu-\lambda = 0 \\ \vec{u}\cdot\overrightarrow{PQ} = 0 \rightarrow -2+\mu-\lambda-6+4\mu-2\lambda-10+4\mu-2\lambda = 0 \end{array}\right\}$$

$\mu = 2$ i $\lambda = 0$

Els punts són: P (3, 4, 6) i Q (3, 5, 5)

15. Donada la recta:

$$r: \begin{cases} \mathbf{2x + (a-5)y - 2z = 3a - 13} \\ \mathbf{ay - 2z = 3a} \end{cases}$$

determina *a* per tal que existeixi un pla que contingui aquesta recta i que sigui perpendicular al vector $\vec{v}$(1, 1, 1). Escriu l'equació cartesiana d'aquest pla.

Qualsevol pla que sigui perpendicular al vector $\vec{v}$ és de la forma: $x + y + z + D = 0$.
Si restem les dues equacions que donen la recta r, obtenim: $2x - 5y = -13$ independent de a. Ssubstituïm en el pla qualsevol punt que verifiqui aquesta condició i obtenim diferents plans paral·lels. Si substituim el punt (1, 3, 0) tenim el pla $x + y + z - 4 = 0$.

16. Determina *k* per tal que existeixi un pla que contingui la recta:

$$r: \begin{cases} \mathbf{x - 2y - 6z = 1} \\ \mathbf{2x - 2y - 3z = 6} \end{cases}$$

i que sigui perpendicular al vector (–6, 8, *k*).

El vector director de la recta cal que sigui perpendicular al (–6, 8, k)

$$\begin{cases} x - 2y - 6z = 1 \\ 2x - 2y - 3z = 6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 5 + 3\lambda \\ y = 2 - \dfrac{3}{2}\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad \vec{v} = \left(3, \frac{-3}{2}, 1\right)$$

$$\left(3, \frac{-3}{2}, 1\right)\cdot(-6, 8, k) = -18 - 12 + k = 0 \rightarrow k = 30$$

Equació del pla: $-6x + 8y + 30z + D = 0$ pel punt de la recta (5, 2, 0): $-6x + 8y + 30z + 14 = 0$
$-3x + 4y + 15z + 7 = 0$

17. Discuteix la posició relativa dels plans:

π_1: $ax + y + az = 0$

π_2: $(a + 3)x + \left(\dfrac{1}{a}\right)y + z = 1$

segons els valors de $a \neq 0$.

Els plans són paral·lels o secants. Condició de paral·lelisme: $\dfrac{a}{a+3} = \dfrac{1}{1/a} = \dfrac{a}{1} \rightarrow \dfrac{a}{1} = \dfrac{a}{1} = \dfrac{a}{a+3}$

$a^2 + 3a = a \rightarrow a^2 + 2a = 0 \rightarrow a = 0$ i $a = -2$

La solució es $a = -2$ ja que una condició és $a \neq 0$.

Per $a = -2$ els dos plans són paral·lels.

Per $a \neq -2$ els dos plans són secants.

18. Sigui el punt P_1(1, 0, –1), P_2 el punt simètric de P_1 respecte del pla d'equació $x - 2y = 0$ i P_3 el simètric de P_2 respecte del pla d'equació $x + 2y + z = 1$. Troba l'equació general del pla que determinen els punts P_1, P_2 i P_3.

El pla cal que contingui un dels punts, per exemple P_1, i que els vectors orientadors siguin, per exemple $\overrightarrow{P_1P_2}$ i $\overrightarrow{P_2P_3}$.

$\overrightarrow{P_1P_2}$ és proporcional al vector associat al primer pla: (1, –2, 0)

$\overrightarrow{P_2P_3}$ és proporcional al vector associat al segon pla: (1, 2, 1)

Equació del pla:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 1 \\ y & -2 & 2 \\ z+1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow -2x - y + 4z + 6 = 0$$

19. Troba *a* i *b* per tal que els tres plans següents passin per una mateixa recta:

π: $x + 2y - z = 1$
π': $2x + y + az = 0$
π'': $3x + 3y - 2z = b$

El sistema format per les equacions dels tres plans ha de ser compatible indeterminat de rang 2. Per tant, els dos determinants de 3r ordre han de ser nuls:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & a \\ 3 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 0 \text{ i } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & b \end{vmatrix} = 0 \rightarrow a = -1 \text{ i } b = 1$$

20. Hi ha algun valor de *k* pel qual els quatre plans tinguin un punt en comú? Si és així, troba aquest punt.

$$\begin{aligned} \pi&: \quad \boldsymbol{x + 2z - 3 = 0} \\ \pi'&: \quad \boldsymbol{3x + y + z = -1} \\ \pi''&: \quad \boldsymbol{2y - z + 2 = 0} \\ \pi'''&: \quad \boldsymbol{x - y + kz + 5 = 0} \end{aligned}$$

El sistema format pels quatre plans ha de ser compatible determinat, és a dir, de rang 3.
Si resolem el sistema format per les tres primeres equacions.

$$\left.\begin{aligned} x + 2z &= 3 \\ 3x + y + z &= -1 \\ 2y - z &= -2 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} x &= -1 \\ y &= 0 \\ z &= 2 \end{aligned}$$

Substituïm aquesta solució en la quarta equació per trobar k.

$$-1 + 2k + 5 = 0 \rightarrow k = -2$$

21. Considera la recta:

$$\boldsymbol{r}: \begin{cases} \boldsymbol{x - y - 3z = 1} \\ \boldsymbol{x - 3y + z = 5} \end{cases}$$

Digues si el punt (6, 2, 2) es troba en la recta paral·lela a *r* que passa per l'origen de coordenades.

$$r: \begin{cases} x - y - 3z = 1 \\ x - 3y + z = 5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -1 + 5\lambda \\ y = -2 + 2\lambda \rightarrow \vec{v} = (5, 2, 1) \\ z = \lambda \end{cases}$$

Recta paral·lela per l'origen: $\begin{cases} x = 5\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$

El punt (6, 2, 2) no es troba en aquesta recta.

22. *a*) Explica la relació que hi ha entre el vector associat a un pla i un vector director d'una recta perpendicular a aquest.

El vector associat a un pla i el vector director d'una recta perpendicular són linealment dependents.

***b*) Troba l'equació del pla que conté el punt (1, 1, 0) i és perpendicular a la recta *r*:**

$$\boldsymbol{r}: \begin{cases} \boldsymbol{x + y - 2z + 1 = 0} \\ \boldsymbol{2x - y + z - 1 = 0} \end{cases}$$

$$r: \begin{cases} x + y - 2z = -1 \\ 2x - y + z = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \lambda \\ y = -1 + 5\lambda \rightarrow \\ z = 3\lambda \end{cases}$$

$$\rightarrow \vec{v} = (1, 5, 3) = \vec{u}$$

Equació del pla: $x + 5y + 3z + D = 0$ per (1, 1, 0)
$x + 5y + 3z - 6 = 0$

23. Estudia la posició relativa de les rectes *r* i *r'*

$$\boldsymbol{r}: \frac{\boldsymbol{2x - 1}}{\boldsymbol{4}} = \frac{\boldsymbol{4y - 1}}{\boldsymbol{2}} = \boldsymbol{z}$$

$$\boldsymbol{r'}: \begin{cases} \boldsymbol{3x - y + 3z = 0} \\ \boldsymbol{x + 4y + z = 0} \end{cases}$$

$$r: \begin{cases} x = \frac{1}{2} + 2\lambda \\ y = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad r': \begin{cases} 3x - y + 3z = 0 \\ x + 4y + z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \mu \\ y = 0 \\ z = -\mu \end{cases}$$

Els vector directors: $\vec{v} = \left(2, \frac{1}{2}, 1\right)$ i $\vec{u}$ = (1, 0, –1) no són proporcionals, per tant, les rectes no són paral·leles.
Estudiem el determinant format pels vectors $\vec{v}$, $\vec{u}$ i $\overrightarrow{PP'}$ amb un punt de cada recta:

$$\overrightarrow{PP'} = \left(\frac{-1}{2}, \frac{-1}{4}, 0\right)$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow \text{ les rectes s'encreuen.}$$

24. Considera la recta:

$$\boldsymbol{r}: \begin{cases} \boldsymbol{3x - y + 2z - 1 = 0} \\ \boldsymbol{x + 4y + z - b = 0} \end{cases}$$

i el pla π:

$$\boldsymbol{2x - 5y + az + 2 = 0}$$

Determina els valors de *a* i *b* per tal que:

Podem estudiar els rangs de les matrius del sistema format per les tres equacions:

$$\begin{cases} 3x - y + 2z = 1 \\ x + 4y + z = b \\ 2x - 5y + az = -2 \end{cases}$$

***a*) *r* i π siguin secants. Troba el punt d'intersecció.**

rang M = rang M' = 3 $\rightarrow$

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & -5 & a \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow a \neq 1$$

Per qualsevol $a \neq 1$ i b qualsevol el sistema és compatible determinat i té de solució les coordenades del punt d'intersecció que serà diferent segons els valors que es denin a a i b.

***b*) *r* i π siguin paral·lels.**

rang $M \neq$ rang M'

Per a $a = 1 \rightarrow$ rang $M = 2$

Estudiem el determinant amb la columna de termes independents:

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & b \\ 2 & -5 & -2 \end{vmatrix} = 13b - 39$$

Si $13b - 39 = 0 \rightarrow b = 3$

rang $M' = 2$

Si $a = 1$ i $b \neq 3$ el sistema és incompatible i la recta és paral·lela al pla.

***c*) La recta *r* estigui continguda en el pla π.**

Si $a = 1$ i $b = 3$, rang M = rang M' = 2 i la recta està continguda en el pla.