Comencem

- **Representa en paper mil·limetrat la funció $f(x) = -x^2 + 4x$. Traça amb la màxima cura possible la recta tangent a la paràbola en el punt $P(1, 3)$. Mesura amb un transportador l'angle que forma aquesta recta amb el sentit positiu de l'eix d'abscisses. La tangent trigonomètrica d'aquest angle és el pendent de la recta tangent que has traçat. Fes-ne el càlcul.**

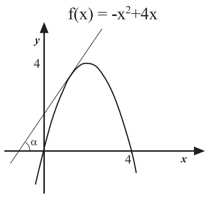

Fig. 2.1

$$\alpha \simeq 64° \rightarrow m_{tg} = \text{tg } 64° \simeq 2$$

- **La funció derivada de la funció $f(x) = -x^2 + 4x$ és $f'(x) = -2x + 4$. Calcula $f'(1)$.**

$$f'(1) = -2 \cdot 1 + 4 = -2 + 4 = 2$$

Exercicis

1. **Troba l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció $f(x) = 3x^2 - 10x + 3$ en $x = 2$.**

$$x = 2 \rightarrow f(2) = 3 \cdot 2^2 - 10 \cdot 2 + 3 =$$
$$= -5 \rightarrow (2, -5)$$
$$f'(x) = 6x - 10$$
$$m_{tg} = f'(2) = 6 \cdot 2 - 10 = 12 - 10 = 2$$
$$y + 5 = 2(x - 2) \rightarrow y + 5 = 2x - 4 \rightarrow$$
$$\rightarrow y = 2x - 9$$

2. **Considera la funció $f(x) = x^2 + 2$. En quins punts de la gràfica d'aquesta funció la recta tangent és paral·lela a la recta $y = 3x + 5$?**

Es tracta de buscar els valors de x per als quals es compleix que $f'(x) = 3$.

$$f(x) = x^3 + 2 \rightarrow f'(x) = 3x^2 \rightarrow 3x^2 = 3 \rightarrow$$
$$\rightarrow x = \pm 1$$
$$x = 1 \rightarrow f(1) = 1^3 + 2 = 3$$
$$x = -1 \rightarrow f(-1) = (-1)^3 + 2 = 1$$

Els punts són (1, 3) i (–1, 1)

3. **Dibuixa la recta tangent a la corba representada a la gràfica (fig. 2.7) en els punts d'abscisses $x = -3$, $x = 0$ i $x = 2$.**

a) **Quin és el signe del pendent de cadascuna d'aquestes tangents?**

En $x = -3$, pendent positiu; en $x = 0$, pendent negatiu; en $x = 2$, pendent positiu.

b) **Quin signe tenen $f'(-3)$, $f'(0)$ i $f'(2)$?**

$$f'(-3) > 0;\ f'(0) < 0;\ f'(2) > 0$$

4. **A partir de la gràfica (fig. 2.8), fes una estimació dels valors de $f'(2)$, $g'(-1)$ i $h'(0)$.**

$$f'(2) \simeq -0{,}7;\ g'(-1) = 0;\ h'(0) \simeq 0{,}4$$

5. **Considera la funció $f(x) = x^2 - 3x + 5$. Digues en quin punt del gràfic d'aquesta funció la recta tangent forma un angle de 45° amb el sentit positiu de l'eix d'abscisses. Aquesta funció, és creixent o decreixent en aquest punt? Per què?**

Com que tg 45º = 1, es tracta de determinar el valor o valors de x per als quals es verifica que $f'(x) = 1$.

$$f(x) = x^2 - 3x + 5 \rightarrow f'(x) = 2x - 3 \rightarrow 2x - 3 =$$
$$= 1 \rightarrow x = 2 \rightarrow f(2)\ 2^2 - 3 \cdot 2 + 5 = 3 \rightarrow (2, 3)$$

En el punt (2, 3) la funció és creixent, ja que $f'(2) = 1 > 0$.

6. **Esbrina quins són els punts de la gràfica de la funció $f(x) = x^3 - 6x^2 + 4$ que tenen tangent paral·lela a l'eix d'abscisses.**

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 4 \rightarrow f'(x) = 3x^2 - 12x$$

Si la recta tangent és paral·lela a l'eix 0X, $m_{tg} = \text{tg } 0° = 0$.

Per tant, es tracta de trobar quins són els valors de x que compleixen l'equació: $f'(x) = 0$

$$3x^2 - 12x = 0 \rightarrow x(3x - 12) = 0 \rightarrow x = 0 \text{ i } x = 4$$
$$x = 0 \rightarrow f(0) = 4$$
$$x = 4 \rightarrow f(4) = -28$$

Els punts són (0, 4) i (4, –28)

7. **Indica raonadament per què la funció $f(x) = \dfrac{1}{x}$ és decreixent en tots els punts del seu domini.**

Perquè $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$, i, per tant, $f'(x) < 0$ per a qualsevol $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$.

8. La gràfica de la funció $f(x) = x^2 + bx + c$ presenta un mínim en el punt (3, –1).

***a*) Calcula b i c.**

Es compleix:

$f(3) = -1 \rightarrow -1 = 9 + 3b + c \rightarrow 3b + c = -10$

$f'(3) = 0$ amb $f'(x) = 2x + b \rightarrow 0 = 6 + b \rightarrow$
$\rightarrow b = -6$

$3 \cdot (-6) + c = -10 \rightarrow c = 8$

La funció és $f(x) = x^2 - 6x + 8$

***b*) Representa gràficament la funció per verificar el resultat de l'apartat anterior.**

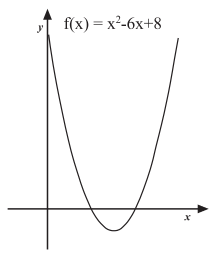

Fig. 2.2

9. Els gràfics de les funcions polinòmiques de segon grau $f(x) = ax^2 + bx + c$ sempre tenen un màxim o un mínim. Demostra que es troba localitzat en el punt d'abscissa $x_0 = \frac{-b}{2a}$.

Cal que $f'(x) = 0$, ja que en un màxim o en un mínim la gràfica de la funció presenta sempre tangent horitzontal.

$f'(x) = 2ax + b \rightarrow 0 = 2ax + b \rightarrow x = -b/2a$

10. Digues en quins punts no són derivables cadascuna de les funcions següents i indica'n en cada cas el motiu:

***a*) $f(x) = \frac{2}{x^2}$**

$x = 0$, perquè no pertany al D_f

***b*) $g(x) = \frac{1}{x^2 - 9}$**

$x = 3$ i $x = -3$, perquè no pertany al D_g

***c*) $h(x) = \frac{x}{4 - 3x}$**

$x = \frac{4}{3}$, perquè no pertany al D_h

***d*) $i(x) = \sqrt[5]{x}$**

$x = 0$, perquè la recta tangent és perpendicular a l'eix 0X

11. Representa gràficament la funció:

$$f(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ 2x + 4 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

És contínua en $x = 0$? I derivable?

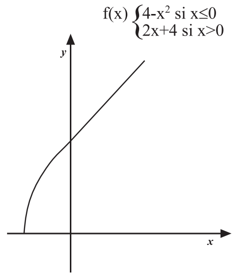

Fig. 2.3

Es continua en $x = 0$, ja que

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0) = 4$$

$$f'(x) = \begin{cases} -2x \text{ si } x \leq 0 \\ 2 \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

Per tant, $f'(0^+) = 2$ i $f'(0^-) = 0$. Com que $f'(0^+) \neq$ $\neq f'(0^-)$, la funció no és derivable en $x = 0$.

12. Donada la funció:

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & \text{si } x < 2 \\ 2x^2 + 3 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Troba a i b perquè sigui derivable en $x = 2$.

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = 2a + b; \ \lim_{x \to 2^+} f(x) = 11; \ f(2) = 11$$

La funció ha de ser continua en

$x = 2 \rightarrow 2a + b = 11$.

$$f'(x) = \begin{cases} a \text{ si } x < 2 \\ 4x \text{ si } x \geq 2 \end{cases}$$

En conseqüència: $f'(2^-) = f'(2^+) \rightarrow a = 8$

$$\left.\begin{aligned} 2a + b &= 11 \\ a &= 8 \end{aligned}\right\} \rightarrow 16 + b = 11 \rightarrow b = -5$$

13. La funció $f(x) = |x^2 - 6x + 8|$ és, en realitat, una funció definida a trossos:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 6x + 8 & \text{si } x \leq 2 \text{ o } x \geq 4 \\ -x^2 + 6x - 8 & \text{si } 2 < x < 4 \end{cases}$$

La gràfica de la funció es pot obtenir fàcilment a partir de la gràfica de la funció $g(x) = x^2 - 6x + 8$. Dibuixa els gràfics de les dues funcions. Estudia la continuïtat i la derivabilitat de la funció $f(x)$ en $x = 2$ i en $x = 4$.

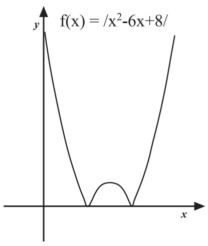

Fig. 2.4

$f(x)$ és contínua en $x = 2$ i en $x = 4$, ja que es compleix:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = f(2) = 0$$

$$\lim_{x\to 4^-} f(x) = \lim_{x\to 4^+} f(x) = f(4) = 0$$

En canvi, la funció no és derivable ni en $x = 2$ ni en $x = 4$.

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 6 \text{ si } x \le 2 \text{ o } x \ge 4 \\ -2x + 6 \text{ si } 2 < x < 4 \end{cases}$$

$f'(2^-) = -2$; $f'(2^+) = 2 \to f'(2^-) \neq f'(2^+)$
$f'(4^-) = 2$; $f'(4^+) = -2 \to f'(4^-) \neq f'(4^+)$

14. Sabem que la funció $f(x) = \dfrac{3}{4 - bx}$ no és derivable en $x = 2$. Calcula b.

L'expressió $4 - bx$ s'anul·la per a $x = 2$:

$$4 - 2b = 0 \to b = 2$$

15. Defineix a trossos la funció $f(x) = |x + 2|$. Representa-la gràficament i indica raonadament en quin punt no és derivable.

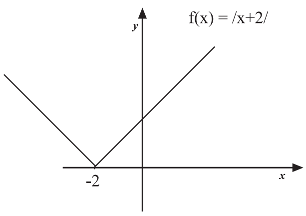

Fig. 2.5

$$f'(x) = \begin{cases} x + 2 \text{ si } x \ge -2 \\ -x - 2 \text{ si } x < -2 \end{cases}$$

No és derivable en $x = -2$, ja que $f'(-2^+) = 1$ i, en canvi, $f'(-2^-) = -1$. Per tant, $f'(-2^+) \neq f'(-2^-)$

16. Troba la funció derivada de cadascuna de les funcions següents:

a) **$f(x) = 3 \sin x + 5$**

$$f'(x) = 3\cos x$$

b) **$f(x) = 4 \cos x - 2 \sin x + 1$**

$$f'(x) = -4\sin x - 2\cos x$$

c) **$f(x) = \dfrac{\ln x}{7} + \dfrac{2}{x}$**

$$f'(x) = \frac{1}{7x} - \frac{2}{x^2}$$

d) **$f(x) = \log_3 x - 3x + \ln 9$**

$$f'(x) = \frac{1}{\ln 3 \cdot x} - 3$$

17. Determina els punts d'abscisses compreses entre 0 i 2π en els quals la recta tangent a la gràfica de la funció $f(x) = \sin x$ és paral·lela a l'eix OX. Escriu les equacions d'aquestes rectes tangents.

$$m_{tg} = 0 \to f'(x) = 0 \to \cos x = 0 \to x = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{i } x = \frac{3\pi}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{2} \to f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1 \to \left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$$

$$x = \frac{3\pi}{2} \to f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \sin\frac{3\pi}{2} = -1 \to \left(\frac{3\pi}{2}, -1\right)$$

L'equació de la recta tangent a la gràfica de $f(x) = \sin x$ en el punt $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ és $y = 1$; en el punt $\left(\frac{3\pi}{2}, -1\right)$, la recta tangent té per equació $y = -1$.

18. Determina l'equació de la recta perpendicular a la recta tangent a la gràfica de la funció $f(x) = 2 \cos x$ en $\dfrac{\pi}{6}$. Aquesta recta s'anomena recta normal a la gràfica de la funció en aquest punt.

$$f(x) = 2\cos x \to f'(x) = -2\sin x$$

$$x = \frac{\pi}{6} \to f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\cos\frac{\pi}{6} = \sqrt{3} \to \left(\frac{\pi}{6}, \sqrt{3}\right)$$

$$m_{tg} = f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -2\sin\frac{\pi}{6} = -2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = 1 \to$$

$$\to m_{normal} = -1$$

Equació de la normal:

$$y-\sqrt{3}=-1\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\Rightarrow x+y-\sqrt{3}-\frac{\pi}{6}=0$$

19. Hi ha algun punt de la gràfica de la funció $f(x) = \log_2 x$ que tingui recta tangent paral·lela a la bisectriu del primer quadrant i del tercer? Si la resposta és afirmativa, troba l'equació d'aquesta recta tangent.

$$f(x)=\log_2 x \to f'(x)=\frac{1}{\ln 2}\cdot\frac{1}{x}$$

Bisectriu primer i tercer quadrants:

$$y = x \to m = 1.$$

$$f'(x)=1\to\frac{1}{\ln 2}\cdot\frac{1}{x}=1\to x=\frac{1}{\ln 2}$$

$$x=\frac{1}{\ln 2}\to f\left(\frac{1}{\ln 2}\right)=\log_2\left(\frac{1}{\ln 2}\right)$$

El punt és $\left(\frac{1}{\ln 2},\log_2\left(\frac{1}{\ln 2}\right)\right)\simeq(1{,}44,\ 0{,}53)$

Equació de la recta tangent:

$$y-0{,}53 = x-1{,}44 \to x-y+0{,}91 = 0$$

20. Justifica per què la gràfica de la funció $f(x) = \ln x$ no pot tenir ni màxims ni mínims.

Perqué la funció derivada, $f'(x)=\frac{1}{x}$, no s'anul·la per a cap valor real de x:

$$\frac{1}{x}\neq 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$$

21. Calcula la derivada de les funcions següents:

***a*) $f(x)=\sqrt[3]{1-x^2}$**

$$f'(x)=\frac{1}{3}(1-x^2)^{-2/3}\cdot(-2x)=\frac{-2x}{3\sqrt[3]{(1-x^2)^2}}$$

***b*) $f(x) = \sin(3x + 5)$**

$$f'(x) = 3\cos(3x + 5)$$

***c*) $f(x) = \ln(\cos x)$**

$$f'(x)=\frac{-\sin x}{\cos x}=-\operatorname{tg} x$$

***d*) $f(x) = (1 - x^2)^3$**

$$f'(x) = 3(1 - x^2)^2 \cdot (-2x) = -6x(1 - x^2)^2$$

***e*) $f(x) = -\cos^3 x + 2$**

$$f'(x) = 3\cos^2 x \sin x$$

***f*) $f(x) = \sin(\ln x)$**

$$f'(x)=\frac{\cos(\ln x)}{x}$$

***g*) $f(x) = \sin^2 x + \sin x^2$**

$$f'(x) = 2\sin x\cos x + 2x\cos x^2 =$$
$$= 2(\sin x\cos x + x\cos x^2)$$

***h*) $f(x)=\sqrt{1-x}$**

$$f'(x)=\frac{1}{\ln 10}\cdot\frac{-1}{2\sqrt{1-x}}=\frac{-1}{2\ln 10\sqrt{1-x}}$$

***i*) $f(x)=\frac{1}{(x^2+4)^2}$**

$$f'(x)=\frac{-2(x^2+4)\cdot 2x}{(x^2+4)^4}=\frac{-4x}{(x^2+4)^3}$$

***j*) $f(x) = \sin(\cos(\ln x))$**

$$f'(x)=\frac{-\cos(\cos(\ln x))\sin(\ln x)}{x}$$

***k*) $f(x) = \ln[\sin(1 - x)]$**

$$f'(x)=\frac{-\cos(1-x)}{\sin(1-x)}=-\operatorname{cotg}(1-x)$$

***l*) $f(x) = \cos^2(1 - 3x)$**

$$f'(x) = 6\cos(1 - 3x)\sin(1 - 3x)$$

22. Calcula la derivada de la funció $f(x) = \sin^2 = x + \cos^2 x$. Interpreta'n el resultat obtingut.

$f'(x) = 0$, perquè $f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x = 1$

23. Troba l'equació de la recta tangent al gràfic de la funció $f(x) = 2\sin^2 x$ en $x=\frac{\pi}{4}$.

$$x=\frac{\pi}{4}\to f\left(\frac{\pi}{4}\right)=2\cdot\sin^2\frac{\pi}{4}=2\cdot\frac{1}{2}=1\to\left(\frac{\pi}{4},1\right)$$

$$f'(x)=4\sin x\cos x;\ m_{tg}=f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=$$

$$=4\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}=2$$

Equació de la recta tangent:

$$y-1=2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\to 2x-y+1-\frac{\pi}{2}=0$$

24. Indica per a quins valors de x és creixent la funció $f(x) = \ln(x^2 + 1)$. Per què? Té la gràfica d'aquesta funció algun punt en el qual la recta tangent tingui pendent nul? Si la resposta és afirmativa, de quin punt es tracta?

$$f'(x) = \frac{1}{x^2+1} \cdot 2x = \frac{2x}{x^2+1}$$

La funció es creixent per a $x \in \mathbb{R}^+$, ja que si $x > 0$ es verifica $f'(x) > 0$.

$$m_{tg} = 0 \rightarrow f'(x) = 0 \rightarrow \frac{2x}{x^2+1} = 0 \rightarrow$$
$$\rightarrow 2x = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow f(0) = \ln 1 = 0$$

La recta tangent a la gràfica de la funció té pendent mil en el punt (0,0).

25. Calcula la funció derivada de les funcions següents:

a) $f(x) = x^3 \cdot \cos x$

$$f'(x) = 3x^2 \cos x + x^3 (-\sin x) =$$
$$= x^2 (3 \cos x - \sin x)$$

b) $f(x) = x \cdot \ln x + \ln^2 x + 1$

$$f'(x) = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} + 2\ln x \cdot \frac{1}{x} = \frac{2\ln x}{x} + \ln x + 1$$

c) $f(x) = 7 \operatorname{cotg} x + 3$

$$f(x) = 7\frac{\cos x}{\sin x} + 3 \rightarrow f'(x) =$$
$$= 7\frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{-7}{\sin^2 x}$$

d) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 3x + 2}$

$$f'(x) = \frac{-2x+3}{(x^2-3x+2)^2}$$

e) $f(x) = \dfrac{\sin x + \cos x}{1 - \sin x}$

$$f'(x) = \frac{(\cos x - \sin x)(1 - \sin x) -}{(1-\sin x)^2}$$
$$\frac{-(\sin x + \cos x)\cdot(-\cos x)}{(1-\sin x)^2} = \frac{\cos x - \sin x + 1}{(1-\sin x)^2}$$

f) $f(x) = \sqrt{x} \cdot (1 + x)$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}(1+x) + \sqrt{x} = \frac{1-3x}{2\sqrt{x}}$$

g) $f(x) = \dfrac{1}{\cos 3x} + \dfrac{2}{5}$

$$f'(x) = \frac{3\sin 3x}{\cos 3x} = 3\operatorname{tg} 3x$$

h) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x^2}$

$$f'(x) = \frac{\cos x \cdot x^2 - \sin x \cdot 2x}{x^4} = \frac{x\cos x - 2\sin x}{x^3}$$

i) $f(x) = \dfrac{-2x}{(x^2-1)^2}$

$$f'(x) = \frac{-2(x^2-1)^2 + 2x\cdot 2(x^2-1)\cdot 2x}{(x^2-1)^4} =$$
$$= \frac{2+6x^2}{(x^2-1)^3}$$

j) $f(x) = \dfrac{\ln x}{1-x}$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(1-x) + \ln x}{(1-x)^2} = \frac{1 - x + x\ln x}{x(1-x)^2}$$

k) $f(x) = \ln\sqrt{\dfrac{1+x^2}{1-x^2}}$

$$f(x) = \ln\sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}} = \ln\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)^{1/2} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}[\ln(1+x^2) - \ln(1-x^2)]$$
$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{2x}{1+x^2} + \frac{2x}{1-x^2}\right) =$$
$$= x\left(\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1-x^2}\right) = \frac{2x}{1-x^4}$$

l) $f(x) = (1 - x)^3 \cdot \log_2 x$

$$f'(x) = -3(1-x)^2 \log_2 x + (1-x)^3 \cdot \frac{1}{\ln 2} \cdot \frac{1}{x} =$$
$$= (1-x)^2\left(-3\log_2 x + \frac{1-x}{\ln 2 \cdot x}\right)$$

26. Utilitzant la derivada logarítmica, demostra que la derivada de la funció $f(x) = \dfrac{k}{g(x)}$ és $f'(x) = \dfrac{-k \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$.

$$f(x) = \frac{k}{g(x)} \rightarrow \ln f(x) = \ln\frac{k}{g(x)} = \ln k - \ln g(x)$$
$$\frac{f'(x)}{f(x)} = -\frac{g'(x)}{g(x)} \rightarrow f'(x) = -f(x)\frac{g'(x)}{g(x)}$$

Per tant:

$$f'(x) = -\frac{k}{g(x)} \cdot \frac{g'(x)}{g(x)} \rightarrow f'(x) = \frac{-kg'(x)}{[g(x)]^2}$$

27. La derivada de la funció *f*(*x*) = tg *x* es pot expressar *f'*(*x*) = 1 + tg² *x*. Per què?

Perquè $f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ i, $1 + \text{tg}^2 x = 1 + \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x} =$

$$= \frac{1}{\cos^2 x}$$

En conseqüència:

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \text{tg}^2 x$$

28. Troba l'equació de la recta tangent al gràfic de la funció *f*(*x*) = $\dfrac{x^2}{x^2+1}$ en *x* = 1. A quin punt del gràfic d'aquesta funció la recta tangent és paral·lela a l'eix d'abscisses?

$f(1) = \dfrac{1}{2}$. El punt és $\left(1, \dfrac{1}{2}\right)$

$$f'(x) = \frac{2x(x^2+1) - x^2 \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2x}{(x^2+1)^2}$$

$$m_{\text{tg}} = f'(1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Equació recta tangent:

$$y - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(x-1) \rightarrow x - 2y = 0$$

Recta tangent paral·lela a l'eix $0X \rightarrow m_{\text{tg}} = 0 \rightarrow$ $f'(x) = 0$

$$\frac{2x}{(x^2+1)^2} = 0 \rightarrow 2x = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow f(0) = 0$$

La recta tangent és paral·lela a l'eix d'abscisses en el punt (0, 0).

29. Comprova que la derivada de la funció:

***f*(*x*) = ln $\sqrt{\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}}$ és *f'*(*x*) = $\dfrac{1}{\cos x}$**

$$f(x) = \ln\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}} = \frac{1}{2}[\ln(1+\sin x) - \ln(1-\sin x)]$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{\cos x}{1+\sin x} + \frac{\cos x}{1-\sin x}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\cos x}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{1}{\cos x}$$

30. Calcula la derivada de les funcions:

***a*) *f*(*x*) = e³*x* · ln (*x*² + 4)**

$$f'(x) = 3e^{3x}\ln(x^2+4) + e^{3x}\frac{2x}{x^2+4} =$$

$$= e^{3x}\left[3\ln(x^2+4) + \frac{2x}{x^2+4}\right]$$

***b*) *f*(*x*) = sin [cos (eˣ + 2)]**

$$f'(x) = -e^x\cos(\cos(e^x+2))\sin(e^x+2)$$

***c*) *f*(*x*) = $\dfrac{e^x+1}{e^x}$**

$$f'(x) = \frac{e^x \cdot e^x - e^x(e^x+1)}{(e^x)^2} = \frac{-e^x}{e^x \cdot e^x} = \frac{-1}{e^x}$$

***d*) *f*(*x*) = tg (3ˣ – 7)**

$$f'(x) = \frac{3^x \ln 3}{\cos^2(3^x - 7)}$$

e*) *f*(*x*) = (*x*² – 1)^cos *x

$\ln f(x) = \cos x \cdot \ln (x^2 - 1)$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = -\sin x \cdot \ln(x^2-1) + \cos x \cdot \frac{2x}{x^2-1}$$

$$f'(x) = (x^2-1)^{\cos x}\left[-\sin x \cdot \ln(x^2-1) + \frac{2x\cos x}{x^2-1}\right]$$

***f*) *f*(*x*) = ln $\dfrac{e^x+3}{e^x}$**

$$f(x) = \ln(e^x+3) - \ln e^x = \ln(e^x+3) - x$$

$$f'(x) = \frac{e^x}{e^x+3} - 1 = \frac{e^x - e^x - 3}{e^x+3} = \frac{-3}{e^x+3}$$

31. Donada la funció *f*(*x*) = *x* · eˣ, calcula *f'*(*x*). Escriu l'equació de la recta tangent a la gràfica de *f*(*x*) en el punt on s'anul·la la seva derivada. Indica raonadament si aquesta funció és creixent o decreixent en *x* = 0.

$$f'(x) = e^x + x \cdot e^x = e^x(1+x)$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow e^x(1+x) = 0 \rightarrow 1+x = 0 \rightarrow x = -1$$

$$f(-1) = -1 \cdot e^{-1} = -\frac{1}{e}$$

Punt: $\left(-1, -\dfrac{1}{e}\right)$; pendent: $m = 0 \rightarrow$ equació tangent: $y = -\dfrac{1}{e}$

$f'(0) = 1 > 0 \rightarrow$ la funció és creixent en $x = 0$.

32. Una petita mostra de material radioactiu conté 1 bilió d'àtoms. A conseqüència de la desintegració, el nombre *N* d'àtoms de la mostra va disminuint a mesura que passa el temps *t*. La funció *N* = *f*(*t*) que descriu aquesta situació és:

$$\boldsymbol{N = N_0 \cdot e^{-2t}}$$

$$N = f(t) = N_0 \cdot e^{-2t} \to N = 10^{12} \cdot e^{-2t}$$

on N_0 és el nombre inicial d'àtoms que hi ha a la mostra i *t*, el temps transcorregut en anys. Es demana:

***a*) Quants àtoms hi haurà a la mostra quan hagin passat 10 anys? I quan n'hagin passat 100?**

$$t = 5 \text{ anys} \to N = f(5) = 10^{12} \cdot e^{-10} = $$
$$= 45\,399\,930 \text{ àtoms}$$
$$t = 10 \text{ anys} \to N = f(10) = 10^{12} \cdot e^{-20} = $$
$$= 2\,061 \text{ àtoms}$$

***b*) Quan és més ràpida la desintegració, als 10 anys o als 100 anys?**

$$N'(t) = -2N_0 \cdot e^{-2t}$$

La desintegració és més ràpida per a $t = 5$ anys, ja que:

$$N'(5) = -2 \cdot 10^{12} \cdot e^{-10} = -9{,}08 \cdot 10^7 \text{ àt/s}$$
$$N'(10) = -2 \cdot 10^{12} \cdot e^{-20} = -4\,122 \text{ àt/s}$$

i, per tant, es compleix:

$$/N'(5)/ > /N'(10)/$$

33. Comprova que la derivada de la funció $f(x) = x^2 \cdot 5^x$ s'anul·la en els punts $x = \dfrac{-2}{\ln 5}$ i $x = 0$.

$$f'(x) = 2x \cdot 5^x + x^2 \cdot 5^x \cdot \ln 5 = x \cdot 5^x (2 + x \cdot \ln 5)$$

$$f'(x) = 0 \to x \cdot 5^x (2 + x \cdot \ln 5) \begin{cases} x = 0 \\ 2 + x \cdot \ln 5 = 0 \end{cases}$$

$$x = \frac{-2}{\ln 5}$$

34. Calcula la derivada de les funcions:

***a*) $f(x) = \text{arc sin}\,\dfrac{1+x}{1-x}$**

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^2}} \cdot \frac{1-x-(1+x)(-1)}{(1-x)^2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\dfrac{(1-x)^2-(1+x)^2}{(1-x)^2}}} \cdot \frac{-2x}{(1-x)^2} =$$

$$= \frac{1}{\dfrac{\sqrt{-4x}}{1-x}} \cdot \frac{-2x}{(1-x)^2} = \frac{-2x}{(1-x)\sqrt{-4x}}$$

***b*) $f(x) = e^{\text{arc tg}\, x}$**

$$f'(x) = e^{\text{arctg}\,x} \cdot \frac{1}{1+x^2} = \frac{e^{\text{arctg}\,x}}{1+x^2}$$

***c*) $f(x) = \ln\,[\text{arc cos}\,(x-1)]$**

$$f'(x) = \frac{1}{\arccos(x-1)} \cdot \frac{(-1)}{\sqrt{1-(x-1)^2}} =$$

$$= \frac{-1}{\arccos(x-1)\sqrt{2x-x^2}}$$

***d*) $f(x) = \text{arc tg}\,\dfrac{1+x}{1-x} - \text{arc tg}\,x$**

$$f'(x) = \frac{1}{1+\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^2} \cdot \frac{1-x-(1+x)\cdot(-1)}{(1-x)^2} - \frac{1}{1+x^2} =$$

$$= \frac{(1-x)^2}{(1-x)^2+(1+x)^2} \cdot \frac{-2}{(1-x)^2} - \frac{1}{1+x^2} =$$

$$= \frac{-2}{2(1+x^2)} - \frac{1}{1+x^2} = \frac{-1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = \frac{-2}{1+x^2}$$

***e*) $f(x) = \sqrt{1-x^2} \cdot \text{arc sin}\,x$**

$$f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} \arcsin x + \sqrt{1-x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \frac{-x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + 1 = \frac{-x\arcsin x + \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}$$

***f*) $f(x) = \text{arc cos}\,(\cos x)$**

$$f(x) = \arccos(\cos x) = x \to f'(x) = 1$$

35. Dedueix la derivada de la funció $g(x) = a^x$ sabent que la seva funció inversa és $f(x) = \log_a x$ i suposant coneguda $f'(x)$.

$$f(x) = \log_a x \to f'(x) = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x}$$

$$g'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\dfrac{1}{\ln a} \cdot \dfrac{1}{a^x}} = a^x \ln a$$

36. Donada la funció $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2-4}$, calcula $f'(x)$, $f''(x)$ i $f'''(x)$.

$$f'(x) = \frac{2x(x^2-4)-x^2\cdot 2x}{(x^2-4)^2} = \frac{-8x}{(x^2-4)^2}$$

$$f''(x) = \frac{-8(x^2-4)^2+8x\cdot 2\cdot 2x(x^2-h)}{(x^2-4)^4} =$$

$$= \frac{-8(x^2-4)+32x^2}{(x^2-4)^3} = \frac{24x^2+32}{(x^2-4)^3}$$

$$f'''(x) = \frac{48x(x^2-4)^3-(24x^2+32)(x^2-4)^2\cdot 3\cdot 2x}{(x^2-4)^6} =$$

$$= \frac{48x(x^2-4)-(24x^2+32)6x}{(x^2-4)^4} =$$

$$= \frac{48x^3-192x-144x^3-192x}{(x^2-4)^4} =$$

$$= \frac{-96x^3-384x}{(x^2-4)^4} = \frac{-96x(x^2+4)}{(x^2-4)^2}$$

37. Troba $f^{(66)}(x)$ i $g^{(94)}(x)$ per a les funcions $f(x) = \sin x$ i $g(x) = \cos x$.

$$f^{(66)}(x) = f''(x) = -\sin x$$
$$g^{(95)}(x) = g^{(3)}(x) = \sin x$$

38. Per a la funció $f(x) = 2^x$, calcula:

$f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$ i $f^{(4)}(x)$

Observa amb detall les funcions que has obtingut i dedueix l'expressió de la derivada $f^{(n)}(x)$.

$$\left.\begin{aligned} f'(x) &= 2^x\cdot\ln 2\\ f''(x) &= 2^x\cdot(\ln 2)^2\\ f'''(x) &= 2^x\cdot(\ln 2)^3\\ f^{(4)}(x) &= 2^x\cdot(\ln 2)^4\end{aligned}\right\} f^{(n)}(x) = 2^x(\ln 2)^n$$

Acabem

1. En quins punts de la gràfica de la funció $f(x) = \dfrac{1}{x}$ la recta tangent és perpendicular a la recta $4x + y - 2 = 0$? Escriu les equacions d'aquestes rectes tangents.

$$4x+y-2=0 \to m=-4 \to m' = \frac{1}{4}$$

$$f(x) = \frac{-1}{x} \to f'(x) = \frac{1}{x^2}$$

$$m' = f'(x) \to \frac{1}{4} = \frac{1}{x^2} \to x = \pm 2$$

$$x = 2 \to f(2) = -\frac{1}{2} \to \left(2,-\frac{1}{2}\right)$$

$$x = -2 \to f'(-2) = \frac{1}{2} \to \left(-2,\frac{1}{2}\right)$$

Els punts són $\left(2,-\frac{1}{2}\right)$ i $\left(-2,\frac{1}{2}\right)$

Equacions de les rectes tangents:

$$\left(2,-\frac{1}{2}\right): y+\frac{1}{2} = \frac{1}{4}(x-2) \to 4y+2 = x-2 \to$$
$$\to x-4y-4=0$$

$$\left(-2,\frac{1}{2}\right): y-\frac{1}{2} = \frac{1}{4}(x+2) \to 4y-2 = x+2 \to$$
$$\to x-4y+4=0$$

2. Dibuixa en un paper mil·limetrat la gràfica de la funció $f(x) = -x^2 + 8x$. Tot seguit, fes una estimació a partir d'aquesta gràfica dels valors de $f'(1)$ i $f'(5)$. Calcula analíticament $f'(1)$ i $f'(5)$ i compara els resultats amb els anteriors.

$$f(x) = -x^2+8x \to f'(x) = -2x+8$$
$$f'(1) = -2+8 = 6;\ f'(5) = -10+8 = -2$$

Cal comparar aquests valors amb els valors obtinguts de manera experimental, a partir de la gràfica de la funció.

3. Representa gràficament la funció:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0\\ 1 & \text{si } x \geq 0\end{cases}$$

Aquesta funció és contínua en $x = 0$? I derivable? Justifica les respostes.

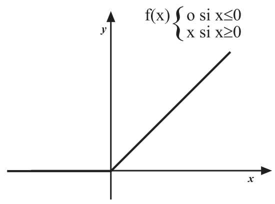

Fig. 2.6

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0;\ \lim_{x\to 0^+} f(x) = 0;\ f(0) = 0$$

Es compleix: $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0$

Per tant, la funció és contínua en $x = 0$.

$$f'(x)\begin{cases} 0 \text{ si } x < 0\\ 1 \text{ si } x \geq 0\end{cases}$$

És a dir, $f'(0^-) = 0$ i $f'(0^+) = 1 \rightarrow f'(0^-) \neq f'(0^+)$ la funció no és derivable en $x = 0$.

4. Indica en quins punts és derivable la funció:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{|x|} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Es derivable en tot $\mathbb{R}$ excepte en $x = 0$. Es compleix que $f'(x) = 0$ per a $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$.

5. El gràfic d'una funció $f(x)$ és el de la figura 2.20. Sense calcular-ne l'expressió analítica, representa gràficament la funció $f'(x)$.

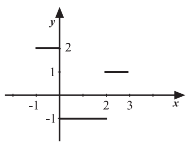

Fig. 2.7

6. Troba les derivades laterals en $x = 5$ de la funció $f(x) = |2x - 10|$. És derivable en aquest punt? Per què?

$$f(x) = |2x - 10| \rightarrow f(x) = \begin{cases} 2x - 10 \text{ si } x \geq 5 \\ -2x + 10 \text{ si } x < 5 \end{cases}$$

$$f'(5^+) = 2;\ f'(5^-) = -2 \rightarrow f'(5^+) \neq f'(5^-)$$

La funció no és derivable en $x = 5$.

7. Indica els intervals de creixement i decreixement i els punts estacionaris de la funció $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 4}$.

$$f'(x) = \frac{2x(x^2-4) - x^2 \cdot 2x}{(x^2-4)^2} = \frac{-8x}{(x^2-4)^2}$$

$D_f = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$; $f'(x) = 0 \rightarrow x = 0$, $f(0) = 0 \rightarrow$
$\rightarrow (0, 0)$

Com que $f'(x) > 0$ per a $x < 0$, $x \neq -2$ i $f'(x) < 0$ per a $x > 0$, $x \neq 2$, es compleix que:

La funció és creixent en els intervals $(-\infty, -2)$ i $(-2, 0)$

La funció es decreixent en els intervals $(0, 2)$ i $(2, +\infty)$

La funció presenta un punt estacionari a l'origen de coordenades.

8. La funció $f(x) = \dfrac{x^2}{(x^2-1)^2}$ és creixent o decreixent en $x = 2$? Justifica la resposta.

$$f(x) = \frac{x^2}{(x-1)^2} \rightarrow f'(x) =$$

$$= \frac{2x(x-1)^2 - x^2 \cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{2x(x-1) - 2x^2}{(x-1)^3} =$$

$$= \frac{2x^2 - 2x - 2x^2}{(x-1)^3} = \frac{-2x}{(x-1)^3}$$

$f'(2) = -4 < 0 \rightarrow f(x)$ és decreixent en $x = 2$.

9. Donada la paràbola d'equació $f(x) = x^2 - 2x + 5$, es considera la recta r que uneix els punts d'aquesta paràbola, les abscisses dels quals són $x_1 = 1$ i $x_2 = 3$. Troba l'equació de la recta tangent a la paràbola que és paral·lela a la recta r.

$x_1 = 1 \rightarrow f(x_1) = f(1) = 4 \rightarrow (1, 4)$
$x_2 = 3 \rightarrow f(x_2) = f(3) = 8 \rightarrow (3, 8)$

La recta r conté els punts (1, 4) i (3, 8)

$$m_r = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{8 - 4}{3 - 1} = 2$$

$f'(x) = 2x - 2$ i $f'(x) = m_r = 2 \rightarrow 2x - 2 = 2 \rightarrow$
$x = 2$
$f(2) = 5 \rightarrow$ El punt de tangències és (2, 5)
$m_{tg} = m_r = 2$

Equació de la recta tangent:

$y - 5 = 2(x - 2) \rightarrow y - 5 = 2x - 4 \rightarrow$
$\rightarrow 2x - y + 1 = 0$

10. Aquesta és la representació gràfica de la derivada $f'(x)$ d'una funció polinòmica $f(x)$ (fig. 2.21).

***a*) Quin és el grau d'aquesta funció polinòmica? Per què?**

Grau 2. Perquè $f'(x)$ és una funció polinòmica de primer grau, ja que la seva representació gràfica és una recta.

***b*) Indica els intervals de creixement i decreixement de la funció $f(x)$.**

$f'(x) > 0 \rightarrow x > 2 \rightarrow$ Creixent: $(2, +\infty)$
$f'(x) < 0 \rightarrow x < 2 \rightarrow$ Decreixent: $(-\infty, 2)$

***c*) Té $f(x)$ algun punt estacionari? Quin és?**

Sí, $x = 2$, ja que $f'(2) = 0$.

11. Donada la funció $f(x) = x \cdot e^x$, resol les equacions $f'(x) = 0$ i $f''(x) = 0$.

$$f'(x) = e^x + x \cdot e^x = e^x(1 + x)$$
$$f''(x) = e^x(1 + x) + e^x = e^x(2 + x)$$
$$f'(x) = 0 \to e^x(1 + x) = 0 \to 1 + x = 0 \to x = -1$$
$$f''(x) = 0 \to e^x(2 + x) = 0 \to 2 + x = 0 \to x = -2$$

12. Troba per a quin valor de *a* i *b* és contínua i derivable la funció:

$$\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } x \le 1 \\ ax^2 + b(x-1) & \text{si } x > 1 \end{cases}}$$

$$f(x) = \begin{cases} 3x \text{ si } x \le 1 \\ ax^2 + b(x-1) \text{ si } x > 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 3 \text{ si } x \le 1 \\ 2ax + b \text{ si } x > 1 \end{cases}$$

- Contínua:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1)$$
$$3 = a \to a = 3$$

- Derivable:

$$f'(1^-) = f'(1^+)$$
$$3 = 2a + b \to b = 3 - 2a = 3 - 6 = -3$$

13. Calcula la derivada de les funcions:

***a*) $f(x) = \sin^4[\ln(x^2 + 5)]$**

$$f'(x) = 4\sin^3[\ln(x^2+5)]\cos[\ln(x^2+5)] \cdot$$
$$\cdot \frac{1}{x^2+5} \cdot 2x =$$
$$= \frac{8x\sin^3[\ln(x^2+5)]\cos[\ln(x^2+5)]}{x^2+5}$$

***b*) $f(x) = \dfrac{(x+2)\cdot \ln x}{\sqrt{x+1}}$**

$$f'(x) = \frac{\left(\ln x + \dfrac{x+2}{x}\right)\sqrt{x+1} - (x+2)\cdot \ln x \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}}{x+1} =$$
$$= \frac{\dfrac{(x\ln x + x + 2)\sqrt{x+1}}{x} - \dfrac{(x+2)\cdot \ln x}{2\sqrt{x+1}}}{x+1} =$$
$$= \frac{\dfrac{2(x\ln x + x + 2)(x+1) - x(x+2)\ln x}{2x\sqrt{x+1}}}{x+1} =$$
$$= \frac{2(x\ln x + x + 2)(x+1) - x(x+2)\ln x}{2x(x+1)\sqrt{x+1}}$$

***c*) $f(x) = \cos\sqrt{x^2 + 16}$**

$$f'(x) = -\sin\sqrt{x^2+16} \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2+16}} =$$
$$= \frac{-x\sin\sqrt{x^2+16}}{\sqrt{x^2+16}}$$

***d*) $f(x) = \mathrm{tg}^3\sqrt{x^2+2}$**

$$f'(x) = 3\,\mathrm{tg}^2\sqrt{x^2+2} \cdot \frac{1}{\cos^2\sqrt{x^2+2}} \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2+2}} =$$
$$= \frac{3x\,\mathrm{tg}^2\sqrt{x^2+2}}{\sqrt{x^2+2}\cos^2\sqrt{x^2+2}}$$

***e*) $f(x) = [1 + \cos^2(1 - 3x)]^2$**

$$f'(x) = 2[1+\cos^2(1-3x)]\cdot 2\cos(1-3x)\cdot$$
$$\cdot(-1)\cdot\sin(1-3x)\cdot(-3) =$$
$$= 12[1+\cos^2(1-3x)]\cos(1-3x)\sin(1-3x)$$

***f*) $f(x) = \log_2\sqrt{\dfrac{x^2}{x^2-4}}$**

$$f(x) = \log_2\sqrt{\frac{x^2}{x^2-4}} = \log_2\left(\frac{x^2}{x^2-4}\right)^{1/2} =$$
$$= \frac{1}{2}[\log_2 x^2 - \log_2(x^2-4)] =$$
$$= \frac{1}{2}[2\log_2 x - \log_2(x^2-4)]$$
$$f'(x) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\ln 2}\left(\frac{2}{x} - \frac{2x}{x^2-4}\right) =$$
$$= \frac{1}{\ln 2}\left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2-4}\right) =$$
$$= \frac{1}{\ln 2}\cdot\frac{x^2-4-x^2}{x(x^2-4)} = \frac{-4}{\ln 2\cdot x\cdot(x^2-4)}$$

***g*) $f(x) = \sec^2(x^3 - 2)$**

$$f(x) = \sec^2(x^3-2) = \frac{1}{\cos^2(x^3-2)}$$
$$f'(x) = \frac{2\cos(x^3-2)\sin(x^3-2)\cdot 3x^2}{\cos^4(x^3-2)} =$$
$$= \frac{6x^2\sin(x^3-2)}{\cos^3(x^3-2)} = \frac{6x^2\,\mathrm{tg}(x^3-2)}{\cos^2(x^3-2)} =$$
$$= 6x^2\,\mathrm{tg}(x^3-2)\cdot\sec^2(x^3-2)$$

***h*) $f(x) = \arcsin\dfrac{\sqrt{3x}}{2}$**

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{3x}{4}}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} =$$
$$= \frac{2}{\sqrt{4-3x}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{x(4-3x)}} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{x(4-3x)}}$$

i) **$f(x)$ = arc tg $\frac{3x+2}{4}$**

$$f'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{3x+2}{4}\right)^2}\cdot\frac{3}{4} = \frac{1}{\frac{16+(3x+2)^2}{16}}\cdot\frac{3}{4} =$$

$$= \frac{12}{16+(3x+2)^2} = \frac{12}{9x^2+12x+20}$$

j) **$f(x) = 2^{\text{arc sin } x}\cdot\sqrt{1-x^2}$**

$$f'(x) = 2^{\arcsin x}\cdot\ln 2\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\sqrt{1-x^2} +$$

$$+ 2^{\arcsin x}\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = 2^{\arcsin x}\left(\ln 2 - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$

k) **$f(x) = (x^2+3)^{x+5}$**

$$\ln f(x) = \ln(x^2+3)^{x+5} = (x+5)\ln(x^2+3)$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \ln(x^2+3)+(x+5)\cdot\frac{2x}{x^2+3}$$

$$f'(x) = f(x)\left[\ln(x^2+3)+\frac{2x(x+5)}{x^2+3}\right]$$

$$f'(x) = (x^2+3)^{x+5}\left[\ln(x^2+3)+\frac{2x(x+5)}{x^2+3}\right]$$

l) **$f(x) = \ln\sqrt{\ln x}$**

$$f(x) = \ln(\ln x)^{1/2} = \frac{1}{2}\ln(\ln x)$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x} = \frac{1}{2x\ln x}$$

m) **$f(x) = \frac{1}{\sin^3 x}$**

$$f'(x) = \frac{-3\sin^2 x\cos x}{\sin^4 x} = \frac{-3\cos x}{\sin^2 x} =$$

$$= -3\cos x\,\text{cosec}^2 x$$

n) **$f(x) = \frac{e^{2x}+\ln^2 x+\cos 3x}{2}$**

$$f'(x) = \left[2e^{2x}+2\ln x\cdot\frac{1}{x}+\sin 3x\cdot(-3)\right]\cdot\frac{1}{2} =$$

$$= e^{2x}+\frac{\ln x}{x}-\frac{3\sin 3x}{2}$$

o) **$f(x) = \frac{1}{(2x+6)^3}$**

$$f'(x) = \frac{-5\cdot 3(2x+6)^2\cdot 2}{(2x+6)^6} = \frac{-30}{(2x+6)^4}$$

p) **$f(x) = e^{\text{tg } 3x}\cdot\sqrt[3]{x^2+1}$**

$$f'(x) = e^{tg 3x}\cdot\frac{1}{\cos^2 3x}\cdot 3\cdot\sqrt[3]{x^2+1}+$$

$$+ e^{tg 3x}\cdot\frac{1}{3}(x^2+1)^{-2/3}\cdot 2x =$$

$$= e^{tg 3x}\left[\frac{3\sqrt[3]{x^2+1}}{\cos^2 3x}+\frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2+1)^2}}\right]$$

14. El nombre *N* de bacteris d'un determinat cultiu varia en funció del temps *t* expressat en hores, d'acord amb l'equació:

$$N = 10\cdot e^{\frac{t}{2}}$$

a) **Quin és el nombre inicial de bacteris en el cultiu?**

t = 0 → *N*(0) = 10 bacteris.

b) **En quin moment creix més de pressa el nombre d'aquests bacteris, quan *t* = 2 h o quan *t* = 4 h? Per què?**

$$N' = 10\cdot e^{t/2}\cdot\frac{1}{2} = 5\cdot e^{t/2}$$

t = 2 h → *N*'(2) = 5e
t = 4 h → *N*'(4) = 5e^2

N'(4) > *N*'(2) → el nombre de bacteris creix més de pressa per a *t* = 4 h.

15. Calcula les tres primeres derivades de la funció $f(x) = e^{3x}$. Dedueix l'expressió de la derivada enèsima $f^{(n)}$ d'aquesta funció.

$f'(x) = 3e^{3x}$; $f''(x) = 9e^{3x}$; $f'''(x) = 27e^{3x}$
$f^{(n)}(x) = 3^n e^{3x}$

16. Tenint en compte que arc sec *x* = arc cos $\frac{1}{x}$, calcula la derivada de la funció *f*(*x*) = arcsec *x*. De manera similar, pots calcular les derivades de les funcions *g*(*x*) = arc cosec *x* i *h*(*x*) = arc cotg *x*. Fes-ho.

$$f(x) = \text{arcsec } x = \arccos\frac{1}{x}$$

$$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\cdot\left(\frac{-1}{x^2}\right) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$f(x) = \text{arccosec } x = \arcsin\frac{1}{x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$f(x) = \text{arccotg}x = \text{arctg}\frac{1}{x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{-1}{1+x^2}$$

17. Troba l'equació de la recta normal al gràfic de la funció $f(x) = x^2 - 7x + 10$ en els punts d'ordenada nul·la.

$f(x) = 0 \rightarrow x^2 - 7x + 10 = 0 \rightarrow x_1 = 2,\ x_2 = 5 \rightarrow$
$\rightarrow (2, 0)$ i $(5, 0)$

- Punt (2, 0)

$$m_{tg} = f'(2) = 2 \cdot 2 - 7 = -3 \rightarrow m_n = \frac{1}{3}$$

Equació recta normal:

$$y = \frac{1}{3}(x-2) \rightarrow y = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3} \rightarrow x - 3y - 2 = 0$$

- Punt (5, 0)

$$m_{tg} = f'(5) = 2 \cdot 5 - 7 = 3 \rightarrow m_n = -\frac{1}{3}$$

Equació recta normal:

$$y = -\frac{1}{3}(x-5) \rightarrow y = -\frac{1}{3}x + \frac{5}{3} \rightarrow x + 3y - 5 = 0$$

18. Representa gràficament la funció $f(x) = |x^2 + 2|$. Hi ha algun punt en el qual aquesta funció no sigui derivable? Justifica'n la resposta.

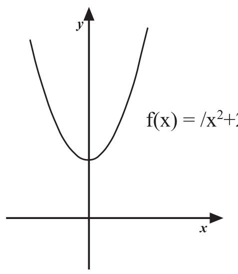

Fig. 2.8

No. La funció és contínua i derivable a tot $\mathbb{R}$. La seva gràfica és la mateixa que la de la funció $g(x) = x^2 + 2$, ja que $f(x) > 0$ per a tot $x \in \mathbb{R}$.

19. Determina l'expressió algèbrica de la funció $f(x)$ que verifica les condicions següents:

a) **$f'(x) = 3$**

b) **El seu gràfic passa pel punt (2, 10)**

$$f(x) = 3x + n$$

$f(2) = 10 \rightarrow 10 = 6 + n \rightarrow n = 10 - 6 = 4$

Per tant, $f(x) = 3x + 4$

20. Indica raonadament perquè la funció $f(x) = \dfrac{a}{x-b}$, on a i b són nombres reals, no pot tenir punts estacionaris.

$$f'(x) = \frac{-a}{(x-b)^2}$$

La funció no pot tenir punts estacionaris, ja que $f'(x)$ no s'anul·la per a cap valor de x real.

21. Se sap que la funció $f(x) = ax^2 + bx + 12$ presenta un mínim en el punt (4, –4). Calcula a i b.

$f(4) = -4 \rightarrow 16a + 4b + 12 = -4 \rightarrow 4a + b = -4$
$f'(x) = 2ax + b;\ f'(4) = 0 \rightarrow 8a + b = 0$

$$\left.\begin{array}{r} 4a + b = -4 \\ 8a + b = 0 \end{array}\right\} a = 1,\ b = -8$$

22. Dibuixa de manera aproximada el gràfic de la funció $f(x) = \ln |x|$. Indica raonadament si hi ha algun punt en què aquesta funció no sigui derivable.

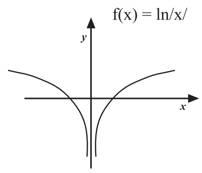

Fig. 2.9

La funció no és derivable en $x = 0$ perquè no existeix $f(0)$ i, per tant, no pot ser-hi contínua.

23. Justifica el motiu pel qual la funció $f(x) = +\sqrt{x}$ no és derivable en $x = 0$.

Perquè $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{2}} \rightarrow$ no existeix $f'(0)$.

De fet, com que no existeix $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$, la funció no és contínua en $x = 0$ i, per tant, no pot existir $f'(x)$.

24. Representa gràficament la funció $f(x) = \log_2 x$ i, a partir d'aquesta gràfica, dibuixa la funció $g(x) = |\log_2 x|$. Per a quins valors de x no existeix $g'(x)$? Per què?

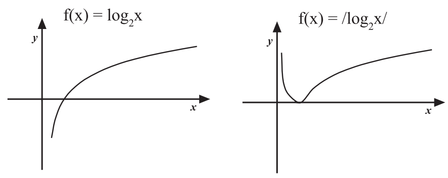

Fig. 2.10

La funció $g(x)$ no és derivable en $x = 1$.
Observa a partir de la gràfica que $g'(1^-) \neq g'(1^+)$.

25. La funció: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & \text{si } x \neq 2 \\ 3 & \text{si } x = 2 \end{cases}$ és deriva-ble en $x = 2$? Per què?

$$f(2) = 3$$

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x \to 2}(x+2) = 4$$

Com que $\lim_{x \to 2} f(x) \neq f(2)$, la funció no és contínua en $x = 2$. Aleshores, tampoc pot ser derivable en aquest punt.