## Comencem

- **La funció $f(x) = x^2$ és decreixent en l'interval $(-\infty, 0)$. Fes un raonament com el que hem fet anteriorment per determinar on decreix amb més rapidesa, si ens movem prop de $x = -5$ o si ho fem prop de $x = -2$?**

  Prop de $x = -5$
  $x = -5{,}1 \rightarrow f(-5{,}1) = (-5{,}1)^2 = 26{,}01$
  $x = -4{,}9 \rightarrow f(-4{,}0) = (-4{,}9)^2 = 24{,}01$
  Augment de $x$: $-4{,}9 - (-5{,}1) = 0{,}2$
  Dimensions de $f(x)$: $24{,}01 - 26{,}01 = -2$

  Prop de $x = -2$
  $x = -2{,}1 \rightarrow f(-2{,}1) = (-2{,}1)^2 = 4{,}41$
  $x = -1{,}9 \rightarrow f(-1{,}9) = (-1{,}9)^2 = 3{,}61$
  Augment de $x$: $-1{,}9 - (-2{,}1) = 0{,}2$
  Dimensions de $f(x) = 3{,}61 - 4{,}41 = -0{,}8$

  Prop de $x = -5$, la funció disminueix 10 vegades el que augmenta $x$, mentre que prop de $x = -2$, la disminució de la funció és 4 vegades més gran que l'augment de $x$. Per tat, la funció $f(x) = x^2$ decreix amb més rapidesa prop de $x = -5$.

- **Representa gràficament la funció $f(x) = 2x - 3$. On creix més de pressa, en $x = 0$ o en $x = 3$? Passaria el mateix per a qualsevol altre valor de $x$? Raona la resposta.**

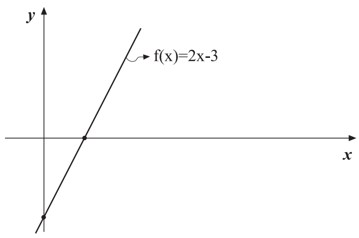


  Fig. 1.1

  El creixement d'aquesta funció és uniforme, independentment del valor de $x$ que es considera. Fixa't que:

  $f(x) = 2x - 3$
  $f(x + h) = 2(x + h) - 3 = 2x + 2h - 3$
  Augment de $x$: $x + h - x = h$
  Augment de $f(x) = 2x + 2h - 3 - (2x - 3) = 2h$

  Sigui quin sigui el valor de $x$, l'augment que experimenta la funció és el doble que l'augment de $x$.

## Exercicis

1. **La gràfica velocitat-temps corresponent a dos mòbils és la que pots veure a la dreta (fig. 1.3).**

   *a*) **Quina és la velocitat de cada mòbil a l'instant inicial, quan $t = 0$?**

   A l'instant inicial, $v_1 = v_2 = 0$.

   *b*) **Com pots veure, la velocitat de cada mòbil augmenta a mesura que passa el temps. En quin cas augmenta més de pressa? Per què?**

   La velocitat del mòbil 2 augmenta més de pressa, ja que per a qualsevol valor $t > 0$, es compleix $v_2 > v_1$.

   *c*) **Quin dels dos mòbils haurà recorregut una distància més gran després de 5 s d'haver començat el moviment?**

   El mòbil 2, ja que en tot moment $t > 0$ la seva velocitat és més gran.

2. **Quina és la velocitat mitjana del ciclista de l'exemple anterior durant els 10 s?**

$$v_m[0,10] = \frac{120-0}{10-0} = \frac{120}{10} = 12 \text{ m/s}$$

3. **A partir de la gràfica distància-temps següent (fig. 1.5), calcula en km/h:**

   *a*) **La velocitat mitjana del mòbil en cadascun dels intervals de temps [0, 2], [2, 3,5] i [3,5, 4,5].**

$$v_m[0,2] = \frac{120-0}{2-0} = \frac{120}{2} = 60 \text{ km/h}$$

$$v_m[2,\ 3{,}5] = \frac{320-120}{3{,}5-2} = \frac{180}{1{,}5} = 120 \text{ km/h}$$

$$v_m[3{,}5,\ 4{,}5] = \frac{387-300}{4{,}5-3{,}5} = \frac{87}{1} = 87 \text{ km/h}$$

   *b*) **La velocitat mitjana del mòbil durant les 4,5 h que ha durat el trajecte.**

$$v_m[0,4{,}5] = \frac{387-0}{4{,}5-0} = 86 \text{ km/h}$$

4. **La funció $f(x) = x^3 + 2$ sempre és creixent. Calcula'n la variació mitjana a cadascun dels intervals següents: [–3, –1], [0, 2] i [5,**

**7]. En quin dels tres intervals té un creixement més ràpid?**

Interval $[-3,-1]$: $\dfrac{f(-1)-f(-3)}{-1-(-3)}=\dfrac{1-(-25)}{-1+3}=\dfrac{26}{2}=13$

Interval $[0,2]$: $\dfrac{f(2)-f(0)}{2-0}=\dfrac{10-2}{2}=\dfrac{8}{2}=4$

Interval $[5,7]$: $\dfrac{f(7)-f(5)}{7-5}=\dfrac{345-127}{2}=\dfrac{218}{2}=109$

La funció $f(x) = x^3 + 2$ té el creixement més ràpid en l'interval [5,7].

**5. Demostra que la variació mitjana de la funció $f(x) = 3x + 1$ sempre és la mateixa, independentment de l'interval $[x_1, x_2]$ considerat.**

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{3x_2+1-(3x_1+1)}{x_2-x_1}=\frac{3x_2-3x_1}{x_2-x_1}=$$
$$=\frac{3(x_2-x_1)}{x_2-x_1}=3$$

En qualsevol interval [$x$1, $x$2] la variació mitjana de la funció és 3.

**6. Quant val la variació mitjana de la funció $f(x) = 5$ en qualsevol interval $[x_1, x_2]$?**

Val zero, ja que es tracta d'una funció constant.

**7. Calcula la variació mitjana de la funció $f(x) = -x^2 + 4x$ a l'interval [2,9, 3,1]. Creix o decreix aquesta funció al voltant de $x = 3$?**

$$\frac{f(3{,}1)-f(2{,}9)}{3{,}1-2{,}9}=\frac{2{,}79-3{,}19}{0{,}2}=\frac{0{,}4}{0{,}2}=2$$

**Fes-ne la representació gràfica i tot seguit comprova la teva resposta.**

Podem esperar que la funció $f(x) = -x^2 + 4x$ decreixi al voltant de $x = 3$. Ho comprovem a la gràfica de la funció.

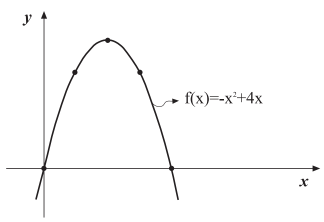


Fig. 1.2

**8. Representa gràficament la funció $d = 40t - 5t^2$ corresponent al moviment del cos de l'exemple anterior. Quant triga a assolir l'altura màxima? Quin és el valor d'aquesta altura? Quant triga a tornar al punt de llançament?**

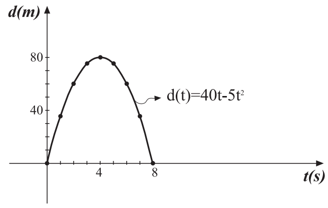


Fig. 1.3

El cos que es considera:

– Triga 4 s a assolir l'altura màxima.
– El valor d'aquesta altura és 80 m.
– Triga 8 s a tornar altre cop al punt de llançament.

**9. Calcula la velocitat d'aquest cos en els instants $t = 4$ s i $t = 8$ s. Interpreta'n els resultats obtinguts.**

$$v(a)=\lim_{t\to4}\frac{f(t)-f(4)}{t-4}=\lim_{t\to4}\frac{40t-5t^2-80}{t-4}=$$
$$=\lim_{t\to4}\frac{-5(t^2-8t+16)}{t-4}=\lim_{t\to4}\frac{-5(t-4)^2}{t-4}$$
$$=\lim_{t\to4}[-5(t-4)]=0$$
$$t=4s\to v(4)=0$$
$$v(8)=\lim_{x\to8}\frac{f(t)-f(8)}{t-8}=\lim_{t\to8}\frac{40t-5t^2-0}{t-8}=$$
$$=\lim_{x\to8}\frac{-5t(t-8)}{t-8}=\lim_{t\to8}(-5t)=-40$$
$$t=85\to v(8)=-40\text{ m/s}$$

Per a $t = 4$ s, el cos canvia el sentit del seu moviment. Passats 8 s, el cos torna a la posició de sortida. Fixa't que hi arriba a la mateixa velocitat amb què ha estat llançat, però movent-se en sentit contrari. D'aquí el signe menys de $v$ (8).

**10. On es troba el cos en els instants $t = 3$ s i $t = 5$ s? Quina és la seva velocitat en cadascun d'aquests instants?**

$t = 3$ s $\to d = f(3) = 75$ m.
$t = 5$ s $\to d = f(5) = 75$ m.
$t = 3$ s i $t = 5$ s $\to$ el cos es troba a la mateixa posició: a 75 m del punt de llançament.

$$v(3)=\lim_{t\to3}\frac{f(t)-f(3)}{t-3}=\lim_{t\to3}\frac{40t-5t^2-75}{t-3}=$$
$$=\lim_{t\to3}\frac{-5(t^2-8t+15)}{t-3}=\lim_{t\to3}\frac{-5(t-3)(t-5)}{t-3}=$$

$$\lim_{t\to3}[-5(t-5)] = -5\cdot(-2) = 10 \text{ m/s}$$

$$v(5) = \lim_{t\to5}\frac{f(t)-f(5)}{t-5} = \lim_{t\to5}\frac{40t-5t^2-75}{t-5} =$$

$$\lim_{t\to5}\frac{-5(t-3)(t-5)}{t-5} = \lim_{t\to5}[-5(t-3)] =$$

$$= -5\cdot2 = -10 \text{ m/s}$$

Naturalment, per a $t$ = 3 s, el cos està en trajectòria ascendent ($v$ > 0). En canvi, quan t = 5, el cos ja està en trajectòria descendent ($v$ < 0). En ambdós instants, el mòdul de la velocitat és el mateix: 10 m/s.

**11. Sabem que la funció $f(x) = -x^2 + 6x$ és decreixent al voltant de $x$ = 4. Quantifica aquest decreixement a partir del càlcul de $\lim_{x\to4}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}$. Interpreta'n el resultat obtingut.**

$$\lim_{x\to4}\frac{f(x)-f(4)}{x-4} = \lim_{x\to4}\frac{-x^2+6x-8}{x-4} =$$

$$= \lim_{x\to4}\frac{-(x-2)(x-4)}{x-4} = \lim_{x\to4}(2-x) = -2$$

Per a valors de $x$ pròxims a 4, la funció $f(x)$ disminueix de l'ordre de dues vegades el que augmenta $x$.

**12. Fes el mateix estudi de l'exercici anterior per a $x$ = 3.**

**Fixa't en la gràfica de la funció i interpreta el resultat que has obtingut.**

$$\lim_{x\to3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim_{x\to3}\frac{-x^2+6x-9}{x-3} =$$

$$= \lim_{x\to3}\frac{-(x-3)^2}{x-3} = \lim_{x\to3}(3-x) = 0$$

Als voltants de $x$ = 3, la funció pràcticament no varia.

**13. Representa gràficament la funció $f(x) = -2x + 3$. Calcula $f'(-2)$, $f'(0)$ i $f'(3)$. Interpreta'n els resultats.**

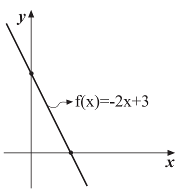


Fig. 1.4

$$f'(-2) = \lim_{h\to o}\frac{f(-2+h)-f(-2)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to0}\frac{-2(-2+h)+3-7}{h} = \lim_{h\to0}\frac{4-2h+3-7}{h}$$

$$= \lim_{h\to0}\frac{-2h}{h} = \lim_{h\to0} -2 = -2$$

També es verifica: $f'(0) = f'(3) = -2$.

La funció $f(x) = -2x + 3$ decreix sempre de la mateixa manera, és a dir, presenta un decreixement uniforme. En general, $f'(x_0) = 2$, $x_0 \in \mathbb{R}$.

**14. Donada la funció $f(x) = ax + b$, demostra que $f'(x_0) = a$, independentment del valor $x_0$ considerat.**

$$f'(x_0) = \lim_{h\to0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to0}\frac{a(x_0+h)+b-(ax_0+b)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to0}\frac{ax_0+ah+b-ax_0-b}{h} =$$

$$= \lim_{h\to0}\frac{ah}{h} = \lim_{h\to0} a = a$$

**15. Calcula, si és possible:**

***a*) $f'(8)$ si $f(x) = \sqrt{x+1}$**

$$f'(8) = \lim_{h\to0}\frac{f(8+h)-f(8)}{h} = \lim_{h\to0}\frac{\sqrt{8+h+1}-3}{h} =$$

$$= \lim_{h\to0}\frac{\sqrt{9+h}-3}{h} = \lim_{h\to0}\frac{\left(\sqrt{9+h}-3\right)\left(\sqrt{9+h}+3\right)}{h\left(\sqrt{9+h}+3\right)} =$$

$$= \lim_{h\to0}\frac{9+h-9}{h\left(\sqrt{9+h}+3\right)} = \lim_{h\to o}\frac{h}{h\left(\sqrt{9+h}+3\right)} =$$

$$= \lim_{h\to0}\frac{1}{\sqrt{9+h}+3} = \frac{1}{6}$$

***b*) $f'\,\frac{1}{2}$ si $f(x) = 4 - x^2$**

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = \lim_{h\to0}\frac{f\left(\frac{1}{2}+h\right)-f\left(\frac{1}{2}\right)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to0}\frac{4-\left(\frac{1}{2}+h\right)^2-\left(h-\frac{1}{h}\right)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to0}\frac{4-\frac{1}{4}-h-h^2-4+\frac{1}{4}}{h} = \lim_{h\to0}\frac{h(-1+h)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to0}(-1+h) = -1$$

*c*) **f'(0) si f(x) =** $\frac{1}{x}$

No existeix $f'(0)$, ja que $x = 0$ no pertany al domini de la funció $f(x)=\frac{1}{2}$ → no existeix $f(0)$.

**16. Representa gràficament la funció f(x) = x² – 2x + 4 i indica'n, a partir de la gràfica, els intervals de creixement i decreixement. Comprova que f'(1) = 0.**

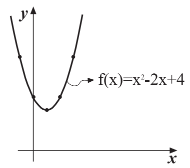


Fig. 1.5

Decreixent: (–∞, 1)
Creixent: (1, +∞)

$$f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(1+h)^2-2(1+h)+4-3}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{1+2h+h^2-2-2h+4-3}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{h^2}{h}=\lim_{h\to 0}h=0$$

**17. Sense fer-ne la representació gràfica, indica si la funció f(x) = (2 – x)² és creixent o decreixent en x = 6. Fes el mateix estudi en x = –1.**

$$f'(6)=\lim_{h\to 0}\frac{f(6+h)-f(6)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{4-4(6+h)+(6+h)^2-16}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{4-24-4h+36+12h+h^2-16}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h^2+8h}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(h+8)}{h}=\lim_{h\to 0}(h+8)=8$$

$\to f'(6) > 0 \to$ creixent en $x = 6$.

$$f'(-1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{4-4(-1+h)+(1+h)^2-9}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{4+4-4h+1-2h+h^2-9}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2-6h}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h(h-6)}{h}=\lim_{h\to 0}(h-6)=-6\to f^1(-1)<0$$

→ decreixent en $x = –1$

**18. Com ha de ser una funció perquè la derivada sigui nul·la en tots i cadascun dels punts del seu domini? Per què?**

La funció ha de ser constant, $f(x) = K$, $K\in\mathbb{R}$. És així perquè si una funció és constant, la seva variació és zero per a qualsevol valor de $x \in$ Df $= \mathbb{R}$.

**19. Calcula si és possible:**

*a*) **f'(–4) si f(x) =** $\sqrt{x}$

No és possible, ja que no existeix
$f(-4): f(-4)=\sqrt{-4}\notin\mathbb{R}$

*b*) **f'(1) si f(x) =** $\frac{x}{2}$

$$f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{2}{1+h}-2}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{2-2-2h}{1+h}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-2h}{h(1+h)}=\lim_{h\to 0}\frac{2}{1+h}=-2$$

*c*) **f'(0) si f(x) = 2x² + 1**

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2h^2+1-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2h^2}{h}=\lim_{h\to 0}2h=2\cdot 0=0$$

*d*) **f'(–2) si f(x) = 10x + 3**

$$f'(-2)=\lim_{h\to 0}\frac{f(-2+h)-f(-2)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{10(-2+h)+3-(-17)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-20+10h+3+17}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{10h}{h}=\lim_{h\to 0}10=10$$

**20. Calcula la funció derivada de cadascuna de les funcions següents:**

*a*) **f(x) = –x + 7**

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{-(-x+h)+7-(-x+7)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-x-h+7+x-7}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-h}{h}=\lim_{h\to 0}-1=-1$$

*b*) **f(x) = 1 – 2x²**

$$f(x) = \lim_{h\to 0} \frac{1-2(x+h)^2-(1-2x^2)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1-2(x^2+2xh+h^2)-1+2x^2}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1-2x^2-4xh-2h^2-1+2x^2}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-2(2x+h)}{h} = \lim_{h\to 0} -2(x+h) = -4x$$

*c*) **f(x) = $\frac{1}{x}$, $x \neq 0$**

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{x-x-h}{(x+h)\cdot x}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-h}{h(x+h)x} = \lim_{h\to 0} \frac{-1}{x(x+h)} = -\frac{1}{x^2}$$

*d*) **f(x) = $\frac{1}{x^2}$, $x \neq 0$**

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{(x+h)^2}-\frac{1}{x^2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{x^2-(x+h)^2}{x^2(x+h)^2}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x^2-x^2-2xh-h^2}{hx^2(x+h)^2} = \lim_{h\to 0} \frac{-h(2x+h)}{hx^2(x+h)^2} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-(2x+h)}{x^2(x+h)^2} = -\frac{2x}{x^4} = -\frac{2}{x^3}$$

*e*) **f(x) = $\sqrt{x}$, x > 0**

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\left(\sqrt{x+h}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

*f*) **f(x) = 3**

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{3-3}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$$

*g*) **f(x) = 3x² + 2x – 1**

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{3(x+h)^2+2(x+h)-1-(3x^2+2x-1)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{3x^2+6xh+h^2+2x+2h-1-3x^2-2x+1}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h(h+6x+2)}{h} = \lim_{h\to 0}(h+6x+2) = 6x+2$$

*h*) **f(x) = π**

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\pi-\pi}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$$

**21. Sense fer-ne la representació gràfica, determina els intervals de creixement i decreixement de la funció f(x) = –x² + 6x – 8. Quant val f'(3)?**

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{-(x+h)^2+6(x+h)-8-(-x^2+6x-8)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-x^2-2xh-h^2+6x+6h-8+x^2-6x+8}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-h^2-2xh+6h}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(-h-2x+6)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}(-h-2x+6) = -2x+6$$

$$f'(x) > 0 \rightarrow 2x+6 > 0 \rightarrow -2x > -6 \rightarrow 2x < 6 \rightarrow x < 3$$

$(-\infty, 3)$ funció creixent

$$f'(x) < 0 \rightarrow -2x+6 < 0 \rightarrow 2x < -6 \rightarrow 2x > 6 \rightarrow .$$

$(3, +\infty)$ funció decreixent

$$f'(3) = -2\cdot 3+6 = 0$$

**22. Donada la funció f(x) = 6 – x², calcula f'(–2) i f'(4). Indica si la funció és creixent o decreixent en x = –2 i en x = 4.**

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{6-(x+h)^2-(6-x^2)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{6-x^2-2xh-h^2-6+x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-h(-2x-h)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}(-2x-h) = -2x$$

$$f'(-2) = -2\cdot(-2) = 4 > 0 \rightarrow$$

la funció és creixent en $x = -2$

$$f'(4) = -2\cdot 4 = -8 < 0 \rightarrow$$

la funció és decreixent en $x = 4$

**23. Donada la funció f(x) = x⁴, calcula f'(x) de dues maneres diferents:**

*a*) **Aplicant la definicó de funció derivada.**

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^4-x^4}{x} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x^4+4x^3h+6x^2h^2+4xh^3+h^4-x^4}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h(hx^3+6x^2h+4xh^2+h^3)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}(4x^3+6x^2h+4xh^2+h^3) = 4x^3$$

*b*) **A partir de la segona regla que acabem de veure.**

$$f'(x) = 4x^3$$

**24. Calcula la funció derivada de cadascuna de les funcions següents:**

*a*) **$f(x) = \dfrac{1}{x^4}$**

$$f'(x) = -4x^{-5} = -\frac{4}{x^5}$$

*b*) **$f(x) = x^7$**

$$f'(x) = 7x^6$$

*c*) **$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$**

$$f'(x) = -\frac{1}{2}x^{-3/2} = -\frac{1}{2\sqrt{x^5}} = -\frac{1}{2x\sqrt{x}}$$

*d*) **$f(x) = \sqrt[3]{x^2}$**

$$f'(x) = \frac{2}{3}\cdot x^{-1/3} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

*e*) **$f(x) = \sqrt[3]{2}$**

$$f'(x) = 0$$

*f*) **$f(x) = \dfrac{1}{x^6}$**

$$f'(x) = -6x^{-7} = -\frac{6}{x^7}$$

**25. Donada la funció $f(x) = x^3$, calcula $f'(-1)$ i $f'(1)$. Indica si la funció és creixent o decreixent en aquests dos punts, i en cas que hi presenti el mateix tipus de variació, digues on és més ràpida aquesta variació.**

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3 - x^3}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{h(3x^2 + 3xh + h^2)}{h} = \lim_{h\to 0}(3x^2 + 3xh + h^2) = 3x^2$$

$$f'(1) = 3\cdot 1^2 = 3;\ f'(-1) = 3\cdot(-1)^2 = 3$$

$f'(1) = f'(-1) = 3 > 0 \rightarrow$ la funció és creixent en $x = 1$ i en ambdós punts creix amb la mateixa rapidesa.

**26. Pot decréixer en algun punt la funció de l'exercici anterior? Per què?**

No, perquè $f'(x) = 3x^2 \geqslant 0$ per a qualsevol $x \in \mathbb{R}$

**27. Considera la funció:**

**$f(x) = \sqrt[3]{x}$. Calcula $f'(1)$ i $f'(8)$. Interpreta'n els resultats obtinguts.**

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$$f'(1) = \frac{1}{3\sqrt[3]{1}} = \frac{1}{3};\ f'(8) = \frac{1}{3\sqrt[3]{64}} = \frac{1}{12}$$

$f'(1) > 0$ i $f'(8) > 0 \rightarrow$ la funció és creixent en $x = 1$ i també en $x = 8$.
$f'(1) > f'(8) \rightarrow$ la funció creix amb més rapidesa prop de $x = 1$ que prop de $x = 8$.

**28. Calcula la funció derivada de cadascuna de les funcions següents:**

*a*) **$f(x) = 3x^3 - 5x^2 + 7$**

$$f'(x) = 9x^2 - 10x$$

*b*) **$f(x) = x + \dfrac{1}{x} - 3$**

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$$

*c*) **$f(x) = \dfrac{x^4}{5} - \dfrac{3x^2}{7}$**

$$f'(x) = \frac{4}{5}x^3 - \frac{6}{7}x$$

*d*) **$f(x) = \sqrt{10} + \sqrt{x}$**

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

*e*) **$f(x) = (2x + 3)^2$**

$$f'(x) = 8x + 12$$

*f*) **$f(x) = \dfrac{-1}{x^3} + \dfrac{2}{x} + 7$**

$$f'(x) = \frac{3}{x^4} - \frac{2}{x^2}$$

**29. Indica per a quins valors de $x$ s'anul·la la derivada de la funció $f(x) = x^3 - 5x^2 + 3x + 4$.**

$$f'(x) = 3x^2 - 10x + 3$$

$$f'(x)=0 \rightarrow 3x^2-10x+3=0 \rightarrow x=3 \text{ i } x=\frac{1}{3}$$

**30. Determina els intervals de creixement i decreixement de la funció *f*(*x*) = $x^2$ + 4*x* – 7.**

$f'(x) = 2x + 4$
$f'(x) < 0 \rightarrow 2x + 4 < 0 \rightarrow x < -2$
$f'(x) > 0 \rightarrow x > -2$
$(-\infty, -2)$ funció decreixent
$(-2, +\infty)$ funció creixent

**31. Demostra que la derivada de la funció polinòmica de segon grau *f*(*x*) = $ax^2 + bx + c$ s'anul·la per al valor de *x* corresponent al vèrtex de la paràbola que en resulta de representar-la gràficament.**

$$f'(x) = 2ax + b$$

$$f'(x)=0 \rightarrow 2ax+b=0 \rightarrow 2ax=-b \rightarrow x=-\frac{b}{2a}$$

**32. La distància d'un mòbil a un punt de referència ve donada per l'expressió *d* = *f*(*t*) = = 10 + 12*t* + $t^2$, *d* en metres i *t* en segons.**

***a*) Determina l'expressió de la funció que permet calcular la velocitat del mòbil en qualsevol instant.**

$$v = f'(t) = 12 + 2t \ m/s.$$

***b*) Indica raonadament si en algun moment aquest mòbil canvia el sentit del seu moviment.**

El mòbil no canvia el sentit del moviment, ja que $v(t) = 0$ per a $t \neq 0$ per a $t \geqslant 0 \rightarrow$ la velocitat d'aquest mòbil no s'anul·la per a $t \geqslant 0$.

**33. Troba l'equació d'una funció *f*(*x*) que tingui per derivada la funció *f'*(*x*) representada en la gràfica (fig. 1.13). Pots trobar-ne més d'una? Per què?**

Compleixen la condició que s'estableix a l'enunciat totes les funcions del tipus $f(x) = x + K$, amb $K \in \mathbb{R}$.

## Acabem

**1. Aplicant la definició, calcula la derivada de cadascuna de les funcions següents en *x* = = –3:**

***a*) *f*(*x*) = $-x^2 + 1$**

$$f'(-3)=\lim_{h\to 0}\frac{-(3+h)^2+1-(-8)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-9+6h-h^2+1+8}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(6-h)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}(6-h)=6$$

***b*) *f*(*x*) = $\sqrt{1-x}$**

$$f'(-3)=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{1-(-3+h)}-2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{4-h}-2}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\left(\sqrt{4-h}-2\right)\left(\sqrt{4-h}+2\right)}{h\left(\sqrt{4-h}+2\right)}=\lim_{h\to 0}\frac{4-h-4}{h\left(\sqrt{4-h}+2\right)}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-h}{h\left(\sqrt{4-h}+2\right)}=\lim_{h\to 0}\frac{-1}{\sqrt{4-h}+2}=\frac{-1}{4}$$

$$f'(1)=\frac{1}{3\sqrt[3]{1}}=\frac{1}{3};\ f'(8)=\frac{1}{3\sqrt[3]{64}}=\frac{1}{12}$$

***c*) *f*(*x*) = $\frac{1}{x}$**

$$f'(-3)=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{-3+h}+\frac{1}{3}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{3-3+h}{3(-3+h)}}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h}{3h(-3+h)}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{3(-3+h)}=-\frac{1}{9}$$

**2. Donada la funció *f*(*x*) = $\frac{1}{x-2}$, és possible calcular *f'*(2)? Per què?**

No, perquè $x = 2 \notin$ Df

**3. Sense fer-ne la representació gràfica, indica si la funció *f*(*x*) = $(x-4)^2$ és creixent o decreixent en *x* = 3,5.**

$$f(x)=(x-4)^2=x^2-8x+16 \rightarrow f'(x)=2x-8$$

$$f'(3{,}5)=2\cdot 4{,}5-8=7-8=-1$$

$f'(3{,}5) < 0 \rightarrow$ la funció és decreixent en $x = 3{,}5$

**4. En la gràfica (fig. 1.14) hem representat la funció *f'*(*x*), derivada d'una certa funció *f*(*x*). Quina és l'expressió algèbrica de *f'*(*x*)? I la de *f*(*x*)? Pots trobar-ne més d'una?**

$f'(x) = 2x \rightarrow f(x) = x^2 + c$, amb $C \in \mathbb{R}$

Per tant hi ha infinites funcions la funció derivada de les quals és $f'(x) = 2x$.

**5. Indica raonadament el signe de la funció *f'*(*x*) corresponent a la funció *f*(*x*) representada en la gràfica de la figura 1.15, en cadascun dels intervals següents:**

**$(-\infty, -1)$ $(-1, 1)$ $(1, +\infty)$**

$x \in (-\infty, -1) \to$ de funció és creixent $\to f'(x) > 0$
$x \in (-1, 1) \to$ la funció és decreixent $\to f'(x) < 0$
$x \in (1, +\infty) \to$ la funció és creixent $\to f'(x) > 0$

6. **Compara la rapidesa del creixement de la funció $f(x) = x^3 + 2x$ en els punts d'abscisses $x = -2$ i $x = 2$**

$f(x) = x^3 + 2x \to f'(x) = 3x^2 + 2$
$f'(-2) = 3 \cdot (-2)^2 + 2 = 14 > 0$
$f'(2) = 3 \cdot 2^2 + 2 = 14 > 0$

Com que $f'(-2) = f'(2)$, la funció creix amb la mateixa rapidesa en $x = -2$ que en $x = 2$.

7. **Aplicant la definició, calcula la funció derivada de:**

*a*) **$f(x) = x^3 + 3$**

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3 + 3 - (x^3+3)}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 + 3 - x^3 - 3}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{h(3x^2 + 3xh + h^2)}{h} = \lim_{h\to 0}(3x^2 + 3xh + h^2) = 3x^2$$

*b*) **$f(x) = x + 3x^2$**

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{x + h + 3(x+h)^2 - (x + 3x^3)}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{x + h + 3x^2 + 6xh + 3h^2 - x - 3x^2}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{h(1 + 6x + 3h)}{h} = \lim_{h\to 0}(1 + 6x + 3h) = 1 + 6x$$

*c*) **$f(x) = 5\sqrt{x}$**

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{5\sqrt{x+h} - 5\sqrt{x}}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{5\left(\sqrt{x+h} - \sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)}{h\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)} =$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{5(x+h-x)}{h\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)} = \lim_{h\to 0} \frac{5h}{h\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)} =$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{5}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{5}{2\sqrt{x}}$$

8. **Indica els intervals de creixement i decreixement de la funció $f'(x) = -3x + 5$. Verifica la teva resposta fent-ne la representació gràfica**

$f(x) = -3x + 5 \to f'(x) = -3$

$f'(x) < 0$ per a qualsevol $x \in \mathbb{R} \to$ la funció és decreixent en tot el seu domini.

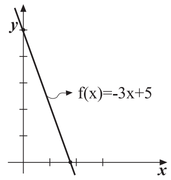


Fig. 1.6

9. **Calcula la funció derivada de cadascuna de les funcions següents:**

*a*) **$f(x) = 2x^4 - 3x^2 + 1$**

$$f'(x) = 8x^3 - 6x$$

*b*) **$f(x) = \sqrt{x^3} + \sqrt[3]{x^2}$**

$$f'(x) = \frac{3}{2}x^{1/2} + \frac{2}{3}x^{-1/3} = \frac{3}{2}\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt[3]{x}}$$

*c*) **$f(x) = 1 - \dfrac{2}{x^2}$**

$$f'(x) = -2 \cdot (-2)x^{-3} = \frac{4}{x^3}$$

*d*) **$f(x) = 3(x^2 + 7x - 12)$**

$$f'(x) = 6x + 21$$

*e*) **$f(x) = \sqrt{5x}$**

$$f'(x) = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{x}}$$

*f*) **$f(x) = (2 - 6x)^2$**

$$f'(x) = -24 + 72x$$

10. **Per a un determinat mòbil, la distància $d$ en metres a un punt de referència en funció del temps $t$ en segons ve donada per l'expressió:**

$$d = f(t) = 10t - 2t^2$$

*a*) **Troba l'expressió algèbrica que et permeti calcular la velocitat d'aquest mòbil en qualsevol instant.**

$v = f'(t) = 10 - 4t$, en m/s

*b*) **Indica a quina distància del punt de referència es troba quan canvia el sentit del moviment.**

$$v = 0 \to 10 - 4t = 0 \to t = 2{,}5 \text{ s}$$
$$d = f(2{,}5) = 10 \cdot 2{,}5 - 2 \cdot 2{,}5^2 = 12{,}5 \text{ m.}$$

*c*) **Interpreta físicament el signe de la velocitat per a $t > 2,5$ s.**

$t > 2,5$ s $\rightarrow v < 0 \rightarrow$ el mòbil es mou en sentit negatiu cada cop més de pressa.

**11. A conseqüència de la dilatació, la longitud *L* d'una barra metàl·lica augmenta amb la temperatura *T* d'acord amb l'expressió:**

**$L = 8(1 + 10^{-4}T)$, on *L* s'expressa en centímetres i *T*, en graus centígrads.**

*a*) **Quina és la longitud de la barra a 0 °C? I a 100 °C?**

$L$ (0 ºC) = 8 cm; $L$ (100 ºC) = 8,08 cm

*b*) **Quan augmenta més bruscament la longitud d'aquesta barra, si $T = 50$ °C o si $T = 80$ °C? Per què?**

$L(T) = 8 + 8 \cdot 10^{-4}\ T \rightarrow L^1(T) = 8 \cdot 10^{-4}$ cm/ºC

Com que $L^1(T)$ no depèn de la temperatura, la longitud de la barra augmenta amb la mateixa rapidesa independement de la temperatura.

**12. Representa gràficament les funcions $f(x) = 2x + 3$ i $g(x) = 2x - 3$. Què obtens?**

**Quina de les dues funcions creix més de pressa al voltant de $x = 0$? I al voltant de $x = 10$? Procura respondre les dues últimes qüestions sense fer cap càlcul i argumenta'n la resposta.**

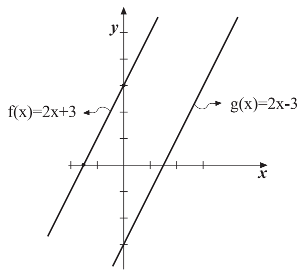


Fig. 1.7

S'obtener dues rectes paral·leles.

Es compleix que $f'(x) = g'(x) = 2 \rightarrow$ la funció *f* i la funció *g* creixen amb la mateixa rapidesa, independement del valor de la variable *x*.