Comencem

- **Troba i classifica les discontinuïtats que presenta la funció $y = \frac{1+x}{1-x^2}$.**

  $y = \frac{1+x}{1-x^2} = \frac{1+x}{(1+x)(1-x)} = \frac{1}{1-x} \rightarrow$ la simplificació indica que a $x = -1$ hi ha una discontinuïtat evitable. A l'expressió $y = \frac{1}{1-x}$ hi trobem una discontinuïtat asimptòtica a $x = 1$.

- **Una funció $f(x)$ és tal que $D_f = \mathbb{R} - \{2, -3\}$. Què pots dir de la continuïtat de la funció en els punts $x = 2$ i $x = -3$?**

  $f(x)$ no està definida a $x = 2$ i $x = -3$ ja que aquests valors no són del domini de la funció i, per tant, la funció no és contínua en aquests punts.

- **Considera la funció:** $f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 0 \\ 2 & 0 \le x \le 3 \\ x-1 & 3 < x \end{cases}$

  Què pots dir de la continuïtat en els punts $x = 0$ i $x = 3$?

  $f(0^-) = 0$ i $f(0^+) = 2$ a l'esquerra i a la dreta de $x = 0$ la funció presenta valors diferents, per tant, hi ha una discontinuïtat de salt a $x = 0$. $f(3^-) = f(3^+)$ i, per tant, a $x = 3$ la funció és contínua.

Exercicis

1. **A partir de les funcions $f(x) = x^2 + 1$ i $g(x) = x^3 - 1$, escriu les funcions $f + g$, $f \cdot g$, i $\frac{f}{g}$. Són contínues? Raona la teva resposta.**

   $$(f + g)(x) = x^2 + 1 + x^3 - 1 = x^3 + x^2$$

   $$(f \cdot g)(x) = (x^2 + 1)(x^3 - 1) = x^5 + x^3 - x^2 - 1$$

   Les dues funcions són contínues per ser polinomis.

   $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^2+1}{x^3-1}$ presenta una discontinuïtat asimptòtica a $x = 1$, valor que anul·la el denominador.

2. **Descompon la funció $y = 5x^4 e^x$ en tres factors que siguin funcions contínues.**

   Es poden donar diferents resultats. Per exemple: $f(x) = 5$, $g(x) = x^3$ i $h(x) = e^x$.

3. **La funció $y = \text{tg } x$ és contínua? Recorda que tg x es pot definir com a $\frac{\sin x}{\cos x}$.**

   $y = \text{tg } x = \frac{\sin x}{\cos x}$ no és contínua en els valors de x que fan $\cos x = 0 \rightarrow x = (2k + 1)\frac{\pi}{2}$, amb k un nombre enter.

4. **Considera les funcions $f(x) = 2^x - 1$ i $g(x) = x^2 + 1$. Escriu les funcions $\frac{f}{g}$, $\frac{g}{f}$, $f \circ g$ i $g \circ f$. Raona si les funcions obtingudes són contínues.**

   $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{2^x - 1}{x^2+1}$ és contínua.

   $\left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{x^2+1}{2^x-1}$ presenta una discontinuïtat a $x = 0$, valor que anul·la el denominador.

   $(g \circ f)(x) = 2^{x^2+1} - 1$ és contínua.

   $(g \circ f)(x) = (2^x - 1)^2 + 1$ és contínua.

5. **Explica un fet quotidià que posi de manifest el teorema dels valors intermedis.**

   Per exemple, en una etapa ciclista els corredors passen per un quilòmetre determinat.

6. **Considera la funció $f(x) = 2x^4 - 14x^2 + 14x - 1$. Explica per què es pot aplicar el teorema de Bolzano en l'interval [0, 1]. Troba un valor aproximat a les centèsimes de c tal que $f(c) = 0$ en aquest interval.**

   La funció $f(x)$ és contínua i verifica: $f(0) = -1$ i $f(1) = 1$. Es verifica el teorema de Bolzano en l'interval [0,1]. Utilitzant la calculadora per trobar valors numèrics tenim que $f(0{,}1) = 0{,}26$, per tant, el valor c buscat es troba entre 0 i 0,1. El valor de $c = 0{,}08$ dóna $f(0{,}08) \cong 0$.

7. **Separa les quatre arrels reals de la funció següent:**

   $$f(x) = 2x^4 - 13x^2 + 15$$

En la funció tenim: $f(1) = -5$ i $f(3) = 60$ igualment per la paritat de les potències de x tenim: $f(-1) = 4$, $f(-2) = -5$ i $f(-3) = 60$. Els intervals que separen les quatre arrels són: [1,2], [–1,–2], [2,3] i [–2,–3].

8. Calcula els valors de $f(x) = x^7 + 3x + 3$ a $x = 0$ i $x = -1$. Pots determinar si la gràfica de la funció talla l'eix de les abscisses en algun punt entre –1 i 0? Troba aquest punt amb una aproximació fins a les centèsimes.

$f(0) = 3$ i $f(-1) = -1$. Pel teorema de Bolzano en l'interval [–1,0] la gràfica de la funció talla en un punt l'eix de les abscisses. Calculant valors numèrics de la funció per a diferents valors de x de l'interval, s'obté $c \cong -0{,}87$.

9. Considera la funció $f(x) = x^2 - 2x + 1$. És una funció contínua que té com a gràfica una paràbola. Existeix un c tal que $f(c) = 0$? Explica si en aquesta funció es pot aplicar el teorema de Bolzano en l'interval [0, 2].

La funció verifica $f(1) = 0 \rightarrow c = 1$. No es pot aplicar el teorema de Bolzano en l'interval [0,2] ja que $f(0) = 1 = f(2)$.

10. Troba el màxim i el mínim absoluts de la funció $f(x) = -x^2 + 2x$ en l'interval [–1, 2]. Representa gràficament la funció per ajudar-te a trobar la solució.

En l'interval [–1,2] es verifica: $f(-1) = -3$, $f(2) = 0$ i $f(1) = 1$ que és el màxim absolut i vèrtex de la paràbola. El mínim absolut es troba a $x = -1$, un dels extrems de l'interval.

11. Verifica si la funció $f(x) = \operatorname{tg} x$ té màxim i mínim absoluts en l'interval $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Raona la teva resposta.

La funció $f(x) = \operatorname{tg} x$ no és contínua a $x = \frac{\pi}{2}$. Té mínim absolut a $x = 0 \rightarrow f(0) = 0$. No té màxim absolut a $x = \frac{\pi}{2}$ per la discontinuïtat.

12. Troba els punts de la funció $y = \dfrac{1}{x^2 - 1}$ en els quals no sigui derivable.

La funció no és contínua a $x = 1$ i $x = -1$, valors que no són del domini; per tant, no és derivable en aquests punts.

13. Considera la funció $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2$. Troba'n els punts estacionaris i classifica'ls.

Calculem la derivada de la funció i la igualem a 0.

$f'(x) = 12x^3 - 24x^2 + 12x \rightarrow 12x^3 - 24x^2 + 12x = 0$

$$12x(x^2 - 2x + 1) = 0 \left\langle \begin{array}{l} x = 0 \rightarrow x_1 = 0 \\ x^2 - 2x + 1 = 0 \rightarrow x_2 = 1 \end{array} \right.$$

Per $x < 0 \rightarrow f'(x) > 0$, i per $x > 1 \rightarrow f'(x) > 0$; per tant, a $x = 0$ hi ha un mínim relatiu.

Per $x < 1 \rightarrow f'(x) > 0$, i per $x > 1 \rightarrow f'(x) > 0$; per tant, a $x = 1$ hi ha un punt d'inflexió de tangent horitzontal.

En ambdós casos es consideren valors de l'entorn de 0 i 1, respectivament.

14. Interpreta el valor de la derivada de la funció $y = x^3 - 1$ en el punt $x = 0$.

La derivada $y' = 3x^2$. En el punt $x = 0$ s'anul·la la derivada i per valors anteriors i posteriors de l'entorn de $x = 0$, la derivada és positiva. A $x = 0$ hi ha un punt d'inflexió de tangent horitzontal.

15. Troba la derivada de les funcions $f(x) = e^{2x}$ i de $g(x) = \ln x$. Tenen punts estacionaris aquestes funcions? Raona'n la resposta.

$f'(x) = c^{2x} \cdot 2$ i la funció no té punts estacionaris ja que la derivada no s'anul·la per a cap valor de x. Igualment passa amb la funció $g(x) = \ln x$, ja que la derivada $g'(x) = \frac{1}{x}$ no s'anul·la.

16. Considera la funció $f(x) = 2 \sin x$ en l'interval [0, π]. Aplica-li el teorema de Rolle per trobar un punt c tal que $f'(c) = 0$.

$f(0) = 0$ i $f(\pi) = 0$. El teorema de Rolle afirma que hi ha un punt de l'interval $(0,\pi)$ en el qual la derivada s'anul·la.

$$f'(x) = 2\cos x \rightarrow \cos x = 0 \rightarrow x = \frac{\pi}{2} \in (0, \pi)$$

17. Esbrina si la funció $f(x) = \dfrac{2}{(x-1)^2}$ verifica les condicions del terorema de Rolle a l'interval [0, 2].

La funció presenta una discontinuïtat en el punt x = 1; per tant, la funció no és contínua en l'interval [0,2] i no es pot aplicar el teorema de Rolle.

18. Considera la funció $f(x) = x^3 - 3x^2$ en l'interval [0, 3] i aplica el teorema de Rolle en aquest interval. Quin és el punt c que prediu el teorema? Hi ha algun altre punt que

no pertany a (0, 3) en què també s'anul·li la derivada?

$f(0) = 0$ i $f(3) = 0 \rightarrow$ es pot aplicar el teorema de Rolle. $f'(x) = 3x^2 - 6x \rightarrow 3x^2 - 6x = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow 3x(x-2) = \left\langle \begin{matrix} x_1 = 0 \\ x_2 = 2 \end{matrix} \right.$$

$$c = 2 \in (0,3) \text{ i } 0 \notin (0,3)$$

19. Demostra que a la funció $f(x) = \sqrt{x}$ se li pot aplicar el teorema del valor mitjà en l'interval (0, 1). Troba el punt c de l'interval en què $f'(c) = 1$. Troba l'equació de la recta tangent a la corba en aquest punt.

$f'(x) = \sqrt{x}$ és contínua en l'interval (0,1) i $f(0) = 0 \neq f(1) = 1$; per tant, es pot aplicar el teorema del valor mitjà.

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{c}} = 1 \rightarrow c = \frac{1}{4}$$

Equació de la recta tangent: punt $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$, $m = 1$

$$y = x + \frac{1}{4}$$

20. Demostra que la funció $f(x) = \frac{1}{x}$ és decreixent en tot el seu domini.

$f'(x) = \frac{-1}{x^2}$. L'expressió de la derivada $\frac{-1}{x^2} < 0$ per a qualsevol valor de x; per tant, la funció és decreixent.

21. Comprova que el punt $c = \frac{5}{2}$ és el punt on es verifica el teorema de Cauchy per les funcions següents $f(x) = 3x + 2$ i $g(x) = x^2 + 1$ en l'interval [1, 4].

$$f'(x) = 3 \rightarrow f'\left(\frac{5}{2}\right) = 3$$

$$g'(x) = 2x \rightarrow g'\left(\frac{5}{2}\right) = 5$$

$$\frac{f(4) - f(1)}{g(4) - g(1)} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5} = \frac{f'\left(\frac{5}{2}\right)}{g'\left(-\frac{5}{2}\right)}$$

22. Troba els punts de la funció $f(x) = x^3 - 4x - 1$ que verifiquen $f'(x) = 0$. Classifica'ls i expressa els intervals de monotonia i concavitat.

$$f'(x) = 3x^2 - 4 \rightarrow 3x^2 - 4 = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{3}{4}} = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$f''(x) = 6x \rightarrow$$

$$f''\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) > 0 \rightarrow \text{Mínim relatiu a } x = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$f''\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right) < 0 \rightarrow \text{Màxim relatiu a } x = -\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$f''(x) = 6x\ 0 \rightarrow x = 0$ Punt d'inflexió

$f(x)$ és creixent: $\left(-\infty, -\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ i $\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, +\infty\right)$

decreixent: $\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$

convexa: $(-\infty, 0)$; còncava: $(0, +\infty)$

23. Estudia la primera i la segona derivada de la funció $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ per trobar possibles màxims o mínims relatius i punts d'inflexió. Vés amb compte a l'hora d'interpretar els valors que anul·len la segona derivada.

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1} \rightarrow 2x = 0 \rightarrow x = 0$$

$$f''(x) = \frac{-2x^2 + 2}{(x^2 + 1)^2} \rightarrow -2x^2 + 2 = 0 \rightarrow x = \pm 1$$

$f''(0) > 0 \rightarrow$ a $x = 0$ hi ha un mínim relatiu

Els punts $x = \pm 1$ no són veritables punts d'inflexió ja que la funció és còncava en tot el seu domini.

24. Troba els extrems relatius i els punts d'inflexió de les funcions:

***a*) $f(x) = x + \frac{1}{x}$**

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} \rightarrow 1 - \frac{1}{x^2} = 0 \rightarrow x^2 - 1 = 0 \rightarrow$$

$$x = \pm 1$$

$$f''(x) = \frac{1}{x^2} \rightarrow$$

$f''(1) > 0$ a $x = -1$ hi ha un mínim relatiu
$f''(-1) < 0$ a $x = -1$ a hi ha un màxim relatiu
No hi ha punts d'inflexió ja que

$$f''(x) = \frac{2}{x^3} \neq 0$$

***b*) $f(x) = x\,(x - 1)^2\,(x - 2)^3$**

La funció és: $f(x) = x(x - 1)^2 - (x - 2)^3$.

$f(x) = 4x^2 - 11x + 8 \to f'(x) = 8x - 11 \to$

$8x - 11 = 0 \to x = \dfrac{11}{8}$

A $x = \dfrac{11}{8}$ hi ha un mínim relatiu i absolut; és el vèrtex de la paràbola.

***c*) $f(x) = e^x \cdot x$**

$f'(x) = e^x x + e^x = e^x(x + 1) \to x + 1 = 0 \to$
$x = -1$
$f''(x) = e^x(x + 1) + e^x = e^x(x + 2) \to x + 2 = 0$
$\to x = -2$
$f''(-1) = e^{-1} > 0 \to$
a $x = -1$ hi ha un mínim relatiu i a $x = -2$ hi ha un punt d'inflexió.

***d*) $f(x) = \cos x$ amb $x \in [0, 2\pi]$**

$$f'(x) = -\sin x \to -\sin x = 0 \to x = \begin{cases} 0 \\ \pi \\ 2\pi \end{cases}$$

$$f''(x) = -\cos x \to$$

$f''(0) < 0 \to$ a $x = 0$ hi ha un màxim relatiu
$f''(\pi) > 0 \to$ a $x = \pi$ hi ha un mínim relatiu
$f''(2\pi) < 0 \to$ a $x = 2\pi$ hi ha un màxim relatiu

25. Calcula els límits següents:

***a*) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sin x}$**

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} = 1$$

***b*) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos x}{\operatorname{tg} x}$**

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{tgx} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \lim_{x\to 0} (\sin x \cdot \cos^2 x) = 0$$

***c*) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{1 - \cos x}$**

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{1 - \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{2x}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{2}{\cos x} = 2$$

***d*) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^2 + 1}{x}$**

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 + 1}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{2x}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2}{3x} = \infty$$

26. Calcula els límits següents sabent que són una potència del nombre e.

Cal trobar l'exponent k de e^k en cada cas.

***a*) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{2x + 3}{2x - 1}\right)^x$**

$$k = \lim_{x\to\infty} \left(x \cdot \ln\left(\frac{2x + 3}{2x - 1}\right)\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(\frac{2x + 3}{2x - 1}\right)}{\frac{1}{x}}.$$

Derivant numerador i denominador tot aplicant la regla de L'Hôpital, sobté k =2. Per tant, e^2 és el resultat.

***b*) $\lim\limits_{x\to 0} (1 + x)^{\frac{3}{x}}$**

$$k = \lim_{x\to 0}\left[\frac{3}{x} \cdot \ln(1 + x)\right] = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1 + x)}{\frac{x}{3}} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1 + x}}{\frac{1}{3}} = 3 \to e^3$$

***c*) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$**

$$k = \lim_{x\to -\infty} \left[x \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right] = \lim_{x\to -\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = 1 \to e^1 = e$$

***d*) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{x + 1}{x - 1}\right)^{3x}$**

$$k = \lim_{x\to\infty}\left[3x \cdot \ln\left(\frac{x + 1}{x - 1}\right)\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{-1}{x^2 - 1}}{\frac{-1}{3x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2}{x^2 - 1} = 3 \to e^3$$

Acabem

1. Raona la continuïtat de les funcions:

***a*) $f(x) = \ln(x^2 + 1)$**

$f(x) = \ln(x^2 + 1)$ és contínua per a tot ja que $x^2 + 1 > 0$

***b*) $f(x) = (\sin x) \cdot e^{x+1}$**

$f(x) = (\sin x) \cdot e^{x+1}$ és contínua ja que és el producte de dues funcions contínues.

c) **$f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^3+1}$**

$f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^3+1}$ és contínua per a tot $x \neq -1$.

Per a $x = -1$ presenta una discontinuïtat asimptòtica.

d) **$f(x) = \cos^2 x + \cos x - 1$**

$f(x) = \cos^2 x + \cos x - 1$ és contínua per ser suma de tres funcions contínues.

2. La funció $f(x) = x^2 + x + 1$ és contínua. Explica si es pot aplicar el teorema de Bolzano en algun interval. Té alguna arrel l'equació $f(x) = 0$?

L'expressió $x^2 + x + 1 > 0$ per a tot $x \in R$ i, per tant, no es pot aplicar el teorema de Bolzano i l'equació $f(x) = 0$ no té cap arrel.

3. Dóna un raonament per tal de justificar que la funció $f(x) = x^5 + 5x^3 + 2x$ talla l'eix de les abscisses en un sol punt.

$f(x) = x \cdot (x^4 + 5x^2 + 2) \rightarrow f(x) = 0 \rightarrow x = 0$, que és el punt on talla l'eix de les abscisses; $x^4 + 5x^2 + 2 > 0$ per a tot $x \in R$ i, per tant, la gràfica no talla a cap altre punt l'eix de les abscisses.

4. Estudia la derivabilitat de la funció $f(x) = \sqrt{x+1}$ en el punt $x = 0$.

$f(x) = \sqrt{x+1}$ és contínua per a tot x del domini: $D_f = [-1,+\infty)$

$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$ no està definida a x = –1, per tant, no és derivable en aquest punt. A no és derivable.

5. Demostra que $f(x) = \dfrac{2x}{x-1}$ és decreixent en tot el seu domini.

$f'(x) = \dfrac{2(x-1)-2x}{(x-1)^2} = \dfrac{-2}{(x-1)^2} < 0$ per a tot x del domini.

Si la derivada és negativa, la funció és decreixent.

6. Calcula les tres primeres derivades de $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Troba una expressió per a la derivada enèsima.

$f(x) = x^{1/3}$; $f'(x) = \dfrac{1}{3}x^{-2/3}$; $f''(x) = -\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{3}x^{-5/3}$

$f'''(x) = \dfrac{-5}{3}\cdot\left(\dfrac{-2}{3}\right)\cdot\dfrac{1}{3}x^{-8/3}$; $f^{(n)}(x) = \dfrac{a_n}{3^n}x^{a_n+1}$ amb

$a_n = -3n + 4$

7. Troba l'equació de la recta tangent a la corba següent: $y = x^3 - 3x$ en el punt d'abscissa –1.

Punt de tangència: $P(-1,2)$; pendent: $m = y'(-1)$. Equació de la recta: $y = 2$

8. Esbrina si $f(x) = \dfrac{-1}{(x+1)^2}$ és creixent en tot el seu domini. Què passa en el punt $x = -1$?

$f'(x) = \dfrac{2}{(x+1)^3}$. La derivada és positiva i la funció és creixent per a $x > -1$; és negativa i la funció decreixent per a $x < -1$. En el punt $x = -1$ hi ha una discontinuïtat asimptòtica.

9. Calcula la derivada de les funcions següents:

a) **$y = \dfrac{2^{-x}}{4^x}$**

$$y = \frac{2^{-x}}{4^x} = \frac{2^{-x}}{2^{2x}} = 2^{-3x} \rightarrow y' = -3\cdot 2^{-3x}\cdot \ln 2$$

b) **$y = \sin 3x \cdot \text{tg } 3x$**

Simplifica les expressions obtingudes.

$y = \sin 3x \cdot \text{tg}3x \rightarrow y' = 3 \cdot \cos 3x \cdot \text{tg}3x + \sin 3x \cdot \dfrac{3}{\cos^2 3x} = 3 \cdot \sin 3x \cdot \left(1 + \dfrac{1}{\cos^2 3x}\right)$

10. Raona per què la funció $f(x) = 2x + \cos x$ no pot tenir màxims ni mínims relatius.

$f'(x) = 2 - \sin x > 0$ ja que $-1 \leq \sin x \leq 1$ i la derivada no s'anul·la per a cap valor de x.

11. Classifica els possibles extrems relatius de les funcions:

a) **$f(x) = 2 \sin x + \cos 2x$**

$$f'(x) = 2\cdot\cos x - 2\cdot\sin 2x \rightarrow$$
$$\cos x - \sin 2x = 0 \rightarrow$$
$$\cos x - 2\cdot\sin x\cdot\cos x = 0 \rightarrow$$
$$\rightarrow \cos x\cdot(1 - 2\cdot\sin x) = 0 \left\langle \begin{array}{l}\cos x = 0\\ 1 - 2\cdot\sin x = \end{array}\right.$$

$x_1 = \dfrac{\pi}{2}$, $x_2 = \dfrac{3\pi}{2}$, $x_3 = \dfrac{\pi}{6}$, $x_4 = \dfrac{5\pi}{6}$ en $[0,2\pi]$

$$f''(x) = -2\cdot\sin x - 4\cdot\cos 2x$$

$$f''\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0, \text{ a } x = \frac{\pi}{2}$$

hi ha un mínim relatiu

$$f''\left(\frac{3\pi}{2}\right) > 0, \text{ a } x = \frac{3\pi}{2}$$

hi ha un mínim relatiu

$$f''\left(\frac{\pi}{6}\right) > 0, \text{ a } x = \frac{\pi}{6}$$

hi ha un màxim relatiu

$$f''\left(\frac{5\pi}{6}\right) > 0, \text{ a } x = \frac{5\pi}{6}$$

hi ha un màxim relatiu

***b*)** $f(x) = x^4\, e^{-x}$

$$f'(x) = 4x^3 \cdot e^{-x} + x^4 \cdot e^{-x}(-1) = x^3 \cdot e^{-x}(4 - x)$$

$$x^3 \cdot e^{-x}(4 - x) = 0 \left\langle \begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = 4 \end{array} \right.$$

$$f''(x) = 3x^2 \cdot e^{-x}(4 - x) - x^3 \cdot e^{-x}(4 - x) - \\ -x^3 \cdot e^{-x}$$

$f''(0) = 0$, a $x = 0$ hi ha un punt d'inflexió

$f''(4) < 0$, a $x = 4$ hi ha un màxim relatiu

***c*)** $f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x$

$$f'(x) = 3x^2 - 10x + 6 \rightarrow 3x^2 - 10x + 6 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{7}}{3}$$

$$f''(x) = 6x - 10$$

$$f''\left(\frac{5+\sqrt{7}}{3}\right) > 0, \text{ a } x = \frac{5+\sqrt{7}}{3}$$

hi ha un mínim relatiu

$$f''\left(\frac{5-\sqrt{7}}{3}\right) > 0, \text{ a } x = \frac{5-\sqrt{7}}{3}$$

hi ha un màxim relatiu.

***d*)** $f(x) = x^4 - x^2$

$$f'(x) = 4x^3 - 2x \rightarrow 4x^3 - 2x = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow 2x(2x^2 - 1) = 0 \left\langle \begin{array}{l} x = 0 \\ 2x^2 - 1 = 0 \end{array} \right.$$

$$x_1 = 0 \qquad x_2 = \sqrt{\frac{1}{2}} \qquad x_3 = -\sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$f''(x) = 12x^2 - 2$$

$f''(0) < 0$, a $x = 0$ hi ha un màxim relatiu

$$f''\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = f''\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}\right) > 0;\ x = \sqrt{\frac{1}{2}} \text{ i } x = -\sqrt{\frac{1}{2}}$$

hi ha màxims relatius.

12. Troba els extrems absoluts de $f(x) = e^x - 1$ en l'interval [–1, 1].

$f(-1) = e^{-1} - 1 \cong -0{,}63$; $f(1) \cong 1{,}718$

$f'(x) = e^x \rightarrow f(x)$ no té extrems relatius ja que $e^x \neq 0$, per tant, els extrems absoluts es troben en els extrems de l'interval: a $x = -1$ hi ha el mínim absolut i a $x = 1$ el màxim absolut.

13. Estudia la monotonia i dóna els intervals de creixement i decreixement de les funcions:

***a*)** $f(x) = 1 - 2x - 3x^2$

$f'(x) = -2 - 6x \rightarrow -2 - 6x > 0 \rightarrow -\frac{1}{3} > x$. La funció és creixent; per $x > -\frac{1}{3}$ la funció és decreixent. $(-\infty, -\frac{1}{3})$ i $(-\frac{1}{3}, +\infty)$ respectivament.

***b*)** $f(x) = x + \sin x$

$f'(x) = 1 + \cos x \geq 0$, la funció és creixent per a tot $x \neq \pi$ en $[0, 2\pi]$

***c*)** $f(x) = x^2 - \ln x^2$

$f'(x) = 2x - \frac{2}{x}$. $f(x)$ és creixent $(0, +\infty)$ i decreixent $(-\infty, 0)$.

***d*)** $f(x) = x^4 - x^2$

És la funció de l'exercici 11 d). Aprofitant els extrems relatius establim que $f(x)$ és:

$$\text{Creixent: } \left(-\sqrt{\frac{1}{2}}, 0\right) \text{ i } \left(\sqrt{\frac{1}{2}}, +\infty\right)$$

$$\text{Decreixent: } \left(-\infty, -\sqrt{\frac{1}{2}}\right) \text{ i } \left(0, \sqrt{\frac{1}{2}}\right)$$

14. Determina la concavitat i els punts d'inflexió de les funcions:

En cada cas cal trobar els punts en els que s'anul·len les derivades primera i segona.

***a*)** $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x - 8$

$$f'(x) = 3x^2 + 4x - 4 \rightarrow 3x^2 + 4x - 4 = 0 \rightarrow$$

$$x_1 = -2 \text{ i } x_2 = \frac{2}{3}$$

$$f''(x) = 6x + 4 = 0 \rightarrow$$

$x = -\frac{2}{3}$ és un punt d'inflexió

$f''(-2) < 0$ hi ha un màxim relaitu a $x = -2$

$f''\left(\frac{2}{3}\right) > 0$ hi ha un mínim relatiu a $x = \frac{2}{3}$

$f(x)$ és convexa $(-\infty,-\frac{2}{3})$ i còncava $(-\frac{2}{3},+\infty)$

b) **$f(x) = x^3 + 2$**

$f'(x) = 3x^2$; $f''(x) = 6x \rightarrow x = 0$ és un punt d'inflexió de tangent horitzontal i de canvi de concavitat.

$f(x)$ és convexa $(-\infty,0)$ i còncava $(0,+\infty)$.

c) **$f(x) = x + \cos x$** 0

$f'(x) = 1 - \sin x$ i $f''(x) = \cos x \rightarrow \cos x = $

$$\begin{cases} x_1 = \frac{\pi}{2} \\ x_2 = \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

convexa: $(0,\frac{\pi}{2})$; $(\frac{3\pi}{2},2\pi)$ i còncava: $(\frac{3\pi}{2},2\pi)$

d) **$f(x) = x^4 - x^2$**

$$f'(x) = 4x^3 - 2x$$

$f''(x) = 12x^2 - 2 \rightarrow 12x^2 - 2 = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{6}}$

tenint en compte els extremes relatius de la funció trobats a l'exercici 11 d) podem establir:

f(x) és còncava: $(-\infty,-\sqrt{\frac{1}{6}})$ i $(\sqrt{\frac{1}{6}},+\infty)$ i convexa $\left(-\sqrt{\frac{1}{6}},\sqrt{\frac{1}{6}}\right)$.

15. Calcula.

a) **$\lim_{x\to 0} (1 - \cos x)^{2x}$**

És un limit del tipus e^K.

$$K = \lim_{x\to 0}\left(2x \cdot \ln(1-\cos x)\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-\cos x)}{\frac{1}{2x}} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{1-\cos x}}{\frac{1}{2x^2}} = 0$$

$$e^0 = 1$$

b) **$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\operatorname{tg} x}$**

És del tipus e^K.

$$R = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x \ln\sin x = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln\sin x}{\operatorname{tg} x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{1}{\cos^2 x}} =$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^3 x}{\sin x} = 0 \rightarrow e^0 = 1$$

c) **$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{-3x}}{\ln(1+x)}$**

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{-3x}}{\ln(1+x)} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{e^x + 3e^{-3x}}{\frac{1}{1+x}} \lim_{x\to 0}(1+x)(e^x + 3e^{-3x}) = 4$$

d) **$\lim_{x\to 0} x^4 \ln x$**

$$\lim_{x\to 0} x^4 \ln x = \lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x^4}} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-4}{x^5}} = \lim_{x\to 0}\frac{x^5}{-4x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-x^4}{4} = 0$$

16. Determina els punts d'inflexió de la funció següent:

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$$

$$f''(x) = \frac{-2(1+x^2)^2 + 2x \cdot 2(1+x^2)\cdot 2x}{(1+x^2)^4} = \frac{6x^2 - 2}{(1+x^2)^3}$$

$$6x^2 - 2 = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$$

Hi ha dos punts d'inflexió.

17. Calcula la primera i la segona derivada de la funció $f(x) = (x - 1)^3$. S'anul·len les dues derivades en un mateix punt? Troba aquest punt i explica de quin tipus és.

$f'(x) = 3(x - 1)^2$; $f''(x) = 6(x - 1)$

Les dues derivades s'anul·len per a $x = 1$. En aquest punt hi ha una inflexió de tangent horitzontal i de canvi de concavitat.

18. Considera la funció $f(x) = x^3 + x^2 + bx + 7$. Troba b de manera que la gràfica de la fun-

ció tingui a $x = 1$ un punt d'inflexió de tangent horitzontal.

$f'(x) = 3x^2 + 2x + b \quad f'(1) = 5 + b = 0 \rightarrow b = -5$
$f''(x) = 6x + 2 \rightarrow f''(-5) \neq 0$ i no hi ha punt d'inflexió.

19. Determina $f(x)$ sabent que la derivada tercera és $f'''(x) = 24x$, $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ i $f''(0) = 2$.

$f(x)$ és un polinomi de quart grau ja que la tercera derivada és de primer grau:

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$
$$f(0) = 0 \rightarrow e = 0$$
$$f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$$
$$f'(0) = 1 \rightarrow d = 0$$
$$f''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c$$
$$f''(0) = 2 \rightarrow 2c = 2 \rightarrow c = 1$$
$$f'''(x) = 24ax + 6b = 24x \rightarrow a = 1 \text{ i } b = 0$$

Substituint: $f(x) = x4 + x2 + x$

20. Analitza la continuïtat i la derivabilitat de la funció $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$ si $x \neq 0$ i $f(0) = 0$.

La funció presenta una discontinuïtat de salt a $x = 0$.

No és derivable a $x = 0$ ja que no és contínua en aquest punt.

21. Raona si la funció $f(x) = x^6 - 6x^2 + 3$ té alguna arrel entre 0 i 1. Troba aquest valor amb una aproximació fins a les centèsimes.

Apliquem el teorema de Bolzano ja que:

$f(0) = 3$; $f(1) = -2$ i la funció és contínua.

Existeix un $c \in [0,1]$ tal que $f(c) = 0$.

Utilitzant la canculadora per trobar valors numèrics de la funció per valors de x de l'interval, s'obté com a valor aproximat $c \cong 0{,}72$.