Comencem

- **Calcula la distància entre els parells de punts següents:**

  a) ***P*(2, –3); *Q*(1, 2)**

  $$d(P,Q) = |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{26}$$

  b) ***R*(0, 0); *S*(3, 4)**

  $$d(R,S) = |\overrightarrow{RS}| = 5$$

  c) ***T*(5, –3); *U*(11, 5)**

  $$d(T,U) = |\overrightarrow{TU}| = 10$$

- **Quina és la condició analítica que verifiquen tots els punts *P*(*x*, *y*) del pla que es troben a distància 3 del punt *C*(1, –2)? Quina figura determinen aquests punts?**

  $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 9$
  Una circumferència: la de centre en el punt $C(1, -2)$ i radi $r = 3$.

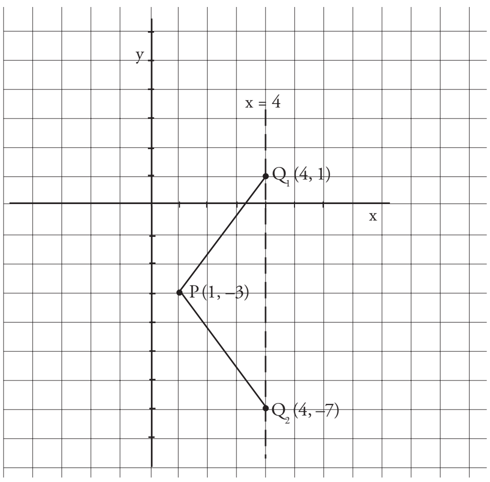
- **Donats els punts *P*(1, –3) i *Q*(4, *q*), calcula *q* perquè es verifiqui *d*(*P*, *Q*) = 5. Interpreta geomètricament les solucions obtingudes ajudant-te de la representació gràfica.**

  $$d(P,Q) = |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{3^2 + (q+3)^2} = 5$$

  $$\sqrt{9 + q^2 + 6q + 9} = 5$$

  $$q^2 + 6q + 18 = 25 \rightarrow q^2 + 6q - 7 = 0 \begin{cases} q_1 = 1 \\ q_2 = -7 \end{cases}$$

  Hi ha dos punts Q_1 i Q_2 d'abscissa 4 que disten 5 unitats del punt $P(1, -3)$. Els dos punts se situen sobre la recta $x = 4$ i, juntament amb el punt P, determinen un triangle isósceles.



Exercicis

1. Calcula la distància entre els parells de punts següents:

a) ***P*(1, –1, –3) i *Q*(4, 2, 0)**

$$d(P,Q) = |\overrightarrow{PQ}| = 3\sqrt{3}$$

b) ***R*(0, –2, 5) i *S*(1, –3, 2)**

$$d(R,S) = |\overrightarrow{RS}| = \sqrt{11}$$

c) ***T*(4, –2, 1) i *U*(1, 1, 2)**

$$d(T,U) = |\overrightarrow{TU}| = \sqrt{19}$$

d) ***V*(5, –3, 7) i *W*(6, –2, 8)**

$$d(V,W) = |\overrightarrow{VW}| = \sqrt{3}$$

2. Si la distància entre els punts *P*(2, –1, 3) i *Q*(*t*, 1, 2) és 3, calcula el valor de *t*. Quants punts *Q* verifiquen aquesta condició?

$$d(P,Q) = |\overrightarrow{PQ}| = 3$$

$$\overrightarrow{PQ} = (t - 2, 2, -1)$$

$$d(P,Q) = \sqrt{(t-2)^2 + 4 + 1} = \sqrt{t^2 - 4t + 9}$$

$$\sqrt{t^2 - 4t + 9} = 3 \rightarrow t^2 - 4t + 9 = 9 \rightarrow$$

$$\rightarrow t^2 - 4t = 0 \rightarrow t(t-4) = 0 \begin{cases} t_1 = 0 \\ t_2 = 4 \end{cases}$$

Hi ha dues solucions:

$Q_1(0, 1, 2)$ i $Q_2(4, 1, 2)$

3. Per a quin valor de *t* és mínima la distància entre els punts *P* i *Q* de l'exercici anterior? Quin és el valor d'aquesta distància mínima?

$$d(P,Q) = \sqrt{t^2 - 4t + 9}$$

Derivem aquesta expressió respecte de t i igualem a zero:

$$d'(P,Q) = \frac{2t-4}{2\sqrt{t^2 - 4t + 9}} = \frac{t-2}{\sqrt{t^2 - 4t + 9}}$$

$$d'(P,Q) = 0 \rightarrow t - 2 = 0 \rightarrow t = 2$$

La distància és mínima per a $t = 2$, i el valor d'aquesta distància mínima és:

$$d(P,Q)_{\text{mín}} = \sqrt{5}$$

4. Donat el triangle que té com a vèrtexs els punts *A*(–1, 2, –4), *B*(4, 1, 6) i *C*(0, 3, 4), troba les coordenades del baricentre *G*. Si *M* és el punt mitjà del costat *AB*, comprova que es verifica *d*(*G*, *C*) = 2 · *d*(*M*, *G*).

$$G\left(\frac{a_1+b_1+c_1}{3},\frac{a_2+b_2+c_2}{3},\frac{a_3+b_3+c_3}{3}\right)\rightarrow$$

$$\rightarrow G(1,2,2)$$

$$d(G,C)=|\overrightarrow{GC}|=\sqrt{6}$$

$$d(M,G)=|\overrightarrow{MG}|=\frac{\sqrt{6}}{2}$$

Es compleix que

$$\sqrt{6}=2\cdot\frac{\sqrt{6}}{2}\rightarrow d(G,C)=2\cdot d(M,G)$$

5. Donats els punts *P*(3, –6, 9) i *Q*(6, 3, –6), troba les coordenades del punt *R* alineat amb *P* i *Q* de manera que es verifiqui:

$$\overrightarrow{PQ}=3\overrightarrow{PR}$$

Quina és la relació que hi ha entre *d*(*R*, *Q*) i *d*(*P*, *R*)? Comprova la teva resposta fent-ne el càlcul.

Anomenem $R(x, y, z)$

$\overrightarrow{PQ}=3\overrightarrow{PR}\rightarrow(3,9,-15)=3(x-3,\ y+6,\ z-9)$

$3 = 3x - 9 \rightarrow 12 = 3x \rightarrow x = 4$
$9 = 3y + 18 \rightarrow -9 = 3y \rightarrow y = -3$
$-15 = 3z - 27 \rightarrow 12 = 3z \rightarrow z = 4$

Les coordenades del punt *R* són (4, –3, 4)

$$d(R,Q)=|\overrightarrow{RQ}|=\sqrt{140}=2\sqrt{35}$$

$$d(P,R)=|\overrightarrow{PR}|=\sqrt{35}$$

Es compleix que $d(R, Q) = 2 \cdot d(P, R)$

6. El triangle de vèrtexs els punts *A*(1, 2, 0), *B*(3, 2, 1) i *C*(1, –4, 0) és rectangle en *A*.

Comprova-ho:

***a*) Mitjançant el producte escalar.**

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=(2,0,1)\ (0,\ -6,0)\ =0$$

***b*) Aplicant el teorema de Pitàgores.**

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{5};\ |\overrightarrow{AC}|=6;\ |\overrightarrow{BC}|=\sqrt{41}$$

$$|\overrightarrow{BC}|^2=|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{AC}|^2\rightarrow 41=5+36$$

7. Calcula el perímetre del triangle que s'obté unint els punts de tall del pla 3*x* + 4*y* + 3*z* – – 12 = 0 amb els eixos de coordenades.

Eix *OX*: (4, 0, 0) → punt *P*
Eix *OY*: (0, 3, 0) → punt *Q*
Eix *OZ*: (0, 0, 4) → punt *R*

perímetre:

$$|\overrightarrow{PQ}|+|\overrightarrow{PR}|+|\overrightarrow{QR}|=5+4\sqrt{2}+5=10+4\sqrt{2}$$

8. Calcula la distància del punt *P*(2, –3, –1) a la recta *r*: (*x*, *y*, *z*) = (1, –2, 1) + λ(2, 1, –3).

Equació del pla π que conté el punt *P* i és perpendicular a *r*:

$$2x+y-3z+D=0\xrightarrow{P(2,-3,-1)}4-3+3+D=$$

$$=0\rightarrow D=-4$$

π: $2x + y - 3z - 4 = 0$

Intersecció del pla π amb la recta *r*: punt P'

$x = 1 + 2\lambda;\ y = -2 + \lambda;\ z = 1 - 3\lambda$
$2(1 + 2\lambda) + (-2 + \lambda) - 3(1 - 3\lambda) - 4 = 0$
$2 + 4\lambda - 2 + \lambda - 3 + 9\lambda - 4 = 0$

$$14\lambda = 7 \rightarrow \lambda = \frac{1}{2}$$

$$P'\left(1+2\cdot\frac{1}{2},-2+\frac{1}{2},1-3\cdot\frac{1}{2}\right)=\left(2,-\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right)$$

$$\overrightarrow{PP'}=\left(0,\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$$

$$d(P,r)=d(P,P')=|\overrightarrow{PP'}|=\sqrt{\frac{10}{4}}=\frac{\sqrt{10}}{2}$$

9. Determina la distància del punt *P*(–1, –3, –1) a la recta:

$$r:\begin{cases}4x-3y-5=0\\ y+2z+5=0\end{cases}$$

Interpreta el resultat obtingut.

Les coordenades del punt *P* verifiquen cadascuna de les equacions dels dos plans que determinen la recta *r*, la qual cosa significa que el punt *P* pertany a la recta recta. Aleshores:
Si $P \in r \rightarrow d(P, r) = 0$.

10. Donada la recta *r*: (*x*, *y*, *z*) = (0, 1, –2) + + λ(2, 0, –1) i el punt *P*(1, 0, –1), troba una expressió que et doni la distància *d* entre aquest punt *P* i un punt *Q* qualsevol de la recta *r* en funció del paràmetre λ. Calcula després *d*(*P*, *r*) buscant el valor de λ que faci mínima la funció *d* = *f*(λ).

Les coordenades d'un punt Q qualsevol són:
$Q = (2\lambda, 1, -2, -\lambda)$

$$d(PQ) = |\overrightarrow{PQ}|\text{, amb } \overrightarrow{PQ} = (2\lambda - 1, 1, -\lambda - 1)$$

$$d(PQ) = \sqrt{(2\lambda-1)^2 + 1^2 + (-\lambda-1)^2} =$$

$$= \sqrt{5\lambda^2 - 2\lambda + 3}$$

Derivem respecte de λ:

$$d'(PQ) = \frac{10\lambda - 2}{2\sqrt{5\lambda^2 - 2\lambda + 3}} = \frac{5\lambda - 1}{\sqrt{5\lambda^2 - 27 + 3}}$$

$$d'(PQ) = 0 \rightarrow 5\lambda - 1 = 0 \rightarrow \lambda = 1/5$$

$$d(Pr) = d(PQ)_{\text{mín}} = \sqrt{5 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{5} + 3} =$$

$$= \sqrt{\frac{14}{5}} = \frac{\sqrt{70}}{5}$$

11. Donat el triangle que té com a vèrtexs els punts *P*(0, 0, 0), *Q*(2, 5, 0) i *R*(3, 2, –4), calcula'n l'altura relativa al vèrtex *P*. Quant val l'àrea d'aquest triangle?

L'altura relativa al vèrtex P és la distància entre el punt P i la recta que determinen els punt Q i R. Anomenem r aquesta recta.

$$r\text{: } (x, y, z) = (2, 5, 0) + \lambda(1, -3, -4)$$

Pla π que conté P i és perpendicular a r:

$$\pi : x - 3y - 4z + D = 0 \xrightarrow{P(0,0,0)} D = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow x - 3y - 4z = 0$$

Punt P' intersecció entre el pla π i la recta r:

$2 + \lambda - 3(5 - 3\lambda) - 4 \cdot (-4\lambda) = 0$
$2 + \lambda - 15 + 9\lambda + 16\lambda = 0$

$26\lambda = 13 \rightarrow \lambda = \dfrac{1}{2}$

$$P' = \left(2 + \frac{1}{2},\ 5 - \frac{3}{2},\ -4 \cdot \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}, \frac{7}{2}, -2\right)$$

$$h_P = d(P, r) = d(P, P') = \sqrt{\frac{90}{4}} = \frac{3}{2}\sqrt{10}$$

Per a aquesta altura, la base del triangle és:

$$b = |\overrightarrow{QR}| = \sqrt{26}$$

$$A = \frac{b \cdot h_P}{2} = \frac{\sqrt{26} \cdot \frac{3}{2}\sqrt{10}}{2} = \frac{3}{2}\sqrt{65}\ u^2$$

12. Calcula la distància del punt *P*(2, –3, 5) al pla que té com a equació:

$$\pi\text{: } \boldsymbol{x - 2y - 2z + 7 = 0}$$

$$d(P, \pi) = \left|\frac{2 - 2(-3) - 2 \cdot 5 + 7}{\sqrt{1 + 4 + 4}}\right| = \frac{5}{3}$$

13. Dedueix una expressió general que et permeti calcular la distància entre l'origen de coordenades i un pla del qual coneixes l'equació cartesiana.

$$d(O, \pi) = \left|\frac{A \cdot 0 + B \cdot 0 + C \cdot 0 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\right| = \left|\frac{D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\right|$$

14. El pla d'equació 2*x* – 2*y* + *z* + *D* = 0 es troba a distància 2 de l'origen de coordenades. Troba *D* i interpreta el nombre de solucions obtingudes.

Es verifica:

$$\frac{|D|}{\sqrt{4 + 4 + 1}} = \frac{|D|}{3} = 2 \rightarrow |D| = 6 \begin{array}{l} \nearrow D_1 = 6 \\ \searrow D_2 = -6 \end{array}$$

Hi ha dos plans que compleixen la condició que estableix l'enunciat:

$$2x - 2y - z + 6 = 0 \text{ i } 2x - 2y + z - 6 = 0$$

Evidentment, es tracta de dos plans paral·lels.

15. Quina és la distància entre el punt *P*(2, 0, –1) i el pla que conté la recta $\boldsymbol{\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z}{-2}}$ i el punt (5, –1, 0)?

L'equació del pla π és:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z \\ 3 & 2 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow 3z - 8y - 16 - 8z + 2x - 2 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow 2x - 8y - 5z - 18 = 0$$

$$d(P, \pi) = \frac{|10 + 5 - 18|}{\sqrt{93}} = \frac{3}{\sqrt{93}} = \frac{\sqrt{93}}{31}$$

16. Calcula la distància entre els parells de rectes següents:

a) ***r*: (*x*, *y*, *z*) = (5, –1, 8) + λ(1, 0, 2)**

$$\boldsymbol{s :} \begin{cases} \boldsymbol{x = 2 + 3\mu} \\ \boldsymbol{y = 2 - \mu} \\ \boldsymbol{z = -1 + 4\mu} \end{cases}$$

Les coordenades d'un punt genèric P de la recta r són de la forma:

$$P(5 + \lambda, -1, 8 + 2\lambda)$$

I les d'un punt genèric P' de la recta s:

$$P'(2 + 3\mu, 2 - \mu, -1 + 4\mu).$$

$$\overrightarrow{PP'} = (-3 + 3\mu - \lambda, 3 - \mu, -9 + 4\mu - 2\lambda)$$

$$\left.\begin{array}{r}\overrightarrow{PP'}\perp\overrightarrow{v_r}\rightarrow -3+3\mu-\lambda+2(-9+4\mu-2\lambda)=0\\ \overrightarrow{PP'}\perp\overrightarrow{v_s}\rightarrow 3(-3+3\mu-\lambda)-(3-\mu)+4(-9+4\mu-2\lambda)=0\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r}11\mu-5\lambda=21\\ 26\mu-11\lambda=48\end{array}\right\}\begin{array}{l}\lambda=-2\\ \mu=1\end{array}$$

Per tant, $\overrightarrow{PP'}=(2,2,-1)$

$$d(r,s)=d(P,P')=\left|\overrightarrow{PP'}\right|=3$$

***b*) *r*: (*x*, *y*, *z*) = λ(2, –1, –1)**

$$\boldsymbol{s: \frac{x-3}{4}=\frac{y}{-2}=\frac{z+1}{-2}}$$

Procediment de la mateixa manera que en el cas de l'apartat anterior, s'obté:

$$d(r,s)=\frac{\sqrt{66}}{6}$$

17. Comprova que la recta:

***r*: (*x*, *y*, *z*) = (2, –3, 0) + λ(1, 0, –2)**

és paral·lela al pla π: 2*x* + 5*y* + *z* – 3 = 0. Troba després la distància entre la recta *r* i el pla π.

El vector director de la recta $\vec{u}=(1,0,-2)$ i el vector associat al pla $\vec{n}=(2,5,1)$ han de ser perpendiculars. En efecte:

$$\vec{u}\cdot\vec{n}=2-2=0$$

$$d(r,\pi)=\frac{|2\cdot2+5(-3)-3|}{\sqrt{4+25+1}}=\frac{14}{\sqrt{30}}=\frac{7\sqrt{30}}{15}$$

18. La distància entre els plans π_1: 3*x* + 2*y* + 4*z* – 12 = 0 i π_2: 3*x* + 2*y* + 4*z* + *D* = 0 és 3. Calcula *D* i interpreta geomètricament el nombre de solucions obtingudes.

Considerem un punt qualsevol d'un dels dos plans, per exemple, el pla π_1: *P*(0, 0, 3).

$$d(P,\pi_2)=\frac{|12+D|}{\sqrt{9+4+16}}=3\rightarrow|12+D|=3\sqrt{29}\rightarrow$$

$$\rightarrow 12+D=\pm3\sqrt{29}\rightarrow D=-12\pm3\sqrt{29}$$

$$D_1=-12+3\sqrt{29};\ D_2=-12-3\sqrt{29}$$

Donat un pla, hi ha dos plans paral·lels a aquest i, per tant, paral·lels entre ells que es troben a una distància determinada del pla inicial.

19. Calcula la distància entre els plans:

π_1: 5*x* – 4*y* – 2*z* + 3 = 0 i

π_2: (*x*, *y*, *z*) = (1, 0, –2) + λ(2, 1, 3) + μ(0, 1, – 2)

Analitza'n prèviament la posició relativa.

Els plans són paral·lels, ja que el vector associat a π_1 és perpendicular a cadascun dels vectors directors de π_2:

(5, –4, –2) · (2, 1, 3) = 0
(5, –4, –2) · (0, 1, –2) = 0
$d(\pi_1, \pi_2) = d(\pi_2, \pi_1) =$

$$=\frac{|5+4+3|}{\sqrt{25+16+4}}=\frac{12}{\sqrt{45}}=\frac{4\sqrt{45}}{15}$$

20. Determina la posició relativa de la recta:

$$\boldsymbol{r:\begin{cases}x-3y+10=0\\ 2y-z-4=0\end{cases}}$$

i el pla π: *x* – 2*y* + *z* + 2 = 0. Quina és la distància entre *r* i π?

La solució del sistema:

$$\begin{cases}x-3y+10=0\\ 2y-z-4=0\\ x-2y+z+2=0\end{cases}$$

és *x* = 2, *y* = 4, *z* = 4

això vol dir que la recta *r* i el pla π es tallen en el punt *P*(2, 4, 4). Aleshores:

$d(r, \pi) = 0$

21. Considera les rectes *r*: $\boldsymbol{\frac{x+3}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+2}{-3}}$ i *s*: (*x*, *y*, *z*) = (0, –3, 4) + λ(–1, 2, 1).

Comprova que *r* i *s* s'encreuen. Troba l'equació del pla que conté *s* i és paral·lel a *r* i calcula la distància entre la recta *r* i aquest pla.

Pla que conté *s* i és paral·lel a *r*:

$$\pi:\begin{vmatrix}x & y+3 & z-4\\ -1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & -3\end{vmatrix}=0$$

π: –6*x* – *z* + 4 + 2*y* + 6 – 4*z* + 16 – 3*y* – 9 – *x* = 0
π: –7*x* – *y* – 5*z* + 17 = 0 → 7*x* + *y* + 5*z* – 17 = 0

$$d(r,\pi)=\frac{|-21+1-10-17|}{\sqrt{49+1+25}}=\frac{47}{\sqrt{75}}=\frac{47}{5\sqrt{3}}=\frac{47}{15}\sqrt{3}$$

22. Troba l'angle format per les rectes:

***r*: (*x*, *y*, *z*) = (2 – λ, 1 + 2λ, λ) i**
***s*: (*x*, *y*, *z*) = (1, 1, –2) + μ(2, –3, –5)**

El vector director de la recta *r* es $\vec{u}=(-1,2,1)$ i el vector director de la recta *s*, $\vec{v}=(2,-3,-5)$

$$\cos\alpha=\frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|}=\frac{13}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{38}}\rightarrow\alpha=30{,}58°$$

23. Donat el pla π: $3x - y + 2z - 1 = 0$ i la recta

$$r: \frac{x-2}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-4}$$

calcula l'angle que formen.

Vector director de la recta: $\vec{u} = (2, 1, -4)$

Vector associat al pla: $\vec{n} = (3, -1, 2)$

$$\sin\alpha = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{n}|}{|\vec{u}||\vec{n}|} = \frac{3}{\sqrt{21}\sqrt{14}} \rightarrow \alpha = 10{,}08$$

24. Calcula l'angle format pels plans:

π_1: $4x - 3y + z + 7 = 0$ i

π_2: $(x, y, z) = (1, 0, 0) + \lambda(2, -1, 0) + \mu(1, 3, -2)$

Expressem el pla π_2 en la forma $A_x + B_y + C_z + D = 0$

$$\pi_2: \begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 2x - 2 + 6z + z + 4y = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow 2x + 4y + 7z - 2 = 0$$

Vector associat al pla π_1: $\vec{n_1} = (4, -3, 1)$

Vector associat al pla π_2: $\vec{n_2} = (2, 4, 7)$

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}|}{|\vec{n_1}||\vec{n_2}|} = \frac{3}{\sqrt{26}\sqrt{69}} \rightarrow 85{,}94°$$

25. Considera la mateixa recta i el mateix pla de l'exercici 23.

***a*) Troba l'equació de la recta *r'*, projecció ortogonal de la recta *r* sobre el pla π.**

Tingues en compte que la recta *r'* és la intersecció entre el pla π i un altre pla π' que conté *r* i és perpendicular a π.

Equació del pla π' que conté *r* i és perpendicular a π.

$$\pi': \begin{vmatrix} x-2 & y & z-1 \\ 2 & 1 & -4 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow 2x - 4 - 2z + 2 - 12y - 3z + 3 - 4y - 4x + 8 = 0$$

$$\pi': -2x - 16y - 5z + 9 = 0 \rightarrow 2x + 16y + 5z - 9 = 0$$

Recta *r'*, intersecció entre els plans π i π':

$$r' \begin{cases} 3x - y + 2z - 1 = 0 \\ 2x + 16y + 5z - 9 = 0 \end{cases}$$

$$r': (x, y, z) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) + \mu(-37, -11, 50)$$

***b*) Calcula l'angle format per les rectes *r* i *r'* i comprova que és el mateix que l'angle format per la recta *r* i el pla π que has trobat a l'exercici anterior.**

Angle que formen les rectes *r* i *r'*:

Vector director recta $r \rightarrow \vec{u} = (2, 1, -4)$

vector director recta $r' \rightarrow \vec{v} = (-37, -11, 50)$

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \frac{285}{\sqrt{21}\cdot\sqrt{3990}} \rightarrow \alpha = 10{,}08°$$

26. Donats els vectors $\vec{u} = (2, -4, 1)$ i $\vec{v} = (1, 3, -2)$, calcula'n el producte vectorial i comprova que el nou vector que has obtingut és perpendicular al vector $\vec{u}$ i al vector $\vec{v}$.

$$\vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ 2 & -4 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 5\vec{e_1} + 5\vec{e_2} + 10\vec{e_3}$$

$$(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{u} = (5, 5, 10)\cdot(2, -4, 1) = 10 - 20 + 10 = 0$$

$$(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{v} = (5, 5, 10)\cdot(1, 3, -2) = 5 + 15 - 20 = 0$$

27. Calcula l'angle format pels vectors $\vec{v} = (-1, 3, 4)$ i $\vec{w} = (2, 0, 1)$ a partir de:

***a*) del seu producte escalar;**

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{v}\cdot\vec{w}|}{|\vec{v}||\vec{w}|} = \frac{2}{\sqrt{26}\sqrt{5}} \rightarrow \alpha = 79{,}90°$$

***b*) del seu producte vectorial.**

$$\vec{v}\times\vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ -1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3\vec{e_1} + 8\vec{e_2} - 6\vec{e_3} + \vec{e_2} =$$

$$= 3\vec{e_1} + 9\vec{e_2} - 6\vec{e_3}$$

$$|\vec{v}\times\vec{w}| = |\vec{v}||\vec{w}|\sin\alpha$$

$$\sin\alpha = \frac{|\vec{v}\times\vec{w}|}{|\vec{v}||\vec{w}|} = \frac{\sqrt{126}}{\sqrt{26}\cdot\sqrt{5}} \rightarrow \alpha = 79{,}90°$$

28. Determina tots els vectors de mòdul 4 que són perpendiculars als vectors $\vec{p} = (3, 0, -1)$ i $\vec{q} = (1, 1, 0)$. Interpreta el nombre de solucions obtingudes.

$$\vec{r} = \vec{p}\times\vec{q} = \begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 3\vec{e_3} - \vec{e_2} + \vec{e_1} \rightarrow$$

$$\rightarrow \vec{r} = (1, -1, 3)$$

Vector unitari que té la mateixa direcció i sentit que el vector $\vec{r} \rightarrow \vec{u_1} = \frac{1}{|\vec{r}|}\cdot\vec{r} = \left(\frac{1}{\sqrt{11}}, \frac{-1}{\sqrt{11}}, \frac{3}{\sqrt{11}}\right)$

Vector unitari que té la mateixa direcció i sentit contrari que el vector $\vec{r} \rightarrow \overrightarrow{u_2} = -\frac{1}{|\vec{r}|} \cdot \vec{r} =$

$$= \left(-\frac{1}{\sqrt{11}}, \frac{1}{\sqrt{11}}, \frac{-3}{\sqrt{11}} \right)$$

Hi ha dos vectors que compleixen les condicions de l'enunciat de l'exercici:

$$\overrightarrow{w_1} = 4\overrightarrow{u_1} = \left(\frac{4}{\sqrt{11}}, \frac{-4}{\sqrt{11}}, \frac{12}{\sqrt{11}} \right)$$

$$\overrightarrow{w_2} = -4\overrightarrow{u_2} = \left(\frac{-4}{\sqrt{11}}, \frac{4}{\sqrt{11}}, \frac{-12}{\sqrt{11}} \right)$$

Es tracta de dos vectors oposats i perpendiculars al pla que determinen els vectors $\vec{p}$ i $\vec{q}$.

29. Quant ha de mesurar l'angle que formen dos vectors per tal que el mòdul del seu producte vectorial sigui màxim?

α = 90º. En aquest cas:

$$|\vec{v} \times \vec{w}| = |\vec{v}||\vec{w}| \sin 90° = |\vec{v}||\vec{w}|$$

30. Donats els vectors $\vec{u}$ = (2, 0, –1) i $\vec{v}$ = (1, 1, –2), comprova que els vectors $\vec{u}$ x $\vec{v}$ i $\vec{v}$ x $\vec{u}$tenen el mateix mòdul, la mateixa direcció i sentits contraris.

$$\vec{u} \times \vec{v} = (1, 3, 2)$$

$$\vec{v} \times \vec{u} = (-1, -3, -2)$$

Es senzill veure que es tracta de dos vectors oposats.

31. Considera el pla determinat pels punts *P*(1, 2, –1), *Q*(3, –2, 1) i *R*(0, 2, –3). Utilitza el producte vectorial per determinar-ne el vector associat i troba l'equació cartesiana d'aquest pla.

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2} & \overrightarrow{e_3} \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 4\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} - 2\overrightarrow{e_3} \rightarrow \vec{n} = (4, 1, -2)$$

$$\vec{u} = \overrightarrow{PQ} = (2, -4, 2) \rightarrow (1, -2, 1)$$

$$\vec{v} = \overrightarrow{PR} = (-1, 0, -2)$$

Equació cartesiana del pla:

$$4x + y - 2z + D = 0 \xrightarrow{P(1,2,-1)} 4 + 2 + 2 + D = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow D = -8 \rightarrow 4x + y - 2z - 8 = 0$$

32. Donats els vectors $\vec{u}$ = (1, 3, –2), $\vec{v}$ = (–1, 0, 2) i $\vec{w}$ = (2, –1, 3), comprova que es verifiquen les propietats del producte vectorial abans esmentades.

***a*) Anticommutativa**

$$\vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{u}) = (6, 0, 3)$$

***b*) Distributiva respecte de la suma de vectors:**

$$\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w} = (13, -7, -4)$$

***c*) Producte per un nombre real:**

$$\lambda(\vec{u} \times \vec{v}) = \lambda\vec{u} \times \vec{v} = \vec{u} \times \lambda\vec{v} = (6\lambda, 0, 3\lambda)$$

33. Amb els mateixos vectors de l'exercici anterior, esbrina si es verifica la igualtat:

$\vec{u}$ x ($\vec{v}$ x $\vec{w}$) = ($\vec{u}$ x $\vec{v}$) x $\vec{w}$

No es verifica, ja que:

$$\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = (17, -5, 1)$$

En canvi, $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} = (3, -12, -6)$.

34. Utilitza l'expressió en forma de determinant del producte vectorial per demostrar que si $\vec{u}$ i $\vec{v}$ són linealment dependents, $\vec{u}$ x $\vec{v}$ = $\vec{0}$.

Suposem que $\vec{u} = \lambda\vec{v}$.

$$\vec{u} \times \vec{v} = \lambda\vec{v} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2} & \overrightarrow{e_3} \\ \lambda v_1 & \lambda v_2 & \lambda v_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2} & \overrightarrow{e_3} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \lambda \cdot \vec{o} = \vec{o}$$

35. Raona la validesa de l'afirmació següent:

Si $\vec{u}$ i $\vec{v}$ són dos vectors linealment independents, els vectors {$\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{u}$ x $\vec{v}$} formen una base de V_3.

L'afirmació és correcta, perquè en ser $\vec{u}$ i $\vec{v}$ dos vectors linealment independents, el vector $\vec{u}$ x $\vec{v}$ és perpendicular al pla que generan aquests dos vectors.

Per tant, els vectors $\vec{u}$, $\vec{v}$ i $\vec{u}$ x $\vec{v}$ també són linealment independents, i, en conseqüència, formen una base de V_3.

36. Calcula l'àrea del paral·lelogram que es pot obtenir a partir dels vectors $\vec{u}$ = (1, 4, –3) i $\vec{w}$= = (3, –2, 4).

$$A = |\vec{v} \times \vec{w}|$$

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2} & \overrightarrow{e_3} \\ 1 & 4 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 16\vec{e_1} - 2\vec{e_3} - 9\vec{e_2} - 12\vec{e_3} - 4\vec{e_2} - 6\vec{e_1} =$$

$$= 10\vec{e_1} - 13\vec{e_2} - 14\vec{e_3}$$

$$\vec{v} \times \vec{w} = (10, -13, -14) \rightarrow A = \sqrt{465}\ u^2$$

37. Els punts *A*(0, 1, 0), *B*(2, –1, –3) i *C*(–1, 3, 2) són tres vèrtexs consecutius d'un paral·lelogram. Es demana:

***a*) Les coordenades del quart vèrtex *D*.**

Anomenem $D(x, y, z)$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \rightarrow (2, -2, -3) = (-1 - x,\ 3 - y,\ 2 - z)$$

$$2 = -1 - x \rightarrow x = -3$$

$$-2 = 3 - y \rightarrow y = 5$$

$$-3 = 2 - z \rightarrow z = 5$$

Les coordenades del quart vèrtex són

$D(-3, 5, 5)$

***b*) L'àrea del paral·lelogram.**

$$A = \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\right|;\ \overrightarrow{AB} = (2, -2, -3)$$

$$\overrightarrow{AD} = (-3, 4, 5)$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ 2 & -2 & -3 \\ -3 & 4 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= -10\vec{e_1} + 8\vec{e_3} + 9\vec{e_2} - 6\vec{e_3} - 10\vec{e_2} + 12\vec{e_1} =$$

$$= 2\vec{e_1} - \vec{e_2} + \vec{2e}$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = (2, -1, 2)$$

$$A = \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\right| = \sqrt{9} = 3\ u^2$$

***c*) La distància entre la recta *r* que conté els punts *A* i *B*, i la recta *r'* que conté els punts *C* i *D*.**

La distància $d(r, r')$ coincideix amb l'altura del paral·lelogram *ABCD*. Si prenem com a base d'aquest paral·lelogram el costat *DC*, es compleix:

$$A = \text{base} \cdot \text{altura} \rightarrow A = \left|\overrightarrow{DC}\right| \cdot d(r, r')$$

$$d(r, r') = \frac{A}{\left|\overrightarrow{DC}\right|} = \frac{3}{\sqrt{17}} = \frac{3\sqrt{17}}{17}$$

38. Calcula, fent ús del producte vectorial, la distància entre el punt *P*(1, 0, –2) i la recta que conté el punt *Q*(2, –1, 3) i és paral·lela a la recta:

$$(x - 1, y, z + 2) = \lambda(1, 0, -3)$$

$$\vec{u} = (1, 0, -3)$$

$$\overrightarrow{QP} = (-1, 1, -5)$$

$$\vec{u} \times \overrightarrow{QP} = \begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ 1 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & -5 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{e_3} + 3\vec{e_2} + 5\vec{e_2} + 3\vec{e_1} = 3\vec{e_1} + 8\vec{e_2} + \vec{e_3}$$

$$\vec{u} \times \overrightarrow{QP} = (3, 8, 1) \rightarrow \left|\vec{u} \times \overrightarrow{QP}\right| = \sqrt{74}$$

$$d(P, r) = \frac{\left|\vec{u} \times \overrightarrow{QP}\right|}{\left|\vec{u}\right|} = \frac{\sqrt{74}}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{37}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{185}}{5}$$

39. Calcula, fent ús del producte vectorial, la distància entre el punt *P*(2, 0, –1) i la recta *r* determinada pels plans $x + y - z + 3 = 0$ i $x - y - 3z - 5 = 0$.

Equació de la recta *r*:

$$\begin{cases} x + y - z + 3 = 0 \\ x - y - 3z - 5 = 0 \end{cases}$$

$$z = t,\ x = 2t + 1,\ y = -t - 4$$

$$r: (x, y, z) = (1, -4, 0) + t(2, -1, 1)$$

$$\vec{u} \times \overrightarrow{QP} = \begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{e_1} + 8\vec{e_3} + \vec{e_2} + \vec{e_3} + 2\vec{e_2} - 4\vec{e_1} = -3\vec{e_1} - 3\vec{e_2} + 9\vec{e_3}$$

$$d(P, r) = \frac{\left|\vec{u} \times \overrightarrow{QP}\right|}{\left|\vec{u}\right|} = \frac{\sqrt{99}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{33}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{66}}{2}$$

40. Determina la mesura de les tres altures del triangle que té com a vèrtexs els punts *O*(0, 0, 0), *P*(1, 2, 3) i *Q*(–2, 1, –1).

Altura relativa al vèrtex 0: distància entre el punt 0 i la recta que passa pels punts *P* i *Q*.

$$\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PO} = \begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ -3 & -1 & -4 \\ -1 & -2 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= 3\vec{e_1} + 4\vec{e_2} + 6\vec{e_3} - \vec{e_3} - 9\vec{e_2} - 8\vec{e_1} = -5\vec{e_1} - 5\vec{e_2} + 5\vec{e_3}$$

$$h_O = \frac{\left|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PO}\right|}{\left|\overrightarrow{PQ}\right|} = \frac{\sqrt{75}}{\sqrt{26}} = \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{26}} = \frac{5\sqrt{78}}{26}$$

Seguint el mateix procediment, s'obté:

Altura relativa al vértex $P \rightarrow h_P = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}$

Altura relativa al vèrtex $Q \rightarrow h_Q = \dfrac{5\sqrt{42}}{14}$

41. Els punts *R*(3, –4, 2), *S*(1, 0, –1) i *T*(0, –2, 3), estan alineats? Si la resposta és no, troba l'àrea del triangle que determinen.

No, ja que $\overrightarrow{RS} \neq \lambda \cdot \overrightarrow{ST}$.

$$A = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{RS} \times \overrightarrow{RT}\right|$$

$$\overrightarrow{RS} \times \overrightarrow{RT} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ -2 & 4 & -3 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 4\vec{e}_1 - 4\vec{e}_3 + 9\vec{e}_2 + 12\vec{e}_3 + 2\vec{e}_2 + 6\vec{e}_1 =$$

$$= 10\vec{e}_1 + 11\vec{e}_2 + 8\vec{e}_3$$

$$\overrightarrow{RS} \times \overrightarrow{RT} = (10, 11, 8) \rightarrow \left|\overrightarrow{RS} \times \overrightarrow{RT}\right| = \sqrt{285}$$

$$A = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{RS} \times \overrightarrow{RT}\right| = \frac{\sqrt{285}}{2}\ u^2$$

42. Utilitza el producte vectorial per trobar un vector associat al pla que conté els punts *M*(1, –2, 1), *N*(3, 1, –1) i *P*(7, 7, –5). Interpreta el resultat que obtinguis.

$$\overrightarrow{MN} = (2, 3, -2)$$

$$\overrightarrow{MP} = (6, 9, -6)$$

S'observa que $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{MP}$, o també,

$$\overrightarrow{MP} = 3\overrightarrow{MN}$$

Per tant, $\vec{n} = \overrightarrow{MN} \times \overrightarrow{MP} = \vec{o}$. És així perquè els tres punts *M*, *N* i *P* estan alineats, i, en conseqüència, no determinen cap pla.

43. Donats els vectors $\vec{p}$ = (2, –4, 1), $\vec{q}$ = (1, 3, –1) i $\vec{r}$ = (0, 2, –3), calcula:

***a*) $\vec{p} \bullet (\vec{q} \times \vec{r})$**

$$\vec{p} \cdot (\vec{q} \times \vec{r}) = -24$$

***b*) $\vec{p} \bullet (\vec{r} \times \vec{q})$**

$$\vec{p} \cdot (\vec{r} \times \vec{q}) = 24$$

***c*) $\vec{r} \bullet (\vec{p} \times \vec{q})$**

$$\vec{r} \cdot (\vec{p} \times \vec{q}) = -24$$

***d*) $3\vec{p} \bullet (2\vec{q} \times \vec{r})$**

$$3\vec{p} \cdot (2\vec{q} \times \vec{r}) = -144$$

44. Els vectors $\vec{u}$, $\vec{v}$ i $\vec{w}$ verifiquen $\vec{u} = 2\vec{v} - \vec{w}$. Pots calcular-ne el producte mixt sense especificar-ne l'ordre? Si la resposta és afirmativa, quant val? Justifica cadascuna de les respostes.

El producte mixt dels tres vectors $\vec{u}$, $\vec{v}$ i $\vec{w}$ és igual a zero, ja que es tracta de tres vectors que són linealment dependents. En calcular el determinant, una fila seria combinació de les altres dues.

45. Se sap que el producte mixt de tres vectors és diferent de zero. Què pots afirmar respecte d'aquests vectors?

Que són linealment independents.

46. Esbrina, utilitzant el producte mixt, si els punts *P*(1, 2, –1), *Q*(3, 2, 1), *R*(0, 1, 3) i *S*(–3, 1, 0) són coplanaris.

Són coplanaris, ja que per exemple,

$$\left[\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}, \overrightarrow{PS}\right] = 0,$$

i això vol dir que es tracta de tres vectors que són linealment dependents.

47. Utilitza el producte mixt per calcular el valor de *t* que fa que els vectors $\vec{v}$ = (1, –1, 3), $\vec{w}$ = = (2, 3, –4) i $\vec{u}$ = (*t*, 2, –1) siguin linealment dependents. Expressa després el vector $\vec{u}$ en combinació lineal dels vectors $\vec{v}$ i $\vec{w}$.

$$\left[\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}\right] = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \\ t & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$-3 + 12 + 4t - 9t - 2 + 8 = 0 \rightarrow -5t + 15 = 0 \rightarrow$$
$$\rightarrow t = 3$$

$$(3, 2, -1) = \lambda_1\,(1, -1, 3) + \lambda_2\,(2, 3, -4)$$

$$\begin{cases} 3 = \lambda_1 + 2\lambda_2 \\ 2 = -\lambda_1 + 3\lambda_2 \\ -1 = 3\lambda_1 - 4\lambda_2 \end{cases}$$

La solució del sistema és $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$

Aleshores: $\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$

48. Calcula l'àrea total i el volum de la piràmide que té com a vèrtexs els punts *P*(2, 3, 1), *Q*(4, 1, –2), *R*(2, 3, 5) i *S*(–2, –1, 3).

L'àrea total de la piràmide és la suma de les àrees dels triangles que en determinen les cares

$$At = A_{PQR} + A_{PQS} + A_{PRS} + A_{QRS}$$

$$\overrightarrow{PQ} = (2, -2, -3);\ \overrightarrow{PR} = (0, 0, 4)$$

$$\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 2 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -8\vec{e}_1 - 8\vec{e}_2 \rightarrow$$

$$\rightarrow \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = (-8, -8, 0)$$

$$\left|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}\right| = 8\sqrt{2}$$

$$A_{PQR} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}\right| = 4\sqrt{2}\ u^2$$

$$\overrightarrow{PQ} = (2, -2, -3);\ \overrightarrow{PS} = (-4, -4, 2)$$

$$\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PS} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 2 & -2 & -3 \\ -4 & -4 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= -4\vec{e}_1 - 8\vec{e}_3 + 12\vec{e}_2 - 8\vec{e}_3 - 4\vec{e}_2 - 12\vec{e}_1 =$$

$$= -16\vec{e}_1 + 8\vec{e}_2 - 16\vec{e}_3$$

$$\left|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PS}\right| = 24$$

$$A_{PQS} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PS}\right| = \frac{1}{2} \cdot 24 = 12\ u^2$$

$$\overrightarrow{PR} = (0, 0, 4);\ \overrightarrow{PS} = (-4, -4, 2)$$

$$\overrightarrow{PR} \times \overrightarrow{PS} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 0 & 0 & 4 \\ -4 & -4 & 2 \end{vmatrix} = 16\vec{e}_2 - 16\vec{e}_1 \rightarrow$$

$$\rightarrow \overrightarrow{PR} \times \overrightarrow{PS} = (-16, -16, 0)$$

$$\left|\overrightarrow{PR} \times \overrightarrow{PS}\right| = 16\sqrt{2}$$

$$A_{PRS} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{PR} \times \overrightarrow{PS}\right| = \frac{1}{2} \cdot 16\sqrt{2} = 8\sqrt{2}\ u^2$$

$$\overrightarrow{QR} = (-2, 2, 7);\ \overrightarrow{QS} = (-6, -2, 5)$$

$$\overrightarrow{QR} \times \overrightarrow{QS} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ -2 & 2 & 7 \\ -6 & -2 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= 10\vec{e}_1 + 4\vec{e}_3 - 42\vec{e}_2 + 12\vec{e}_3 + 10\vec{e}_2 + 14\vec{e}_1$$

$$\overrightarrow{QR} \times \overrightarrow{QS} = (24, -32, 16)$$

$$\left|\overrightarrow{QR} \times \overrightarrow{QS}\right| = 8\sqrt{29}$$

$$A_{QRS} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{QR} \times \overrightarrow{QS}\right| = \frac{1}{2} \cdot 8\sqrt{29} = 4\sqrt{29}\ u^2$$

$$A_t = 4\sqrt{2} + 24 + 8\sqrt{2} + 4\sqrt{29}\ u^2 =$$

$$= 24 + 12\sqrt{2} + 4\sqrt{29}\ u^2$$

$$A_t \simeq 50{,}5\ u^2$$

El volum de la piràmide és:

$$V = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}, \overrightarrow{PS}\right]\right| = \frac{1}{6} \cdot 64 = \frac{32}{3}\ u^3$$

49. Troba el volum del paral·lelepípede format a partir dels vectors:

$\vec{u}$ = (4, –3, 5), $\vec{v}$ = (1, 0, –3) i $\vec{w}$ = (–3, 5, –1)

$$\left[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right] = \begin{vmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & -3 \\ -3 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 25 - 27 - 3 + 60 = 55$$

$$V = \left|\left[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right]\right| = 55\ u^3$$

50. *a*) Determina les coordenades dels vèrtexs de la piràmide limitada pels eixos de coordenades i el pla d'equació:

3*x* + 4*y* + 2*z* – 12 = 0

$$3x + 4y + 2z - 12 = 0 \begin{cases} x = y = 0 \rightarrow z = 6 \\ y = z = 0 \rightarrow x = 4 \\ x = z = 0 \rightarrow y = 3 \end{cases}$$

Els vèrtexs de la piràmide són:

O(0, 0, 0) *P*(4, 0, 0) *Q*(0, 3, 0) i *R*(0, 0, 6)

***b*) Calcula'n el volum.**

$$\left[\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}, \overrightarrow{OR}\right] = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 72$$

$$V = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}, \overrightarrow{OR}\right]\right| = \frac{1}{6} \cdot 72 = 12\ u^3$$

51. Considera les rectes següents:

$$\boldsymbol{r: (x, y, z) = (5, -1, 8) + \lambda(1, 0, 2)}$$

$$\boldsymbol{s: \frac{x-2}{3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{4}}$$

***a*) Comprova que s'encreuen.**

S'encreuen, ja que no tenen cap punt en comú i no són paral·leles.

***b*) Calcula de tres maneres diferents la distància que les separa.**

$$P(5, -1, 8);\ Q(2, 2, -1) \rightarrow \overrightarrow{PQ} = (-3, 3, -9)$$

$$\left[\overrightarrow{PQ}, \vec{u}, \vec{v}\right] = \begin{vmatrix} -3 & 3 & -9 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 9 + 18 - 12 - 6 = 9$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= -\vec{e}_3 + 6\vec{e}_2 - 4\vec{e}_2 + 2\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = (2, -2, 1) \rightarrow \left|\vec{u} \times \vec{v}\right| = 3$$

$$d(r, s) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{PQ}, \vec{u}, \vec{v}\right]\right|}{\left|\vec{u} \times \vec{v}\right|} = \frac{9}{3} = 3$$

Nota: L'apartat b) d'aquest exercici només s'ha resolt mitjançant el procediment indicat en l'apartat.

52. Comprova que els punts *A*(1, 0, 0), *B*(2, 5, 3), *C*(–2, –4, 7) i *D*(–1, –2, –5) no són coplanaris. Calcula el volum de la piràmide que defineixen i troba la distància entre les arestes *AB* i *CD*.

No són coplanaris, ja que $\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right] \neq 0$.

$\overrightarrow{AB} = (1,5,3);\ \overrightarrow{AC} = (-3,-4,7);\ \overrightarrow{AD} = (-2,-2,-5)$

$$\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right] = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ -3 & -4 & 7 \\ -2 & -2 & -5 \end{vmatrix} =$$

$$= 20 + 18 - 70 - 24 - 75 + 14 = -117$$

$$V = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right]\right| = \frac{1}{6} \cdot 117 = \frac{39}{2}\ u^3$$

Equació de la recta que conté l'aresta *AB*:

r: $(x, y, z) = (1, 0, 0) + \lambda(1, 5, 3)$

Equació de la recta que conté l'aresta *CD*:

r': $(x, y, z) = (-1, -2, -5) + \mu(1, 2, -12)$

Les rectes r i r' s'encreuen. Per qualsevol dels procediments analitzats en aquesta unitat s'obté:

$$d(r,r') = \frac{13\sqrt{510}}{170}$$

53. Determina la posició relativa de les rectes:

$$r: \frac{x+1}{-2} = \frac{y-1}{-1} = z+3$$

$$\text{i} \quad s: x = \frac{y+2}{3} = z-1$$

Si les rectes *r* i *s* s'encreuen, utilitza el producte mixt per calcular la distància que les separa.

Les rectes *r* i *s* s'encreuen.

$$\overrightarrow{PQ} = (1,-3,4);\ \vec{u} = (-2,-1,1);\ \vec{v} = (1,3,1)$$

$$d(r,s) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{PQ}, \vec{u}, \vec{v}\right]\right|}{\left|\vec{u} \times \vec{v}\right|}$$

$$\left[\overrightarrow{PQ}, \vec{u}, \vec{v}\right] = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 24 - 3 + 4 - 6 - 3 = -33$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2} & \overrightarrow{e_3} \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -\overrightarrow{e_1} - 6\overrightarrow{e_3} + \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3} + 2\overrightarrow{e_2} - 3\overrightarrow{e_1} = -4\overrightarrow{e_1} + 3\overrightarrow{e_2} - 5\overrightarrow{e_3}$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = (-4,3,-5) \rightarrow \left|\vec{u} \times \vec{v}\right| = 5\sqrt{2}$$

$$d(r,s) = \frac{33}{5\sqrt{2}} = \frac{33\sqrt{2}}{10}$$

54. Calcula l'àrea total i el volum del paral·lelepípede que es pot obtenir a partir dels vectors $\vec{u}$ = (2, –1, 0), $\vec{v}$ = (1, 2, –3) i $\vec{u} \times \vec{v}$. De quin tipus de paral·lelepípede es tracta?

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2} & \overrightarrow{e_3} \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= 3\overrightarrow{e_1} + 4\overrightarrow{e_3} + \overrightarrow{e_3} + 6\overrightarrow{e_2} = 3\overrightarrow{e_1} + 6\overrightarrow{e_2} + 5\overrightarrow{e_3}$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = (3,6,5)$$

Anomenem $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} = (3,6,5)$

Es compleix que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. per tant, els vectors $\vec{u}$, $\vec{v}$ i w verifiquen:

a) Són perpendiculars dos a dos
b) Tenen el mòdul diferent

$$|\vec{u}| = \sqrt{5};\ |\vec{v}| = \sqrt{14};\ |\vec{w}| = \sqrt{70}$$

En conseqüència, el paral·lelepípede és un ortòedre.

$$A_t = 2\left(\sqrt{5} \cdot \sqrt{14} + \sqrt{5} \cdot \sqrt{70} + \sqrt{14} \cdot \sqrt{70}\right) =$$

$$= 2\sqrt{70}\left(1 + \sqrt{5} + \sqrt{14}\right) u^2 \rightarrow A_t \simeq 116{,}8\ u^2$$

$$V = \sqrt{5} \cdot \sqrt{14} \cdot \sqrt{70} = 70\ u^3$$

55. Els punts *O*(0, 0, 0), *P*(2, 3, –1) i *Q*(1, –2, 3) són tres vèrtexs d'una piràmide. Quina és la condició analítica que han de verificar les coordenades (*x*, *y*, *z*) del quart vèrtex *R* per tal que el volum d'aquesta piràmide sigui 14 u^3? Fes-ne la interpretació geomètrica.

$$V = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}, \overrightarrow{OR}\right]\right|;\ V = 14\ u^3$$

$$\overrightarrow{OP} = (2,3,-1)\quad \overrightarrow{OQ} = (1,-2,3)\quad \overrightarrow{OR} = (x,y,z)$$

$$\left[\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}, \overrightarrow{OR}\right] = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ x & y & z \end{vmatrix} =$$

$$= -4z - y + 9x - 2x - 3z - 6y = 7x - 7y - 7z$$

$$\frac{1}{6}|7x - 7y - 7z| = 14 \rightarrow |7x - 7y - 7z| = 84$$

$$7x - 7y - 7z = 84 \rightarrow x - y - z - 12 = 0$$

$$7x - 7y - 7z = -84 \rightarrow x - y - z + 12 = 0$$

Es tracta de dos plans que són paral·lels entre si i paral·lels al pla determinat pels punts *O*, *P* i *Q*. La distància entre cadascun d'aquests plans i el pla definit pels punts *O*, *P* i *Q* és precisament l'altura de la piràmide corresponent.

Acabem

1. **Troba la distància del punt (3, 4, 5) a la recta d'equació**

$$\frac{x+1}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z+5}{-1}$$

$$d(P,r)=\frac{\left|\vec{u}\times\overrightarrow{QP}\right|}{|\vec{u}|}$$

amb $\vec{u}=(1,2,-1);\ Q=(-1,-2,-5);\ P=(3,4,5)$

$$\overrightarrow{QP}=(4,6,10)$$

$$\vec{u}\times\overrightarrow{QP}=\begin{vmatrix}\vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3\\ 1 & 2 & -1\\ 4 & 6 & 10\end{vmatrix}=$$

$$=20\vec{e}_1+6\vec{e}_3-4\vec{e}_2-8\vec{e}_3-10\vec{e}_2+6\vec{e}_1=$$

$$=26\vec{e}_1-14\vec{e}_2-2\vec{e}_3$$

$$\vec{u}\times\overrightarrow{QP}=(26,-14,-2)\rightarrow\left|\vec{u}\times\overrightarrow{QP}\right|=\sqrt{876}$$

$$|\vec{u}|=\sqrt{6}$$

$$d(P,r)=\frac{\sqrt{876}}{\sqrt{6}}=\sqrt{146}$$

2. **Es demana l'equació del pla que conté l'eix *OX* i dista 6 unitats del punt *P*(0, 10, 0).**

Equació general del pla: $Ax + By + Cz + D = 0$.
El pla conté l'eix $OX \rightarrow$ un dels punts del pla és l'origen de coordenades $\rightarrow D = 0$.
Vector associat al pla $\vec{n}=(A,B,C)$ és normal al vector $\vec{u}=(1,0,0)$, un dels vectors directors del pla.

$$\vec{n}\cdot\vec{u}=0\rightarrow A=0$$

Per tant, el pla que hem de trobar és de la forma $By + Cz = 0$.
Com que el punt $P(0, 10, 0)$ dista 6 unitats d'aquest pla, es compleix:

$$\frac{|B\cdot 10|}{\sqrt{B^2+C^2}}=6\rightarrow 10B=\pm 6\sqrt{B^2+C^2}\rightarrow$$

$$\rightarrow 100B^2=36\left(B^2+C^2\right)\rightarrow B=\pm\frac{3}{4}C$$

Hi ha dos plans que verifiquen les condicions establertes a l'enunciat d'aquest exercici:

$$\pi_1: 3y + 4z = 0 \text{ i } \pi_2: -3y + 4z = 0$$

3. **Determina un punt de la recta:**

$$r: (x, y, z) = (1, -1, -2) + \lambda(2, 3, 2)$$

que equidisti dels plans:

$$3x + 4y - 1 = 0 \text{ i } 4x - 3y - 1 = 0$$

És única la solució?

Interpreta geomètricament el resultat que has obtingut.

Les coordenades d'un punt genèric P de la recta *r* són:

$$P(x, y, z) \rightarrow P(1 + 2\lambda, -1 + 3\lambda, -2 + 2\lambda)$$

S'ha de verificar:

$$d(P, \pi_1) = (P, \pi_2)$$

$$\frac{|3(1+2\lambda)+4(-1+3\lambda)-1|}{5}=$$

$$=\frac{|4(1+2\lambda)-3(-1+3\lambda)-1|}{5}$$

$$|18\lambda-2|=|-\lambda+6| \begin{cases} 18\lambda-2=-\lambda+6\rightarrow\lambda=\dfrac{8}{19}\\[2mm] 18\lambda-2=\lambda-6\rightarrow\lambda=\dfrac{-4}{17}\end{cases}$$

$$\text{Si } \lambda=\frac{8}{19}\rightarrow P_1\left(\frac{35}{19},\frac{5}{19},\frac{-22}{19}\right)$$

$$\text{Si } \lambda=\frac{-4}{17}\rightarrow P_2\left(\frac{9}{17},\frac{-29}{17},\frac{-42}{17}\right)$$

Hi ha dos punt solució. Els plans π_1 y π_2 són perpendiculars i la recta *r* té un punt d'intersecció amb cadascun d'ells.

4. **Considera el punt *P*(1, 1, 3) i la recta:**

$$r: (x, y, z) = (\lambda, 2 + \lambda, 2\lambda)$$

Troba:

***a*) L'equació del pla perpendicular a la recta *r* que conté el punt *P*.**

L'equació general d'un pla perpendicular a la recta *r* és $x + y + 2z + D = 0$. Com que aquest pla ha de contenir el punt $P(1,1,3)$, es compleix:

$$1 + 1 + 6 + D = 0 \rightarrow D = -8 \rightarrow$$
$$\rightarrow x + y + 2z - 8 = 0$$

***b*) El punt intersecció d'aquest pla amb la recta *r*.**

$$x = \lambda;\ y = 2 + \lambda;\ z = 2\lambda;\ x + y + 2z - 8 = 0$$

El compliment simultani de les quatre equacions ens duu a una altra equació que ens permet trobar el valor del paràmetre λ que correspon al punt d'intersecció entre la recta i el pla:

$$\lambda + 2 + \lambda + 4\lambda - 8 = 0 \rightarrow \lambda = 1$$
$$\lambda = 1 \rightarrow x = 1,\ y = 3,\ z = 2$$

El punt és $P'(1, 3, 2)$.

***c*) La distància del punt *P* a la recta *r*.**

$$d(P,r) = d(P,P') = |\overrightarrow{PP'}| = \sqrt{5}$$

5. Donades les rectes:

$$r\colon x = y = z$$
$$\text{i } s\colon (x, y, z) = (1, 1, -1) + \lambda(2, -1, 1)$$

es demana:

***a*) L'equació de la recta perpendicular a *r* i a *s*.**

Un punt P genèric de la recta r és $P(\mu, \mu, \mu)$ i un punt P' genèric de la recta s,

$$P'(1 + 2\lambda, 1 - \lambda, -1 + \lambda).$$

El vector

$$\overrightarrow{PP'} = (1+2\lambda-\mu, 1-\lambda-\mu, -1+\lambda-\mu)$$

ha de ser perpendicular al vector $\vec{u} = (1,1,1)$ i al vector $\vec{v} = (2,-1,1)$.

Per tant: $\overrightarrow{PP'} \cdot \vec{u} = 0$ i $\overrightarrow{PP'} \cdot \vec{v} = 0$.

Les dues igualtats anteriors ens condueixen al sistema:

$$\begin{cases} 2\lambda - 3\mu = -1 \\ 3\lambda - \mu = 0 \end{cases}$$

la solució del qual és $\lambda = \dfrac{1}{7},\ \mu = \dfrac{3}{7}$.

Per tant, tenim que:

$$P\left(\frac{3}{7},\frac{3}{7},\frac{3}{7}\right);\ P'\left(\frac{9}{7},\frac{6}{7},\frac{-6}{7}\right);\ \overrightarrow{PP'} = \left(\frac{6}{7},\frac{3}{7},\frac{-9}{7}\right)$$

La recta perpendicular a les rectes r i s és la recta que conté els punt P i P'. Té per equació:

$$(x,y,z) = \left(\frac{3}{7},\frac{3}{7},\frac{3}{7}\right) + \lambda(2,1,-3)$$

***b*) La distància entre les rectes *r* i *s*.**

$$d(r,s) = d(PP') = |\overrightarrow{PP'}| = \frac{\sqrt{126}}{7} = \frac{3\sqrt{14}}{7}$$

6. Determina els vectors de mòdul 2 que són alhora perpendiculars als vectors (2, –2, 3) i (3, –3, 2).

Si representem per $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ un d'aquests vectors, s'ha de complir alhora:

$$(v_1, v_2, v_3) \cdot (2, -2, 3) = 0 \rightarrow 2v_1 - 2v_2 + 3v_3 = 0$$
$$(v_1, v_2, v_3) \cdot (3, -3, 2) = 0 \rightarrow 3v_1 - 3v_2 + 2v_3 = 0$$
$$|\vec{v}| = 2 \rightarrow v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = 4$$

La solució del sistema format per aquestes tres equacions és: $v_3 = 0,\ v_1 = v_2 = \pm\sqrt{2}$

Hi ha dos vectors que verifiquen les condicions de l'enunciat de l'exercici:

$$\vec{v}_1 = \left(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0\right) \text{ i } \vec{v}_2 = \left(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 0\right)$$

7. Calcula l'angle que formen les rectes:

$$r: \frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{z+1}{5}$$
i *s*: (*x*, *y*, *z*) = (1, 2, –3) + λ(–3, –4, 5)

El vector director de la recta r és $\vec{u} = (3,4,5)$ i el de la recta s, $\vec{v} = (-3,-4,5)$.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = -9 - 16 + 25 = 0$$

Els dos vectos són perpendicular $\rightarrow \alpha = 90º$

8. Calcula l'àrea del triangle que té com a vèrtexs els punts *O*(0, 0, 0), *P*(1, 1, 0) i *Q* punt intersecció de la recta (*x*, *y*, *z*) = (–1 + 2λ, –1 + + 3λ, –2 + λ) amb el pla *XY*.

Q: punt intersecció de la recta $(x, y, z) =$ $= (-1 + 2\lambda, -1 + 3\lambda, -2 + \lambda)$ amb el pla $z = 0$.
$-2 + \lambda = 0 \rightarrow \lambda = 2 \rightarrow Q(3, 5, 0)$

$A = \dfrac{1}{2}|\overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OQ}|$, amb $\overrightarrow{OP} = (1,1,0)$ i $\overrightarrow{OQ} = (3,5,0)$

$$\overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OQ} = \begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 5\vec{e_3} - 3\vec{e_3} = 2\vec{e_3}$$

$$\overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OQ} = (0,0,2) \rightarrow |\overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OQ}| = 2$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1\,u^2$$

9. Troba l'angle que formen les rectes:

$$r: x = y = z$$
$$\text{i } s: \begin{cases} x+z=1 \\ y=0 \end{cases}$$

$$s\begin{cases} x+z=1 \\ y=0 \end{cases} \rightarrow s:(x,y,z)=(1,0,0)+\mu(-1,0,1)$$

Vector director recta r: $\vec{u}=(1,1,1)$

Vector director recta s: $\vec{v}=(-1,0,1)$

Com que $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$, les dues rectes són perpendiculars $\rightarrow \alpha = 90º$.

10. Troba els vèrtexs de la piràmide triangular que determinen els plans

$y = 0$, $z = 0$, $x - y = 0$ i $3x + 2y + z - 15 = 0$

i calcula'n el volum.

Vèrtex $O\begin{cases} y=0 \\ z=0 \\ x-y=0 \end{cases}$

$x = y = z = 0 \rightarrow O(0, 0, 0)$

Vèrtex $A\begin{cases} y=0 \\ z=0 \\ 3x+2y+z-15=0 \end{cases}$

$x = 5$, $y = z = 0 \rightarrow A(5, 0, 0)$

Vèrtex $B\begin{cases} y=0 \\ x-y=0 \\ 3x+2y+z-15=0 \end{cases}$

$x = y = 0$, $z = 15 \rightarrow B(0, 0, 15)$

Vèrtex $C\begin{cases} z=0 \\ x-y=0 \\ 3x+2y+z-15=0 \end{cases}$

$x = y = 3$, $z = 0 \rightarrow C(3, 3, 0)$

El volum de la piràmide es calcula:

$$V=\frac{1}{6}\left|\left[\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right]\right|,\text{ on } \begin{matrix} \vec{u}=\overrightarrow{OA}=(5,0,0) \\ \vec{v}=\overrightarrow{OB}=(0,0,15) \\ \vec{w}=\overrightarrow{OC}=(3,3,0) \end{matrix}$$

$$\left[\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right]=\begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 15 \\ 3 & 3 & 0 \end{vmatrix}=225$$

$$V=\frac{1}{6}\cdot 225=\frac{75}{2}=37{,}5\ u^3$$

11. Anomenem pla paral·lel mitjà a dos plans paral·lels aquell pla els punts del qual equidisten d'aquests dos plans. Determina l'equació del pla paral·lel mitjà als plans $2x + 2y + z - 4 = 0$ i $2x + 2y + z + 10 = 0$.

L'equació del pla que ens demanen ha de ser del tipus $2x + 2y + z + D = 0$.

Si $P(x, y, z)$ és un punt d'aquest pla, s'ha de complir la igualtat:

$$d(P, \pi_1) = d(P, \pi_2)$$

$$\frac{|2x+2y+z-4|}{3}=\frac{|2x+2y+z+10|}{3}$$

$$|2x+2y+z-4|=|2x+2y+z+10|$$

$$2x + 2y + z - 4 = -2x - 2y - z - 10$$

$$4x + 4y + 2z + 6 = 0 \rightarrow 2x + 2y + z + 3 = 0$$

12. Troba la condició analítica que verifiquen tots els punts de $\mathbb{R}^3$ que disten 2 unitats del pla d'equació $3x + y - z = 0$.

Representem per $P(x, y, z)$ un d'aquests punts.

$$\frac{|3x+y-z|}{\sqrt{11}}=2 \begin{matrix} \nearrow 3x+y-z-2\sqrt{11}=0 \\ \searrow 3x+y-z+2\sqrt{11}=0 \end{matrix}$$

Són punts que pertanyen a dos plans paral·lels al pla que ens donen i que es trobem a distància 2 (equidisten) d'aquest pla, que és el pla paral·lel mitjà dels altres dos.

13. Determina l'angle format per:

***a*) La recta $x = y = \frac{z}{2}$ i el pla $y = 0$.**

$\vec{u}=(1,1,2)$

$\vec{n}=(0,1,0)$

$$\sin\alpha=\frac{|\vec{u}\cdot\vec{n}|}{|\vec{u}||\vec{n}|}=\frac{1}{\sqrt{6}}\rightarrow\alpha=24{,}1°$$

***b*) Els plans $3x - 5 = 0$ i $2x - y + z + 2 = 0$.**

$\vec{n}_1=(3,0,0)$; $\vec{n}_2=(2,-1,1)$

$$\cos\alpha=\frac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}=\frac{6}{3\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{3}\rightarrow\alpha=35{,}3°$$

14. Calcula la distància del punt $P(3, -5, 6)$:

***a*) A l'origen de coordenades.**

$$d(O,P)=|\overrightarrow{OP}|=\sqrt{70}$$

***b*) A cadascun dels plans *XY*, *XZ* i *YZ*.**

pla XY: 6
pla XZ: 5
pla YZ: 3

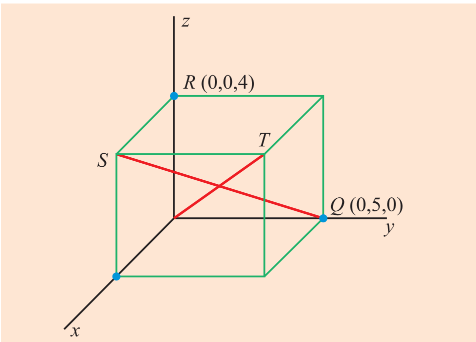
c) **A cadascun dels tres eixos de coordenades.**

$$\text{eix } OX: d_1 = \sqrt{y^2 + z^2} = \sqrt{61}$$

$$\text{eix } OY: d_2 = \sqrt{x^2 + z^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

$$\text{eix } OZ: d_3 = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{34}$$

15. *a*) **Calcula l'àrea total i el volum del paral·lelepípede generat pels vectors $\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}$ i $\overrightarrow{OR}$ de la figura 12.36.**



$$A = 2\left|\overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OR}\right| + 2\left|\overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OQ}\right| + 2\left|\overrightarrow{OQ} \times \overrightarrow{OR}\right|$$

$$A = 2 \cdot 12 + 2 \cdot 15 + 2 \cdot 20 = 94\ u^2$$

$$V = \left|\left[\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}, \overrightarrow{OR}\right]\right|$$

$$V = 3 \cdot 5 \cdot 4 = 60\ u^3$$

Nota: cal observar que l'àrea i el volum d'aquest ortòedre es poden determinar de manera molt senzilla, ja que se'n coneixen les tres dimensions.

b) **Determina l'angle que formen les rectes *OT* i *QS*.**

$$\overrightarrow{OT} = (3, 5, 4)$$

$$\overrightarrow{SQ} = (-3, 5, -4)$$

$\overrightarrow{OT} \cdot \overrightarrow{SQ} = -9 + 25 - 16 = 0 \rightarrow$ les rectes *OT* i *SQ* són perpendiculars $\rightarrow \alpha = 90°$.

16. Determina l'equació dels plans de vector associat $\vec{n}$ = (1, 2, –3) i que disten 3 unitats de l'origen de coordenades.

Els plans de vector associat $\vec{n} = (1, 2, -3)$ són de la forma $x + 2y - 3z + D = 0$.

La distància de l'origen de coordenades a un d'aquest plans és 3. Aleshores:

$$\frac{|D|}{\sqrt{14}} = 3 \begin{cases} D = 3\sqrt{14} \\ D = -3\sqrt{14} \end{cases}$$

Hi ha dos plans solució:

$$x + 2y - 3z + 3\sqrt{14} = 0 \text{ ; } x + 2y - 3z - 3\sqrt{14} = 0$$

17. Calcula l'àrea total i el volum de la piràmide limitada pels plans $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ i $2x + 3y + 4z - 12 = 0$.

Els vèrtexs de la piràmide són els punts:

$O(0, 0, 0)$ $A(6, 0, 0)$ $B(0, 4, 0)$ i $C(0, 0, 3)$

Àrea de la piràmide:

$$A = \frac{6 \cdot 3}{2} + \frac{6 \cdot 4}{2} + \frac{4 \cdot 3}{2} + \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| =$$

$$= 27 + \frac{\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|}{2}$$

$$\overrightarrow{AB} = (-6, 4, 0); \ \overrightarrow{AC} = (-6, 0, 3)$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ -6 & 4 & 0 \\ -6 & 0 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 12\vec{e}_1 + 24\vec{e}_3 + 18\vec{e}_2 \rightarrow (12, 18, 24)$$

$$\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{1044} = 6\sqrt{29}$$

$$A = 27 + \frac{6\sqrt{29}}{2} = 27 + 3\sqrt{29}\ u^2$$

Volum de la piràmide:

$$V = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\right]\right|$$

$$\left[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\right] = \begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 72$$

$$V = \frac{1}{6} \cdot 72 = 12\ u^3$$

18. Esbrina la longitud del segment projecció ortogonal del segment que té com a extrems els punts *A*(2, 4, 1) i *B*(1, –2, 5) sobre el pla $2x + y - z = 0$.

Si representem per *l* la longitud del segment, es compleix:

$$l = \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \cos\ c$$

on α és l'angle que forma la recta que conté els punts *A* i *B* amb el pla $2x + y - z = 0$.

$$\sin \alpha = \frac{\left|\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\vec{n}\right|}, \text{ amb } \overrightarrow{AB} = (-1, -6, 4) \text{ i } \vec{n} = (2, 1, -1)$$

$$\sin\alpha = \frac{12}{\sqrt{53}\cdot\sqrt{6}}$$

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{\frac{174}{318}} = \sqrt{\frac{29}{53}}$$

$$l = |\overline{AB}|\cdot\cos\alpha = \sqrt{53}\cdot\frac{\sqrt{29}}{\sqrt{53}} = \sqrt{29}$$

19. Quina és la condició que han de verificar els vectors associats a dos plans que són perpendiculars? Expressa-la analíticament utilitzant els seus components.

Els vectors associats també han de ser perpendiculars: $\vec{n}\cdot\vec{n}\,' = 0$

pla π_1: $Ax + By + Cz + D = 0 \rightarrow \vec{n} = (A,B,C)$

pla π_2: $A'x + B'y + C'z + D' = 0 \rightarrow \vec{n}\,' = (A',B',C')$

$$\vec{n}\cdot\vec{n}\,' = 0 \rightarrow A\cdot A' + B\cdot B' + C\cdot C' = 0$$

20. Troba l'equació de la recta projecció ortogonal de la recta (x, y, z) = (1, –2, –4) + + λ(3, 2, –1) sobre el pla $3x - 2y + z - 2 = 0$.

Determinem l'equació del pla que conté la recta (x, y, z) = (1, –2, –4) + λ(3, 2, –1) i és perpendicular al pla $3x - 2y - z - 2 = 0$.

D'aquest pla, en coneixem el punt (1, –2, –4) i dos vectors directors: (3, 2, –1) i (3, –2, 1)

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z+4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow y + 2z + 10 = 0$$

La recta que ens demanen és la recta intersecció dels plans $3x - 2y + z - 2 = 0$ i

$$y + 2z + 10 = 0.$$

$$\begin{cases} 3x - 2y + z - 2 = 0 \\ y + 2z + 10 = 0 \end{cases} \rightarrow (x,y,z) =$$

$$= (-6,-10,0) + \mu(-5,-6,3)$$

21. Donats els vectors $\vec{u}$ = (3, –2, 4) i $\vec{v}$ = (1, 4, –2), troba:

***a*) El seu producte vectorial.**

$$\vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 3 & -2 & 4 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= 4\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 + 12\vec{e}_3 + 2\vec{e}_3 + 6\vec{e}_2 - 16\vec{e}_1 =$$

$$= -12\vec{e}_1 + 10\vec{e}_2 + 14\vec{e}_3$$

$$\vec{u}\times\vec{v} = (-12,10,14)$$

***b*) Un vector unitari perpendicular als dos vectors.**

$$|\vec{u}\times\vec{v}| = \sqrt{440} = 2\sqrt{110}$$

Hi ha dos vectors unitaris que compleixen aquesta condició:

– El que té la mateixa direcció i el mateix sentit que el vector $\vec{u}\times\vec{v}$

$$\frac{1}{2\sqrt{110}}(-12,10,14) = \left(\frac{-6}{\sqrt{110}},\frac{5}{\sqrt{110}},\frac{7}{\sqrt{110}}\right)$$

– El que té la mateixa direcció que el vector $\vec{u}\times\vec{v}$, però el sentit contari

$$-\frac{1}{2\sqrt{110}}(-12,10,14) = \left(\frac{6}{\sqrt{110}},\frac{-5}{\sqrt{110}},\frac{-7}{\sqrt{110}}\right)$$

***c*) L'àrea del paral·lelogram que es pot dibuixar a partir de $\vec{u}$ i $\vec{v}$.**

$$A = |\vec{u}\times\vec{v}| = 2\sqrt{110}\ u^2$$

***d*) El volum del paral·lelepípede que s'obté a partir dels vectors $\vec{u}$, $\vec{v}$ i $\vec{u}$ x $\vec{v}$.**

$$V = 2\sqrt{110}\cdot 2\sqrt{110} = 440\ u^3$$

22. Calcula l'angle que formen dues de les diagonals d'un cub. Per més comoditat, situa un dels vèrtexs del cub a l'origen de coordenades i considera'l d'aresta unitat.

Considerem la recta r que conté la diagonal determinada pels vèrtexs (0, 0, 0) i (1, 1, 1), i la recta s que conté la diagonal determinada pels vèrtex (1, 0, 0) i (0, 1, 1).

Vector director de la recta $r \rightarrow \vec{u} = (1,1,1)$

Vector director de la recta $s \rightarrow \vec{v} = (-1,1,1)$

L'angle α que formen les diagonals del cub verifica:

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \frac{1}{3} \rightarrow \alpha = 70{,}53^\circ$$

23. Troba els punts de la recta que passa per *A*(–1, 0, 1) i *B*(1, 2, 3) que distin 3 unitats del punt *C*(2, –1, 1). Interpreta geomètricament el nombre de solucions obtingudes.

L'equació de la recta r que conté els punts A i B és: (x, y, z) = (–1, 0, 1) + λ(1, 1, 1) $\rightarrow$ (x, y, z) = = (–1 + λ, λ, 1 + λ)

La distància entre el punt C (2, –1, 1) i un punt P qualsevol de la recta r ve donada per l'expressió:

$$d(C,P) = |\overrightarrow{CP}| = \sqrt{(\lambda-3)^2 + (\lambda+1)^2 + \lambda^2}$$

Per tant, per a un punt P de r que es troba a distància 3 del punt C, es compleix:

$$\sqrt{(\lambda-3)^2 + (\lambda+1)^2 + \lambda^2} = 3 \rightarrow$$

$$\rightarrow 3\lambda^2 - 4\lambda + 1 = 0 \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Com que el punt C no pertany a r, hi ha dos punts que verifiquen la condició de l'enunciat:

$$\lambda_1 = 1 \rightarrow P_1(0, 1, 2)$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{3} \rightarrow P_2\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$$

24. Determina la distància de la recta:

$$\boldsymbol{r: \begin{cases} x - y = 4 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases}}$$

a cadascun dels eixos de coordenades.

La recta r es pot expressar en la forma:

$$r: (x, y, z) = (2, 2, 0) + \lambda(1, -1, 1)$$

D'altra banda, l'eix OX té per equació:

$$(x, y, z) = \mu(1, 0, 0)$$

La distància entre la recta r i l'eix OX es pot calcular mitjançant l'expressió:

$$d = \frac{\left|\left[\overrightarrow{PQ}, \vec{u}, \vec{v}\right]\right|}{|\vec{u} \times \vec{v}|}$$

amb $P(0,0,0)$, $Q(2,2,0)$, $\vec{u} = (1,-1,1)$, $\vec{v} = (1,0,0)$

Fent els càlculs, s'obté:

$$\left|\left[\overrightarrow{PQ}, \vec{u}, \vec{v}\right]\right| = 2$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = (0,1,1) \rightarrow |\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{2}$$

$$d = \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

Amb el mateix procediment es calculen les altres dues distàncies que es demanen. S'obtenen els resultats següents:

Distància entre la recta r i l'eix $OY \rightarrow \sqrt{2}$

Distància entre la recta r i l'eix $OZ \rightarrow 2\sqrt{2}$

25. Donat el triangle que té com a vèrtexs els punts *A*(–3, 4, 0), *B*(3, 6, 3) i *C*(–1, 2, 1), troba la mesura dels seus angles. Pertany l'origen de coordenades al pla que conté aquest triangle?

$$\overrightarrow{AB} = (6,2,3);\ \overrightarrow{AC} = (2,-2,1)$$

$$\cos\widehat{A} = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|} = \frac{11}{\sqrt{49} \cdot \sqrt{9}} = \frac{11}{21} \rightarrow \widehat{A} = 58{,}4°$$

Pel mateix procediment s'obté:

$$\widehat{B} = 25{,}2° \text{ i } \widehat{C} = 96{,}4°$$

Equació del pla que conté els punts A, B i C

$$\begin{vmatrix} x+3 & y-4 & z \\ 6 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow x - 2z + 3 = 0$$

No hi pertany, ja que $D \neq 0$.

26. Donades les rectes:

$$\boldsymbol{r: x - 1 = y + 2 = z - 3}$$
$$\textbf{i } \boldsymbol{s: (x, y, z) = (1 - \lambda, 2\lambda, 3 + 2\lambda)}$$

localitza dos punts, un de cada recta, tals que la distància entre ells sigui mínima.

Un punt P genèric de la recta r ès de la forma:

$$P(1 + \lambda', -2 + \lambda', 3 + \lambda')$$

i un punt P' genèric de la recta s té per coordenades:

$$P'(1 - \lambda, 2\lambda, 3 + 2\lambda)$$

Perquè es verifiquin les condicions de l'enunciat cal localitzar $P \in r$ i $P' \in s$ tals que el vector $\overrightarrow{PP'}$ sigui perpendicular a cadascun dels vectors directors $\vec{u} = (1,1,1)$ i $\vec{v} = (-1,2,2)$ de les dues rectes.

Com que $\overrightarrow{PP'} = (-\lambda - \lambda',\ 2 - \lambda + 2\lambda',\ -\lambda + 2\lambda')$,

$$\overrightarrow{PP'} \cdot \vec{u} = 0 \rightarrow 3\lambda - 3\lambda' = 2$$

$$\overrightarrow{PP'} \cdot \vec{v} = 0 \rightarrow 3\lambda - 9\lambda' = 4$$

El sistema:

$$\begin{cases} 3\lambda - 3\lambda' = 2 \\ 3\lambda - 9\lambda' = 4 \end{cases}$$

té per solucions $\lambda = \frac{1}{3}$ i $\lambda' = -\frac{1}{3}$.

En conseqüència:

$$P\left(\frac{4}{3}, \frac{-5}{3}, \frac{10}{3}\right) \in r$$

$$P'\left(\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{7}{3}\right) \in .$$

27. Els punts $A(1, 2, 3)$, $B(2, 4, -1)$ i $C(3, 2, 3)$ són tres vèrtexs consecutius d'un paral·lelogram. Calcula'n l'àrea i la mesura dels angles que formen les seves diagonals. De quin tipus de paral·lelogram es tracta?

$$\overrightarrow{AB} = (1,2,-4) \quad \overrightarrow{AC} = (2,0,0)$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 2 & -4 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -8\vec{e}_2 - 4\vec{e}_3 \rightarrow \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (0,-8,-4)$$

$$A = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \sqrt{64+16} = 4\sqrt{5}\ u^2$$

Representem per $D(x, y, z)$ el quart vèrtex del paral·lelogram.

Es compleix:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \rightarrow (1,2,-4) = (3-x, 2-y, 3-z)$$

$$1 = 3 - x \rightarrow x = 2$$
$$2 = 2 - y \rightarrow y = 0$$
$$-4 = 3 - z \rightarrow z = 7$$

Per tant, $D(2, 0, 7)$
Angle que formen les diagonals:

$$\overrightarrow{AC} = (2,0,0);\ \overrightarrow{BD} = (0,-4,8)$$

$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0 \rightarrow$ les diagonals són perpendiculars $\rightarrow \alpha = 90º$

El paral·lelogram és un rombe, ja que:
- té les diagonals perpendiculars
- els costats no són perpendiculars $(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} \neq 0)$
- els costats són iguals $(|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{CD}| = |\overrightarrow{DA}|)$

28. Troba la distància del punt $P(1, 2, -4)$ al pla que conté la recta $r: \frac{x-1}{-z} = y = \frac{z-1}{3}$ i és paral·lel a la recta $s: \begin{cases} x - 2y - 1 = 0 \\ y - 2z + 1 = 0 \end{cases}$

Equació vectorial de la recta s:

$$(x, y, z) = (-1, -1, 0) + \mu(4, 2, 1)$$

Equació general del pla π que ens demanen:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z-1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 5x - 14y + 8z - 13 = 0$$

$$d(P,\pi) = \frac{|5-28-32-13|}{\sqrt{285}} = \frac{68}{\sqrt{285}} = \frac{68\sqrt{285}}{285}$$

29. Determina l'angle que forma la recta:

$$r: x + 1 = \frac{y-2}{3} = \frac{z+1}{2}$$

amb el pla π que conté el punt (2, 1, 1) i la recta s: $x - 1 = y = z + 2$.

Equació general del pla π:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z-1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow x - y - 1 = 0$$

Hem considerat com a vectors directors del pla π el vector director de la recta s i el vector determinat pels punts (2, 1, 1) i (1, 0, –2), ambdós pertanyents a π.

$$\sin\alpha = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{n}|}{|\vec{u}||\vec{n}|} = \frac{1}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{7} \rightarrow \alpha = 22{,}2°$$

On $\vec{u} = (1,3,2)$ és un vector director de la recta r i $\vec{n} = (1,-1,0)$, el vector associat a π.

30. Calcula la distància entre el punt $P(1, 2, -1)$ i el punt P' simètric de P respecte del pla que conté el punt (4, 1, 0) i és paral·lel al pla $x - 3y + z - 5 = 0$.

Equació del pla π que conté el punt (4, 1, 0) i és paral·lel al pla $x - 3y + z - 5 = 0$:

$$x - 3y + z + D = 0 \xrightarrow{(4,1,0)} 4 - 3 + D = 0 \rightarrow D = -1$$
$$x - 3y + z - 1 = 0$$

Equació de la recta r que passa per P i és perpendicular a π:

$$(x, y, z) = (1, 2, -1) + \lambda(1, -3, 1)$$
$$(x, y, z) = (1 + \lambda, 2 - 3\lambda, -1 + \lambda)$$

Punt intersecció Q entre la recta r i el pla π:

$$1 + \lambda - 3(2 - 3\lambda) + (-1) + \lambda - 1 = 0 \rightarrow$$
$$\rightarrow \lambda = \frac{7}{11} \rightarrow Q\left(\frac{18}{11}, \frac{1}{11}, \frac{-4}{11}\right)$$

El punt Q és punt mitjà entre P i P'. Aleshores:

$$d(P,P') = 2d(PQ) = 2|\overrightarrow{PQ}| = 2\cdot\frac{7\sqrt{11}}{11} = \frac{14\sqrt{11}}{11}$$

31. Calcula l'àrea del triangle els vèrtexs del qual són els punts intersecció del pla 2*x* + *y* + 3*z* = = 6 amb els eixos de coordenades. Escriu l'equació de la recta que conté cadascun dels costats d'aquest triangle.

Vèrtexs del triangle:

$$A(3, 0, 0) \quad B(0, 6, 0) \quad C(0, 0, 2)$$

$$A = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|$$

$$\overrightarrow{AB} = (-3,6,0) \quad \overrightarrow{AC} = (-3,0,2)$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2} & \overrightarrow{e_3} \\ -3 & 6 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 12\overrightarrow{e_1} + 18\overrightarrow{e_3} + 6\overrightarrow{e_2}$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (12,6,18) \rightarrow \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{504} = 6\sqrt{14}$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{14} = 3\sqrt{14}\ u^2$$

Recta que conté el costat *AB*:

$$(x, y, z) = (3, 0, 0) + \lambda_1(-1, 2, 0)$$

Recta que conté el costat *AC*:

$$(x, y, z) = (3, 0, 0) + \lambda_2(-3, 0, 2)$$

Recta que conté el costat BC:

$$(x, y, z) = (0, 0, 2) + \lambda_3(0, -3, 1)$$

McGraw-Hill Interamericana
de España, S. A. U.
A Subsidiary of The **McGraw-Hill** Companies

ISBN: 84-481-3899-6