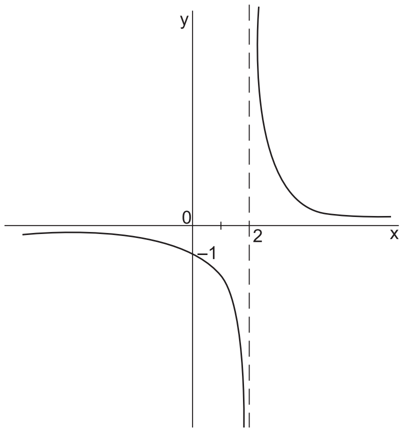
Comencem

- **A partir d'una taula de valors, representa gràficament la funció $f(x)\frac{2}{x-2}$. Dóna tota la informació possible de la funció.**

x	–2	0	4	6
$f(x) = 2/(x-2)$	–1/2	–1	1	1/2



$D_f = \mathbb{R} - \{2\}$, $R_f = \mathbb{R} - \{0\}$

Talla l'eix d'ordenades en el punt (0, –1). No és simètrica ni respecte de l'eix d'ordenades ni respecte de l'origen. És decreixent en tot el seu domini. Per valors de $x < 2$ la funció és convexa, i per valors de $x > 2$ és còncava.

Exercicis

1. **Estudia les simetries i indica els punts de tall amb els eixos de la funció: $f(x)\frac{x^3}{x^2+2}$.**

Com que $f(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2+2} = \frac{-x^3}{x^2+2} = -\frac{x^3}{x^2+2} =$ $= -f(x)$, la funció és imparella, per tant és simètrica respecte de l'origen de coordenades.

$f(x) = 0 \rightarrow \frac{x^3}{x^2+2} = 0 \rightarrow x^3 = 0 \rightarrow x = 0,$

talla els eixos en l'origen.

2. **Donada la funció $f(x) = \frac{x-1}{x+3}$ dedueix-ne:**

a) **El domini i els tipus de discontinuïtats.**

D_f = **R** – {–1}, $\lim_{x\to-1} \frac{x-1}{x-1} = \infty$, presenta una discontinuïtat asimptòtica en $x = -1$.

b) **Les simetries.**

En ser $f(-x) = -\frac{x+1}{1-x}$, vol dir que $f(-x) \neq f(x)$ i $f(-x) \neq -f(x)$, per tant la funció no és parella ni imparella, la gràfica no és simètrica ni respecte de l'eix d'ordenades ni respecte de l'origen.

c) **Els punts de tall amb els eixos de coordenades.**

$f(x) = 0 \rightarrow x - 1 = 0 \rightarrow x = 1$, talla l'eix d'abscisses en el punt (1, 0).

$f(0) = -1$, talla l'eix d'ordenades en el punt (0, –1).

3. **Troba el recorregut de la funció de l'exercici anterior a partir del domini de la funció inversa.**

$f^{-1}(x) = \frac{(1+x)}{(1-x)} \rightarrow R_f = D_f^{-1}$ = **R** – {1}.

4. *a*) **Per què una funció no pot ser simètrica respecte de l'eix d'abscisses?**

Hi hauria valors de x que tindrien dues imatges.

b) **Per què la gràfica d'una funció pot tallar com a màxim per un punt l'eix *OY*?**

Si tallés en més d'un punt l'eix *OY*, el valor $x = 0$ tindria més d'una imatge.

5. **Justifica de manera raonada per què la gràfica d'una funció no talla en cap punt una asímptota vertical.**

Si la gràfica tallés una asímptota vertical, hi hauria valors de *x* que tindrien més d'una imatge, i per tant no seria una funció.

6. **Demostra que les funcions polinòmiques no tenen asímptotes de cap tipus.**

En ser $\lim_{x\to\infty} p(x) = \infty$, fa que no tingui asímptotes verticals ni horitzontals, i com que

$m = \lim_{x\to\infty} \frac{p(x)}{x} = \infty$, tampoc en té d'obliqües.

7. Troba, si n'hi ha, els punts de tall de l'asímptota obliqua i la gràfica de la funció de l'exemple 1 apartat *b*.

No es tallen en cap punt, ja que l'equació

$$\frac{x^2}{4-2x} = -\frac{1}{2}x - 1, \text{ no té solució.}$$

8. Troba les asímptotes de les funcions següents:

a) $f(x) = \dfrac{x+3}{x^2-4}$

$D_f = \mathbf{R} - \{-2, 2\}$

$$\lim_{x\to -2}\frac{x+3}{x^2-4} = \infty \qquad \lim_{x\to 2}\frac{x+3}{x^2-4} = \infty$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+3}{x^2-4} = 0$$

verticals: $x = -2$ i $x = 2$, horitzontal: $y = 0$, no en té d'obliqües.

b) $f(x) = \dfrac{2x^3}{x^2+1}$

$D_f = \mathbf{R}$, no té asímptotes verticals

$\lim_{x\to\pm\infty}\dfrac{2x^3}{x^2+1} = \pm\infty$, tampoc no en té d'horitzontals.

$$m = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^3}{x(x^2+1)} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2}{x^2+1} = 2$$

$$n = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{2x^3}{x^2+1} - 2x\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x}{x^{2+1}} = 0$$

asímptota obliqua: $y = 2x$

c) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{e^x}$

$D_f = \mathbf{R}$, no té asímptotes verticals.

$\lim_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-1}{e^x} = 0 \rightarrow$ asímptota horitzontal:
$y = 0$ per a $x \rightarrow +\infty$

$m = \lim_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-1}{xe^x} = \infty \rightarrow$ no té asímptota horitzontal per a $x \rightarrow -\infty$

$m = \lim_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-1}{xe^x} = \infty \rightarrow$ no té asímptotes obliqües.

d) $f(x) = \dfrac{3-4x}{2x+6}$

$D_f = \mathbf{R} - \{-3\}$; $\lim_{x\to-3}\dfrac{3-4x}{2x+6} = \infty \rightarrow$ la recta $x = -3$ és una asímptota vertical.

$\lim_{x\to\pm\infty}\dfrac{3-4x}{2x+6} = -2 \rightarrow$ la recta $y = -2$ és una asímptota horitzontal.

e) $f(x) = \dfrac{x^3}{x-5}$

$D_f = \mathbf{R} - \{5\}$; $\lim_{x\to 5}\dfrac{x^3}{x-5} = \infty \rightarrow$ la recta $x = 5$ és una asímptota vertical.

$\lim_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^3}{x-5} = +\infty$ no té cap asímptota horitzontal.

$$m = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{x(x-5)} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x-5} = \pm\infty$$

no té cap asímptota obliqua.

f) $f(x) = \dfrac{3}{(x+1)^2}$

$D_f = \mathbf{R} - \{-1\}$; $\lim_{x\to-1}\dfrac{3}{(x+1)^2} = +\infty \rightarrow$ la recta $x = -1$ és una asímptota vertical.

$\lim_{x\to\pm\infty}\dfrac{3}{(x+1)^2} = 0 \rightarrow$ la recta $y = 0$ és una asímptota horitzontal.

9. Justifica la validesa o falsedat de les afirmacions següents:

a) **Si $f(x)$ és creixent en el punt $x = x_0$, aleshores $f'(x_0) > 0$.**

Fals. Per exemple la funció $f(x) = x^3$ és creixent en tots els reals i en canvi $f'(0) = 0$

b) **Si $f(x)$ és decreixent en el punt $x = x_0$, aleshores $f'(x_0) \leq 0$.**

Veritat, ja que si la funció és decreixent la funció derivada no és positiva.

c) **Si $f(x)$ és creixent a l'esquerra del punt $x = a$ i decreixent a la dreta del mateix punt, aleshores $x = a$ és un màxim.**

Fals. En el punt $x = a$, pot haver-hi una discontinuïtat asimptòtica.

10. Estudia els intervals de creixement i decreixement de les funcions següents:

a) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$

$f'(x) = \dfrac{-2}{(x-1)^2} < 0 \;\forall x \in D_f = \mathbf{R} - \{1\}$, la funció és decreixent en tot el seu domini.

b) $f(x) = \dfrac{2x}{2x^2+1}$

$D_f = \mathbf{R}$, $f'(x) = \dfrac{2-4x^2}{(2x^2+1)}$, $f'(x) = 0 \rightarrow 2 - 4x^2 =$

$= 0 \rightarrow x = \pm 1/\sqrt{2}$

$f'(-1) < 0 \rightarrow$ és decreixent en $(-\infty, -1/\sqrt{2})$,
$f'(0) > 0 \rightarrow$ és creixent en $(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ i
$f'(1) < 0 \rightarrow$ és decreixent en $(1/\sqrt{2}, +\infty)$.

c) $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$

$D_f = \mathbf{R}^+$, $f'(x) = \dfrac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$, $f'(x) = 0 \rightarrow \ln x - 1 =$

$= 0 \rightarrow \ln x = 1 \rightarrow x = e$

$f'(1) < 0 \rightarrow$ en l'interval (0,e) és decreixent,
$f'(e^2) > 0 \rightarrow$ en l'interval (e, + ∞) és creixent.

d) $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$

$D_f = \mathbf{R} - \{0\}$, $f'(x) = \dfrac{e^2(x-1)}{x^2}$,
$f'(x) = 0 \rightarrow x = 1$
$f'(-1) < 0$, $f'(1/2) < 0$ i $f'(2) > 0 \rightarrow$ decreix en $(-\infty,0)$ i $(0,1)$ i creix en $(1, +\infty)$

11. Contesta raonadament les preguntes següents:

a) **Per què igualem a zero la funció derivada, i resolem l'equació obtinguda, per trobar els punts estacionaris?**

En els punts estacionaris, la recta tangent a la gràfica de la funció és horitzontal, per tant el seu pendent ha de ser zero, i com que per definició el pendent de la recta tangent en un punt és la derivada de la funció en aquest punt, tenim que la derivada ha de ser zero.

b) **Per què una funció és creixent en un punt del seu domini, quan la derivada en aquest punt és positiva?**

Si $f'(x_0) > 0 \rightarrow m_t > 0 \rightarrow$ la recta t és creixent $\rightarrow f(x)$ és creixent.

c) **Per què en un punt d'inflexió de tangent horitzontal la funció és creixent o decreixent, i en els màxims i mínims relatius no?**

En els màxims i en els mínims canvia el creixement de la funció, aquesta passa de creixent a decreixent, o a l'inrevés, en canvi en els punts d'inflexió de tangent horitzontal no varia el creixement de la funció.

12. Esbrina els màxims, els mínims i els punts d'inflexió de tangent horitzontal de les funcions:

a) **$f(x) = 3x^4 - 6x^2$**

La funció sent contínua i derivable en $x = a$ passa de creixent a decreixent, ja que la derivada passa de positiva a negativa, per tant en $x = a$ la funció presenta un màxim relatiu.

b) **$f(x) = x^4 + 2x^3$**

Per exemple la funció $f(x) = -x^2$ en el punt $x = 0$.

c) $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x - 1}$

$$f'(x) = \frac{-e^x}{(e^x-1)^2}$$

$f'(x) \neq 0 \quad \forall x \in D_f \rightarrow$ no presenta cap punt estacionari

d) $f(x) = \dfrac{4}{\sqrt{x^2+8}}$

13. Contesta raonadament les preguntes següents:

a) **Una funció $f(x)$ és còncava en l'interval obert (a, b) i convexa en l'interval obert (b, c); vol dir això que en el punt d'abscissa $x = b$ hi ha un punt d'inflexió?**

No, pot ser que en el punt $x = b$ hi hagi una discontinuïtat.

b) **Si $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$, podem estar segurs que en $x = x_0$ hi ha un punt d'inflexió de tangent horitzontal?**

No, ja que no n'hi ha prou que $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$, si a més en $x = x_0$ canvia la concavitat de la funció, aleshores sí que és un punt d'inflexió de tangent horitzontal.

14. Determina els punts d'inflexió en general i els intervals de concavitat i convexitat de les funcions següents:

a) **$f(x) = x^3 - 2x^2 + 4$**

La funció és convexa en $(-\infty, \frac{2}{3})$, i és còncava en $(\frac{2}{3} + \infty)$, per tant $x = \frac{2}{3}$ és un punt d'inflexió.

b) $f(x) = x^3(x - 4)$

En $(-\infty, 0)$ i $(2, +\infty)$ la funció és còncava, en $(0, 2)$ és convexa, en $x = 0$ i $x = 2$ hi ha punts d'inflexió.

c) $f(x) = \dfrac{4x}{x^2 + 4}$

En els intervals $(-\infty, -2\sqrt{3})$ i $(0, 2\sqrt{3})$ la funció és convexa, en $(-2\sqrt{3}, 0)$ i $(2\sqrt{3}, +\infty)$ és còncava, $x = -2\sqrt{3}$, $x = 0$ i $x = 2\sqrt{3}$ són punts d'inflexió.

d) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 4}$

En $(-\infty, -2)$ i $(-2, 0)$ és convexa, en $(0, 2)$ i $(2, +\infty)$ és còncava, té un punt d'inflexió en $x = 0$.

15. Troba l'equació de la recta tangent al gràfic de les funcions següents en cada un dels seus punts d'inflexió:

a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$

$f'(x) = 3x^2 - 6x + 2 \to f''(x) = 6x - 6$
$f''(x) = 0 \to 6x - 6 = 0 \to x = 1$

$$\left.\begin{array}{l} m = f'(1) = 3 - 6 + 2 = -1 \\ y_0 = f(1) = 1 - 3 + 2 = 0 \to P(1,0) \end{array}\right\}$$

$y = -(x - 1) \to y = -x + 1$

b) $f(x) = x(x - 1)^3$

$f'(x) = 4x^3 - 9x^2 + 6x - 1 \to$
$f''(x) = 12x^2 - 18x + 6$
$f''(x) = 0 \to 12x^2 - 18x + 6 = 0 \to$

$$x_1 = 1,\ x_2 = \frac{1}{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} m_1 = f'(1) = 0 \\ y_1 = f(1) = 0 \to P_1(1,0) \end{array}\right\} y = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} m_2 = f'\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{4} \\ y_2 = f\left(\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{1}{16} \to P_2\left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{16}\right) \end{array}\right\}$$

$$y + \frac{1}{16} = \frac{1}{4}\left(x - \frac{1}{2}\right) \to y = \frac{1}{4}x - \frac{3}{16}$$

c) $f(x) = \dfrac{1}{1 + 3e^{-x}}$

$$f(x) = \frac{1}{1 + 3e^{-x}} = \frac{1}{1 + \dfrac{3}{e^x}} = \frac{e^x}{3 + e^x} \to$$

$$f'(x) = \frac{3e^x}{(3 + e^x)^2} \to f''(x) = \frac{3e^x(3 - e^x)}{(3 + e^x)^3}$$

$f''(x) = 0 \to 3e^x(3 - e^x) = 0 \to 3 - e^x = 0 \to e^x = 3 \to \ln 3$

$$\left.\begin{array}{l} m = f'(\ln 3) = \dfrac{1}{4} \\ y_0 = f(\ln 3) = \dfrac{1}{2} \to P\left(\ln 3, \dfrac{1}{2}\right) \end{array}\right\}$$

$$y - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}(x - \ln 3) \to y = \frac{1}{4}x + \frac{2 - \ln 3}{4}$$

d) $f(x) = e^{-x}$

$$f(x) = e^{-x} = \frac{1}{e^x} \to f'(x) = -\frac{1}{e^x} \to f''(x) = f(x) = \frac{1}{e^x}$$

$f''(x) \neq 0 \quad \forall x \in D_f \to$ no presenta cap punt d'inflexió

16. Determina els intervals de concavitat i convexitat de cadascuna de les funcions de l'exercici anterior.

a) punt d'inflexió: $x = 1$; $D_f = \mathbb{R}$
$(-\infty,1) \to f''(0) = -6 < 0 \to f(x)$ és inversa
$(1,+\infty) \to f''(2) = 6 > 0 \to f(x)$ és còncava

b) punts d'inflexió: $x_1 = 1$, $x_2 = \dfrac{1}{2}$; $D_f = \mathbb{R}$

$(-\infty,\frac{1}{2}) \to f''(0) = 6 > 0 \to f(x)$ és còncava

$(\frac{1}{2},1) \to f''(0{,}6) < 0 \to f(x)$ és convexa

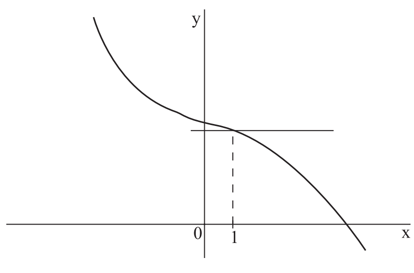
$(1,+\infty) \to f''(2) = 18 > 0 \to f(x)$ és còncava

c) punt d'inflexió: $x = \ln 3$; $D_f = \mathbb{R}$
$(-\infty,\ln 3) \to f''(0) > 0 \to f(x)$ és còncava
$(\ln 3,+\infty) \to f''(2) < 0 \to f(x)$ és convexa

d) no hi ha punts d'inflexió, $D_f = \mathbb{R}$
$(-\infty,+\infty) \to f''(0) = 1 > 0 \to f(x)$ és còncava

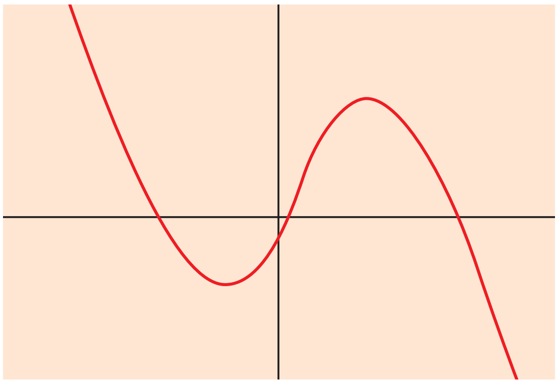
17. Dibuixa el gràfic d'una funció que tingui un punt d'inflexió de tangent horitzontal en el punt $x = 1$, de manera que en aquest punt la funció passi de còncava a convexa. Justifica el creixement o decreixement de la funció en el punt $x = 1$.

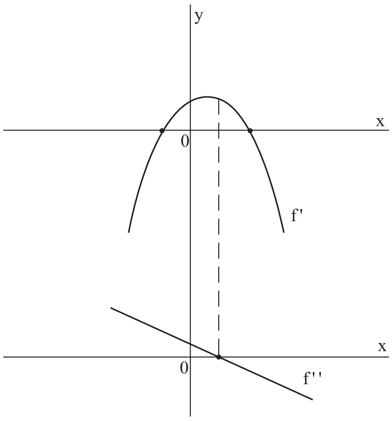
Resposta oberta. Per exemple:



En el punt d'abscissa $x = 1$ la funció és decreixent.

18. Dibuixa les gràfiques de *f'*(*x*) i de *f''*(*x*) a partir de la gràfica de *f*(*x*) (fig. 4.18).

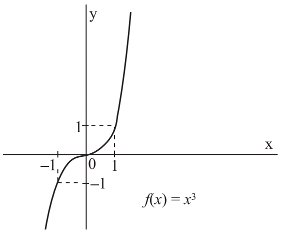


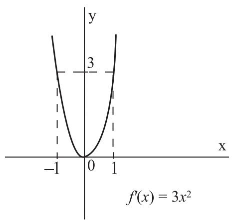


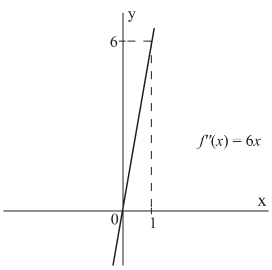
19. Si *f''*(x_0) > 0, aleshores *f*(*x*) és còncava en $x = x_0$, però no recíprocament. Justifica-ho.

Si $f(x)$ és còncava en $x = x_0 \rightarrow f'(x)$ és creixent en $x = x_0 \rightarrow f''(x_0) > 0$.

20. Donada la funció *f*(*x*) = x^3, dibuixa, mitjançant una taula de valors, les gràfiques de *f*(*x*), *f'*(*x*) i *f''*(*x*). Explica de manera raonada què passa en el punt *x* = 0.







En el punt $x = 0$ hi ha un punt d'inflexió de tangent horitzontal, on la funció és creixent, i passa de convexa a còncava.

21. Considera les funcions dels apartats *a*) i *b*) de l'exercici 12: de cadascuna d'aquestes, dedueix-ne els màxims i els mínims aplicant el test de la segona derivada. Compara'n els resultats.

***a*)** $f'(x) = 12x^3 - 12x \rightarrow f''(x) = 36x^2 - 12$

$f'(x) = 0 \rightarrow 12x^3 - 12x = 0 \rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = -1$

$f''(0) = -12 < 0 \rightarrow$ en $x = 0$ hi ha un màxim

$f''(1) = 24 > 0 \rightarrow$ en $x = 1$ hi ha un mínim

$f''(-1) = 24 > 0 \rightarrow$ en $x = -1$ hi ha un mínim

***b*)** $f'(x) = 4x^3 + 6x^2 \rightarrow f''(x) = 12x^2 + 12x$

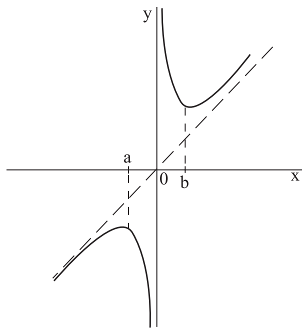
$f'(x) = 0 \rightarrow 4x^3 + 6x^2 = 0 \rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = -\dfrac{3}{2}$

$f''(0) = 0 \rightarrow$ en $x = 0$ hi ha un punt d'inflexió de tangent horitzontal

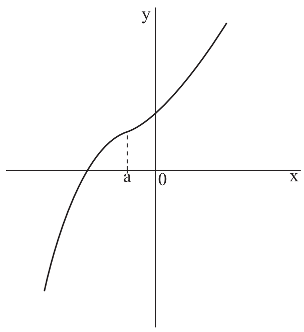
$f''\left(-\dfrac{3}{2}\right) = 9 > 0 \rightarrow$ en $x = -\dfrac{3}{2}$ hi ha un mínim

22. Dibuixa la gràfica d'una funció tal que:

***a*) Tingui un màxim i un mínim relatius, i no tingui cap punt d'inflexió.**



***b*) Tingui un punt d'inflexió i no tingui cap màxim ni cap mínim relatius.**



23. *a*) A partir de les gràfiques dels exemples 4 i 5, justifica les simetries, el recorregut i

els màxims i mínims absoluts de cada una de les funcions.

Exemple 4: La gràfica és simètrica respecte de l'origen. $R_f = \mathbf{R}$ i no té ni màxim ni mínim absoluts.

Exemple 5: La gràfica de la funció no és simètrica ni respecte de l'eix d'ordenades ni respecte de l'origen. $R_f = (0, +\infty)$, el punt $(-1, 0)$ és un mínim absolut i no hi ha cap màxim absolut.

b) **Justifica els punts d'inflexió de cadascuna de les gràfiques dels exemples 2, 3 i 5.**

Exemple 2: Hi ha dos punts d'inflexió, un en $x = a \in (-\sqrt{\frac{1}{2}}, 0)$, ja que la gràfica en aquest punt passa de convexa a còncava, i un altre en $x = b \in (0, \sqrt{\frac{1}{2}})$ on la gràfica passa de còncava a convexa.

Exemple 3: Hi ha un punt d'inflexió en un punt $x < 2$, on la gràfica passa de convexa a còncava.

Exemple 5: En un punt $x = c \in (-1, 0)$ la gràfica de la funció passa de còncava a convexa, per tant $x = c$ és un punt d'inflexió, i en $x > 1$ n'hi ha un altre, donat que la gràfica passa de convexa a còncava.

24. Dibuixa la gràfica de les funcions:

a) $f(x) = 6x^2 - 2x^3$

$D_f = \mathbf{R}$. En ser una funció polinòmica no té cap tipus d'asímptota.

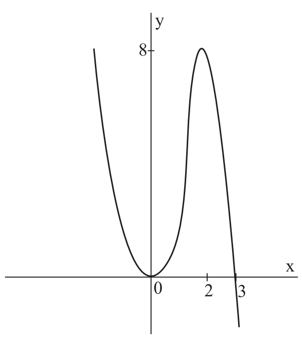
$f(x) = 0 \rightarrow 6x^2 - 2x^3 = 0 \rightarrow 2x^2(3 - x) = 0 \rightarrow x = 0,\ x = 3$; talla els eixos en (0,0) i (3,0).

$f'(x) = 12x - 6x^2$

$f'(x) = 0 \rightarrow 12x - 6x^2 = 0 \rightarrow 6x(2 - x) = 0 \rightarrow x = 0,\ x = 2$.

$f''(x) = 12 - 12x$

$f''(0) = 12 > 0 \rightarrow$ a l'origen hi ha un mínim, $f''(2) = -12 < 0 \rightarrow$ en el punt (2,8) hi ha un màxim.



No presenta cap tipus de simetria. $R_f = \mathbf{R}$, no hi ha cap punt de la gràfica que sigui un màxim o un mínim absoluts.

En l'interval $(-\infty, 1)$ és convexa, en $(1, +\infty)$ és còncava. El punt (1, 4) és un punt d'inflexió, no hi ha cap simetria. $R_f = \mathbf{R}$, no hi ha cap punt que sigui un màxim o un mínim absoluts.

b) $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2}$

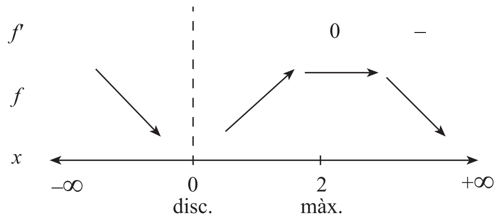
$D_f = \mathbf{R} - \{0\}$, $\lim_{x\to 0} \dfrac{x-1}{x^2} = -\infty \rightarrow x = 0$ és una asímptota vertical.

$\lim_{x\to\infty} \dfrac{x-1}{x^2} = 0 \rightarrow$ la recta $y = 0$ és una asímptota horitzontal. No en té d'obliqües.

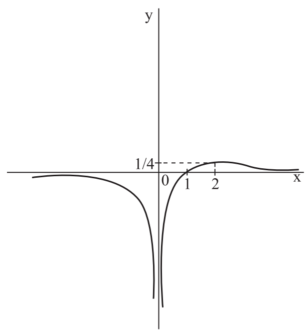
$f(x) = 0 \rightarrow x - 1 = 0 \rightarrow x = 1$, talla l'eix d'abscisses en el punt (1,0).

$x = 0 \notin D_f \rightarrow$ no talla l'eix d'ordenades.

$f'(x) = \dfrac{-x+2}{x^3}$, $f'(x) = 0 \rightarrow -x + 2 = 0 \rightarrow x = 2$



En el punt (2,1/4) la funció presenta un màxim.



No presenta simetries. $R_f = (-\infty, 1/4]$, el punt (2,1/4) és un màxim absolut, no té mínim absolut.

És convexa en els intervals $(-\infty, 0)$ i $(0, 3)$, és còncava en l'interval $(3, +\infty)$, en el punt d'abscissa x = 3 hi ha un punt d'inflexió, no hi ha simetries. $R_f = (-\infty, \frac{1}{4})$, el punt $(2, \frac{1}{4})$ és un màxim absolut, no té mínim absolut.

c) $f(x) = \dfrac{x^2 - x}{8x^2 + 1}$

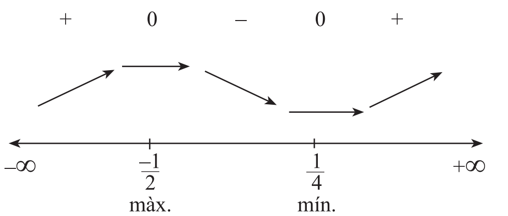
$D_f = \mathbf{R} \rightarrow$ no té asímptotes verticals

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2 - x}{8x^2 + 1} = \dfrac{1}{8}$ $\rightarrow$ la recta $y = 1/8$ és una asímptota horitzontal.

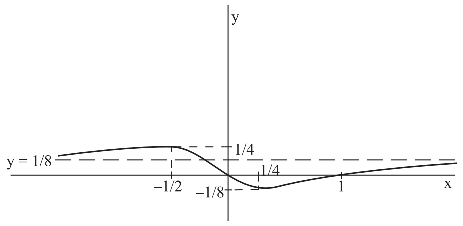
No té asímptotes obliqües.

$f(x) = 0 \rightarrow x^2 - x = 0 \rightarrow x(x - 1) = 0 \rightarrow x = 0$, $x = 1$; passa pels punts (0,0), (1,0)

$f'(x) = \dfrac{8x^2 + 2x - 1}{(8x^2 + 1)^2}$, $f'(x) = 0 \rightarrow 8x^2 + 2x - 1 =$ $= 0 \rightarrow x = -1/2$, $x = 1/4$.



En (–1/2,1/4) hi ha un màxim, en (1/4, –1/8) hi ha un mínim.



La gràfica no és simètrica ni respecte de l'eix d'ordenades, ni respecte de l'origen.

$R_f = [-1/8, 1/4]$, el màxim i el mínim relatius són també absoluts.

Considerem els punts d'abcissa *a*, *b* i *c* tals que: $a < -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} < b < 0$ i $c > 1$, on la funció canvia la concavitat, és còncava en $(-\infty, a)$ i (b, c) i és convexa en (a, b) i $(c, +\infty)$, els punts *a*, *b* i *c* són punts d'inflexió. La gràfica no és simètrica ni respecte de l'eix d'ordenades ni respecte de l'origen. $R_f = (-\frac{1}{8}, \frac{1}{4})$, el punt $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ és un màxim absolut i el punt $(\frac{1}{4}, -\frac{1}{8})$ és un mínim absolut.

d) $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x}{x - 1}$

$D_f = \mathbf{R} - \{1\}$

$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2 + 3x}{x - 1} = \infty \rightarrow$ la recta $x = 1$ és una asímptota vertical.

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2 + 3x}{x - 1} = \infty \rightarrow$ no hi ha asímptotes horitzontals.

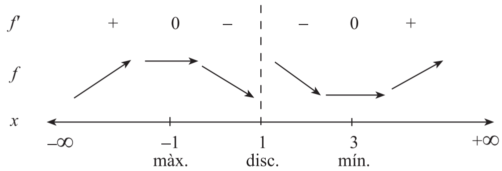
$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 + 3x}{x(x - 1)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x + 3}{x - 1} = 1$$

$$n = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2 + 3x}{x - 1} - x \right) = \lim_{x\to\infty} \frac{4x}{x - 1} = 4$$

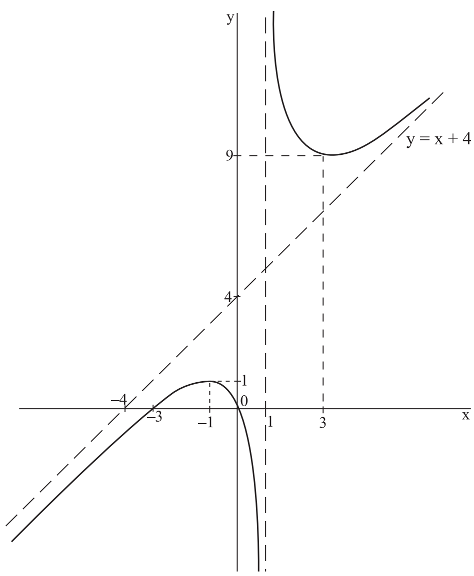
la recta $y = x + 4$ és una asímptota obliqua.

$f(x) = 0 \rightarrow x^2 + 3x = 0 \rightarrow x = -3$, $x = 0$; talla els eixos en els punts (–3,0) i (0,0)

$f'(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{(x - 1)^2}$, $f'(x) = 0 \rightarrow x^2 - 2x - 3 =$ $= 0 \rightarrow x = -1$, $x = 3$



Hi ha un màxim en (–1,1) i un mínim en (3,9).



No és simètrica ni respecte de l'eix d'ordenades, ni respecte de l'origen.

$R_f = \mathbf{R} - (1,9)$, no té ni màxims ni mínims absoluts.

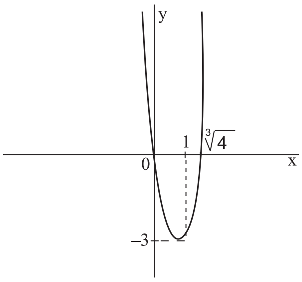
En l'interval $(-\infty, 1)$ és convexa i és còncava en $(1, +\infty)$, no té cap punt d'inflexió. El recorregut és $R_f = \mathbf{R} - (1, 9)$, no és simètrica ni respecte de l'eix d'ordenades ni respecte de l'origen. No hi ha ni màxim ni mínim absoluts.

A partir de les gràfiques dibuixades, informa sobre la concavitat, els punts d'inflexió, les simetries, el recorregut i els màxims i mínims absoluts de cada funció.

25. Dibuixa la gràfica de les funcions següents:

a) $f(x) = x^4 - 4x$

$D_f = \mathbf{R}$. És una funció polinòmica, per tant no té cap tipus d'asímptota.
$x^4 - 4x = 0 \rightarrow x = 0,\ x = \sqrt[3]{4}$; talla els eixos en l'origen i en el punt $(\sqrt[3]{4}, 0)$
$f'(x) = 4x^3 - 4,\ f'(x) = 0 \rightarrow 4x^3 - 4 = 0 \rightarrow$
$\rightarrow x = 1$
$f''(x) = 12x^2,\ f''(1) = 12 > 0 \rightarrow$ en el punt $(1, -3)$ hi ha un mínim.

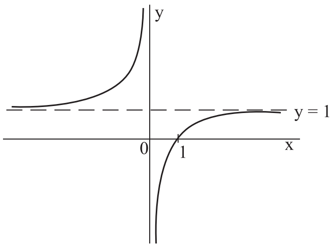


b) $f(x) = \dfrac{x-1}{x}$

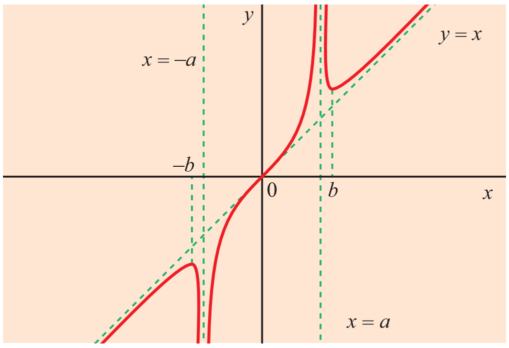
$D_f = \mathbf{R} - \{0\}$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x-1}{x} = \infty \rightarrow$ l'eix d'ordenades és una asímptota vertical.

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x-1}{x} = 1 \rightarrow$ la recta $y = 1$ és una asímptota horitzontal. No en té d'oblíqües.
$f(x) = 0 \rightarrow x = 1$, talla l'eix d'abscisses en el punt $(1,0)$
$x = 0 \notin D_f \rightarrow$ no talla l'eix d'ordenades
$f'(x) = 1/x^2$, no té cap punt estacionari. Com que $f(x) > 0,\ \forall x \in D_f$; la funció és creixent en tot el seu domini.



26. Observa la gràfica de la funció (fig. 4.28) i dóna tota la informació possible de la funció.



La recta $y = x$ és una asímptota obliqua, les rectes $x = -a$ i $x = a$ són asímptotes verticals. En el punt $x = -b$ hi ha un màxim relatiu, en $x = 0$ hi ha un punt d'inflexió de tangent horitzontal i en $x = b$ hi ha un mínim relatiu. Talla els eixos de coordenades en l'origen, el domini i el recorregut són $D_f = \mathbf{R} - \{-a, a\}$ i $R_f = \mathbf{R}$ respectivament. És una funció imparella, ja que la gràfica és simètrica respecte de l'origen, no té ni màxim ni mínim absoluts. És creixent en $(-\infty, -b)$, $(-a, a)$ i $(b, +\infty)$, i és decreixent en $(-b, -a)$ i (a, b), és convexa en $(-\infty, -a)$ i $(-a, 0)$ i és còncava en $(0, a)$ i $(a, +\infty)$.

27. En l'exemple 6, troba el màxim a partir de la variable *y*.

$x = 30 - (3/2)y = f(y) = (-3/2)y^2 - 20y + 17\,000 \rightarrow f'(y) = -3y - 20$
$f'(y) = 0 \rightarrow y = -20/3 \notin [0,20)$
Per a $y = 0 \rightarrow f(0) = 17\,000$ cm². Per a $y = 20 \rightarrow f(20) = 16\,000$ cm².
La solució és $y = 0 \rightarrow x = 30$ cm.

28. Resol l'exemple 7 a partir de la variable *r*.

$$A = \pi r^2 + c^2$$

$$2\pi r + 4c = 1 \rightarrow c = \frac{1 - 2\pi r}{4}$$

$$A = \pi r^2 + \left(\frac{1-2\pi r}{4}\right)^2 = \pi r^2 + \frac{1 - 4\pi r + 4\pi^2 r^2}{16} =$$

$$= \frac{4(4\pi + \pi^2)r^2 - 4\pi r + 1}{16}$$

$f(r) = \dfrac{4\pi + \pi^2}{4} r^2 - \dfrac{1}{4}\pi r + \dfrac{1}{16} \rightarrow$ polinòmica de 2n grau on $a > 0$, per tant tindrà un mínim.

$$f'(r) = \frac{4\pi + \pi^2}{2} r - \frac{1}{4}\pi$$

$$f'(r) = 0 \rightarrow \frac{4\pi + \pi^2}{2} r - \frac{1}{4}\pi = 0 \rightarrow \pi = \frac{1}{8 + 2\pi} m$$

Per construir la circumferència es necessita:

$$2\pi r = 2\pi \frac{1}{8+2\pi} = \frac{2\pi}{8+2\pi} = \frac{\pi}{4+\pi} \simeq 0{,}44 \text{ m} = 44 \text{ cm}$$

La resta de filferro 1 – 0,44 = 0,56 m = 56 cm serà per construir el quadrat.

29. Descompon el nombre 36 en dos sumands, tals que el seu producte sigui màxim.

$f(x) = x(36 - x) = 36x - x^2$, funció que té un màxim.

$f'(x) = 36 - 2x$; $f'(x) = 0 \rightarrow x = 18$.

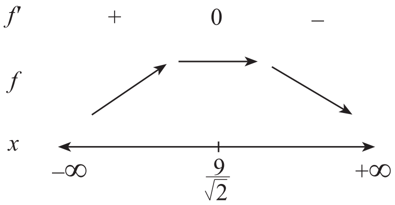
30. De tots els triangles rectangles amb hipotenusa igual a 9 cm, calcula el d'àrea més gran.

$S = xy/2$ i $x^2 + y^2 = 81 \rightarrow y = \sqrt{81-x^2}$.

$f(x) = \dfrac{x\sqrt{81-x^2}}{2} = \dfrac{\sqrt{81x^2-x^4}}{2} \rightarrow f'(x) =$

$\rightarrow \dfrac{81-2x^2}{2\sqrt{81-x^2}}$

$f'(x) = 0 \rightarrow 81 - 2x^2 = 0 \rightarrow x^2 = 81/2 \rightarrow x =$
$= 9/\sqrt{2}$ cm



El valor $x = 9/\sqrt{2}$ cm maximitza l'àrea del triangle.

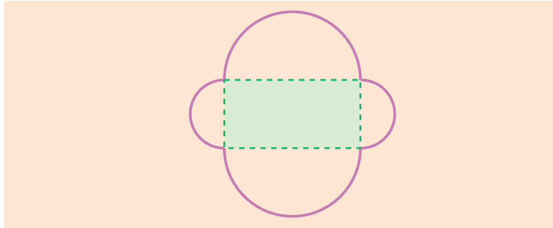
$f(9/\sqrt{2}) = 81/4$ cm^2.

31. Demostra que de tots els rectangles de perímetre 4*p*, el que té àrea màxima és el quadrat de costat *p*.

L'àrea del quadrat de costat p és $S_c = p^2$.

L'àrea d'un rectangle de perímetre $4p$ és $S_r = (2p - q)\, q = 2pq - q^2$ com que $(q - p)^2 > 0$ $\rightarrow q^2 - 2pq + p^2 > 0 \rightarrow p^2 > 2pq - q^2 \rightarrow S_c > S_r$

32. El perímetre d'un rectangle és de 4m. Els seus costats se substitueixen per semicircumferències exteriors, tal com indica el dibuix (fig. 4.31). Troba les dimensions del rectangle que facin que la superfície de la nova figura sigui mínima. Calcula aquesta superfície mínima.



$2x$: costat gran del rectangle
$2y$: costat petit del rectangle
$4x + 4y = 4 \rightarrow x + y = 1 \rightarrow y = 1 - x$
$S = 2x \cdot 2y + \pi x^2 + \pi y^2 = 4xy + \pi(x^2 + y^2) =$
$= 4x(1 - x) + \pi[x^2 + (1 - x)^2] = 4x - 4x^2 +$
$+ \pi(x^2 + 1 - 2x + x^2) = 4x - 4x^2 +$
$+ \pi(2x^2 - 2x + 1) = (2\pi - 4)x^2 + (4 - 2\pi)x + \pi$
$\rightarrow f(x) = (2\pi - 4)x^2 + (4 - 2\pi)x + \pi$
és una funció polinòmica de 2n grau, on $a > 0$ $\rightarrow$ tindrà un mínim.
$f'(x) = 2(2\pi - 4)x + 4 - 2\pi$
$f'(x) = 0 \rightarrow 2(2\pi - 4)x + 4 - 2\pi = 0 \rightarrow 2(2\pi - 4)\,x =$
$= 2\pi - 4 \rightarrow x = \dfrac{1}{2}$ m

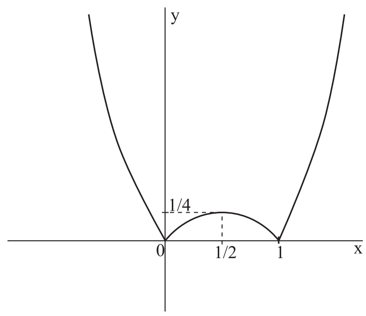
$y = 1 - x = 1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$ m

$S = 4xy + \pi(x^2 + y^2) = 4 \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} + \pi\left(\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4}\right) =$

$= 1 + \dfrac{1}{2}\pi = \dfrac{2+\pi}{2}$ m^2

Acabem

1. Dibuixa la gràfica de la funció *f*(*x*) = |*x*² – *x*|. Estudia la continuïtat i la derivabilitat en els punts *x* = 0 i *x* = 1.

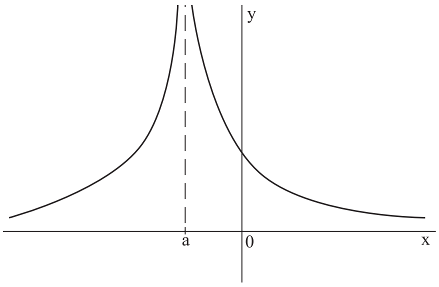


En els punts $x = 0$ i $x = 1$ la funció és contínua, però no derivable.

2. Dibuixa, en cada cas, la gràfica d'una funció que tingui una discontinuïtat asimptòtica en un punt, i que en aquest punt:

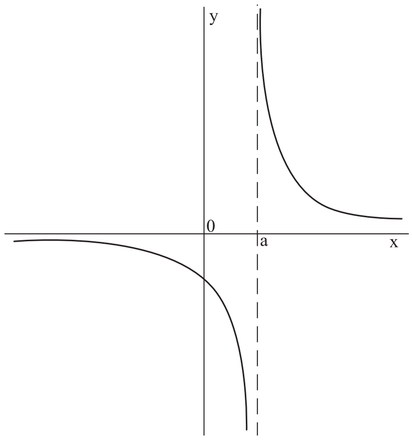
***a*) En canviï el creixement, però no la concavitat.**

Respostes obertes, per exemple:



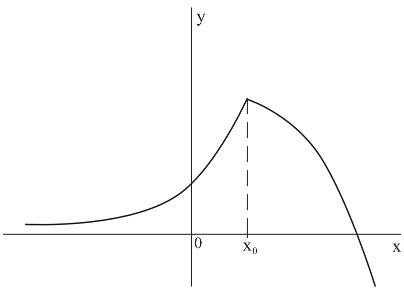
***b*) En canviï la concavitat, però no el creixement.**

Respostes obertes, per exemple:



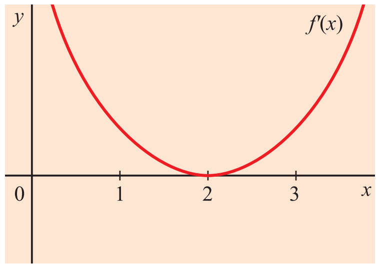
3. Dibuixa la gràfica d'una funció que sigui contínua en tots els reals i que tingui un punt $x = x_0$ on canviï el creixement i la concavitat de la funció. En aquest punt és derivable la funció? Raona la resposta.

Resposta oberta, per exemple:



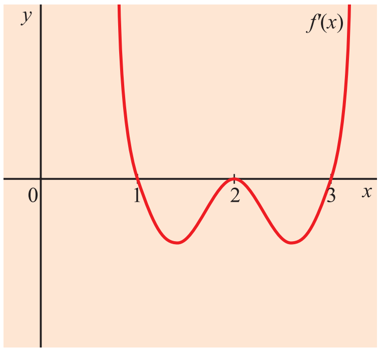
En el punt $x = x_0$ la funció no és derivable, ja que en aquest punt no existeix una única recta tangent a la gràfica.

4. Tenim una funció *f*(*x*) de la qual sabem que la seva derivada és positiva en tot $x \neq 2$ i s'anul·la en $x = 2$, tal com indica la figura (fig. 4.32). Què pots dir de la funció *f*(*x*) en el punt $x = 2$? Tindrà en aquest punt un màxim, un mínim, un punt d'inflexió? Raona detalladament la resposta.



En el punt $x = 2$ hi ha un punt d'inflexió de tangent horitzontal; ja que $f'(x) > 0\ \forall x \in D_f$ i $x \neq 2$, per tant no canvia el naixement en el punt $x = 2$, tot i que $f'(2) = 0$.

5. Sabem que la gràfica de la derivada *f'*(*x*) d'una funció *f*(*x*) és el que mostra el dibuix (fig. 4.33), s'anul·la en *x* = 1, *x* = 2 i *x* = 3. Digues quins valors de *x* corresponen a mínims relatius de *f*(*x*). Explica el perquè de la teva resposta.

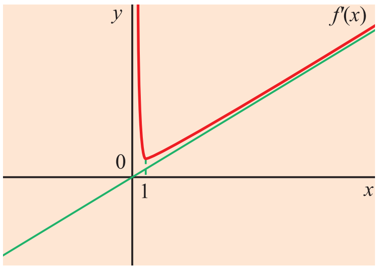


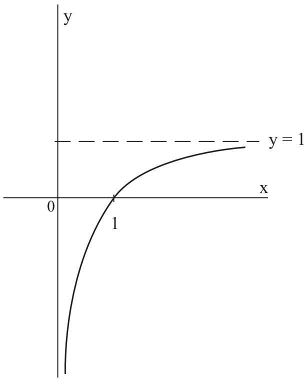
En el punt $x = 1$ la funció $f'(x)$ s'anul·la i passa de positiva a negativa, per tant la funció $f(x)$ passa de creixent a decreixent, aleshores en $x = 1$ hi ha un màxim.

En el punt $x = 0$ també s'anul·la $f'(x)$, però no canvia de signe, continua sent negativa, per tant la funció $f(x)$ és decreixent en aquest punt, aleshores en $x = 0$ hi ha un punt d'inflexió de tangent horitzontal.

En el punt $x = 3$ tenim que $f'(3) = 0$, i la derivada passa de negativa a positiva, la funció $f(x)$ passa de decreixent a creixent, aleshores en $x = 3$ hi ha un mínim.

6. Tenim una funció derivable *f*(*x*) definida per a *x* > 0, de la qual sabem que la seva gràfica és el que s'indica (fig. 4.34), l'eix d'ordenades és asímptota vertical, la recta *y* = *x* és asímptota obliqua i té un mínim en el punt *x* = 1. Fes un esquema senzill de la gràfica de la funció *f'*(*x*) tot explicant raonadament la resposta.





7. **Sigui $f(x)$ una funció derivable en tots els reals.**

a) **Si sabem que $f'(a) = 0$, pots afirmar que $f(x)$ té necessàriament un màxim o un mínim relatiu en el punt $x = a$?**

No, ja que també podria ser un punt d'inflexió de tangent horitzontal.

b) **Si sabem que la derivada de $f(x)$ és negativa en tots els punts $x < a$ i positiva en tots els punts $x > a$, pots afirmar que $f(x)$ té necessàriament un mínim relatiu en el punt $x = a$?**

Sí, ja que en ser derivable també és contínua, i això fa que necessàriament en $x = a$ hi hagi un mínim relatiu.

8. **Calcula el valor de k per tal que:**

a) **La funció $f(x) = x\,e^{-kx}$ tingui un màxim o un mínim relatiu en el punt $x = 1$.**

$f'(x) = e^{-kx}(1 - kx)$

$f'(1) = 0 \to e^{-k}(1 - k) = 0 \to 1 - k = 0 \to k = 1$

b) **La funció $f(x) = \dfrac{2x^2}{(kx+1)^2}$ tingui límit 2 quan $x \to +\infty$.**

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2}{(kx+1)^2} = \dfrac{2}{k^2} \to \dfrac{2}{k^2} = 2 \to k^2 = 1 \to$
$k = \pm 1$

c) **La funció $f(x) = \ln(kx^2 + 1)$ sigui creixent en $x = 1$.**

$f'(x) = \dfrac{2kx}{kx^2+1}$; $f'(1) > 0 \to \dfrac{2k}{k+1} > 0 \to$
$k < -1$ o $k > 0$

9. **Raona la certesa o la falsedat de les afirmacions següents:**

a) **Dues funcions amb idèntica funció derivada són necessàriament idèntiques.**

Fals, per exemple $f(x) = x^2$ i $g(x) = x^2 + 2$ tenen la mateixa funció derivada i en canvi són diferents.

b) **La funció $f(x) = 2x + \cos x$ és sempre creixent.**

Veritat, ja que $f'(x) = 2 - \sin x$ és sempre positiva; perquè $\sin x \le 1 < 2 \to 2 - \sin x > 0$

c) **La funció $f(x) = 4x - \sin x$ no té cap punt estacionari.**

Veritat, ja que $f'(x) = 4 - \cos x$ no s'anul·la per cap valor de x, perquè $\cos x \neq 4\ \forall x \in \mathbb{R}$

10. **Determina els coeficients a i b de la funció següent $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$, sabent que canvia de còncava a convexa en el punt $x = 1$ i que la recta tangent al gràfic de la funció en aquest mateix punt és horitzontal.**

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \to f''(x) = 6x + 2a$
$f''(1) = 0 \to 6 + 2a = 0 \to a = -3$
$f'(1) = 0 \to 3 + 2a + b = 0 \to 3 - 6 + b = 0 \to$
$b = 3$
$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$

11. **Determina els coeficients a i b de la funció següent $f(x) = ax^2 + bx + 2$, sabent que la recta tangent al gràfic en el punt $x = 1$ és la recta $y = -2x$.**

$f'(1) = -2 \to 2a + b = -2$
$f(1) = -2 \to a + b + 2 = -2 \to a + b = -4$
$a = 2,\ b = -6 \to f(x) = 2x^2 - 6x + 2$

12. **Determina quins són els coeficients a, b i c de la funció $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ per tal que aquesta funció tingui un màxim relatiu en $x = 0$, un mínim relatiu en $x = 1$ i compleixi la condició $f(1) = -\dfrac{1}{2}$.**

$f'(0) = 0 \to c = 0$
$f'(1) = 0 \to 3a + 2b + c = 0 \to 3a + 2b = 0$
$f(1) = -1/2 \to a + b + c = -1/2 \to a + b = -1/2$

D'on s'obté que $a = 1$, $b = -3/2 \to$
$f(x) = x^3 - (3/2)x^2$

13. Donada la funció $f(x) = \dfrac{e^x}{\ln x}$, indica el seu domini, els límits per a $x \to 0$ i $x \to \infty$, i les asímptotes. Raona detalladament tot el que fas.

$D_f = \mathbf{R}^+ - \{1\} \to$ la recta $x = 1$ és una asímptota vertical.

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$, $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$.

14. Considerant la funció $f(x) = -x^3 + 3x^2$, troba l'equació de la recta tangent al gràfic en el punt d'inflexió.

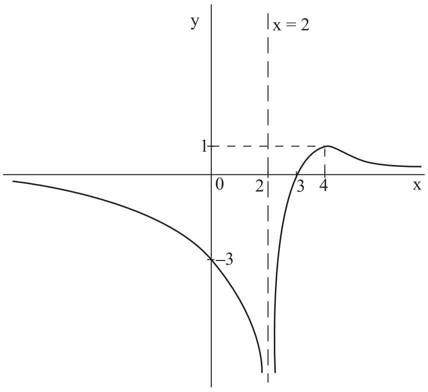
$f'(x) = -3x^2 + 6x \to f''(x) = -6x + 6$
$f''(x) = 0 \to -6x + 6 = 0 \to x = 1$

$$\left.\begin{aligned} m &= f'(1) = 3 \\ y_0 &= f(1) = 2 \to P(1,2) \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &y - 2 = 3(x-1) \to \\ &\to y = 3x - 1 \end{aligned}$$

15. Dibuixa la gràfica de les funcions següents:

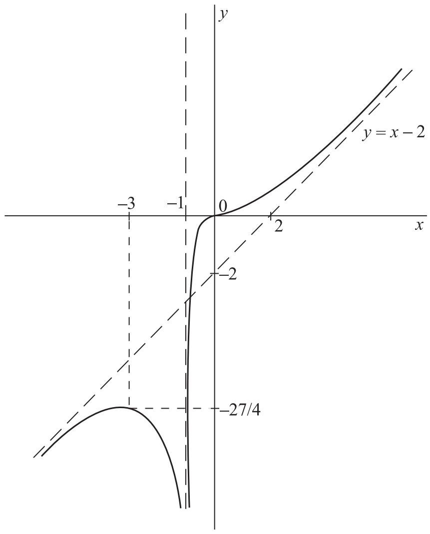
a) $f(x) = \dfrac{4x-12}{(x-2)^2}$

$D_f = \mathbf{R} - \{2\}$, les rectes $x = 2$ i $y = 0$ són una asímptota vertical i una asímptota horitzontal, respectivament. Talla els eixos en els punts (3, 0) i (0, –3), i té un màxim en el punt (4, 1), ja que és decreixent en (–∞, 2) i (4, + ∞), i creixent en (2, 4).



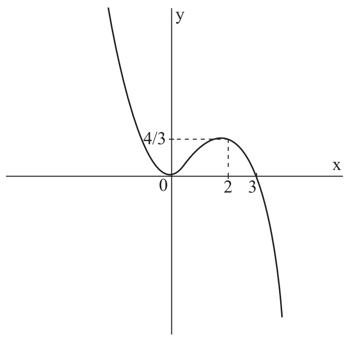
b) $f(x) = \dfrac{x^3}{(x+1)^2}$

$D_f = \mathbf{R} - \{-1\}$, la recta $x = -1$ és una asímptota vertical, no en té d'horitzontals i la recta $y = x - 2$ n'és una d'obliqua. Passa per l'origen de coordenades, els punts estacionaris són $x = -3$ i $x = 0$, i com que és creixent en els intervals (–∞, –3) i (–1, + ∞), i decreixent en (–3, –1), fa que en (–3, –27/4) hi hagi un mínim i en l'origen un punt d'inflexió de tangent horitzontal.



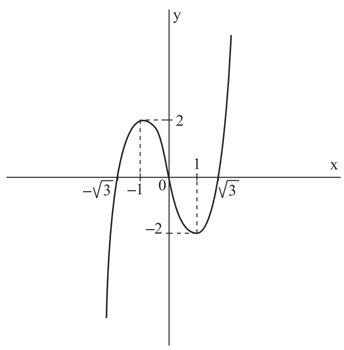
c) $f(x) = x^2 - \dfrac{1}{3}x^3$

En ser una funció polinòmica, no té cap tipus d'asímptotes. Talla els eixos en els punts (0,0) i (3,0). Els valors que anul·len la derivada són $x = 0$ i $x = 2$, en el punt (0,0) la funció presenta un mínim i en (2,4/3) un màxim, ja que és decreixent en (–∞,0) i (2, + ∞) i és creixent en (0,2).



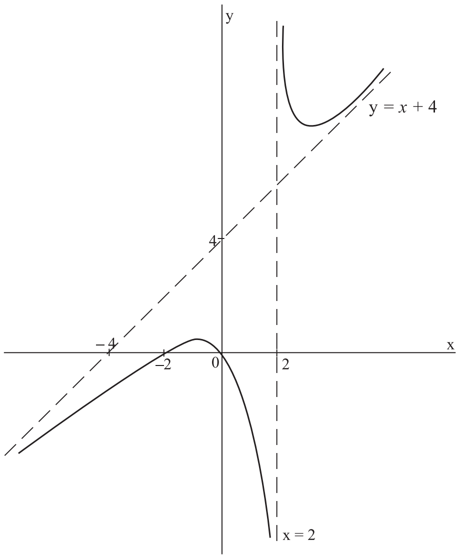
d) $f(x) = x^3 - 3x$

$D_f = \mathbf{R}$, no té asímptotes de cap tipus, talla els eixos en $(-\sqrt{3},0)$, (0,0) i $(\sqrt{3},0)$. Té un màxim relatiu en (–1, –2) i un mínim relatiu en el punt (–2,1), ja que és creixent en (–∞, –1) i (1, + ∞), i decreixent en (–1,1).



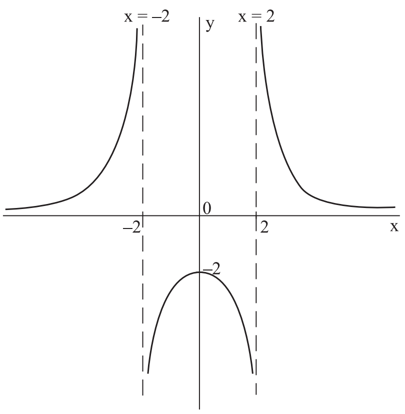
e) $f(x) = \dfrac{x^2+2x}{x-2}$

D_f = **R** – {2}, la recta x = 2 és una asímptota vertical, no en té d'horitzontals i la recta $y = x + 4$ és una asímptota obliqua. Passa pels punts (–2,0) i (0,0), els valors $x = 2 \pm$ $\pm\, 2\sqrt{2}$ anul·len la primera derivada, és creixent en $(-\infty,\ 2 - 2\sqrt{2})$ i $(2 + 2\sqrt{2},\ +\infty)$, i decreixent en els intervals $(2 - 2\sqrt{2}, 2)$ i $(2, 2 + 2\sqrt{2})$, per tant en el punt $x = 2 - 2\sqrt{2}$ la funció presenta un màxim i en $x = 2 +$ $+\, 2\sqrt{2}$ un mínim.



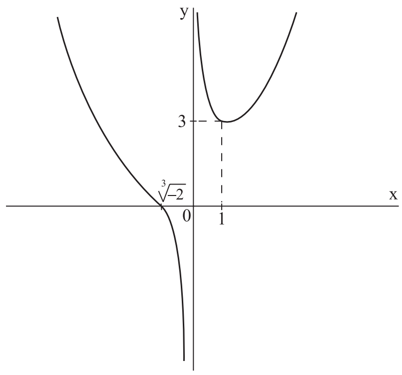
f) $f(x) = \dfrac{8}{x^2-4}$

El domini és D_f = **R** – {–2, 2}, les rectes x = –2 i x = 2 són asímptotes verticals, la recta y = 0 és una asímptota horitzontal. Té un màxim relatiu en el punt (0, –2) i no té cap mínim relatiu, ja que és creixent en els intervals $(-\infty, -2)$ i $(-2, 0)$, i és decreixent en $(0, 2)$ i $(2, +\infty)$.



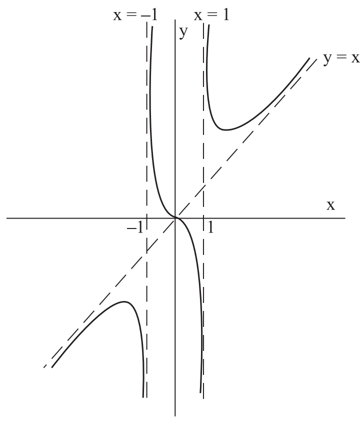
g) $f(x) = x^2 + \dfrac{2}{x}$

D_f = **R** – {0}, l'eix d'ordenades és una asímptota vertical, no en té d'horitzontals ni d'obliqües. Talla l'eix d'abscisses en el punt $(-\sqrt[3]{2},\ 0)$, en x = 1 hi ha un punt estacionari, que resulta ser un mínim ja que és decreixent en $(-\infty, 0)$ i $(0, 1)$ i creixent en $(1, +\infty)$.



h) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-1}$

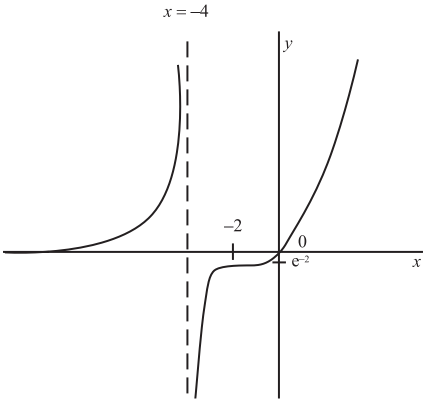
D_f = **R** – {–1,1}, les rectes x = –1 i x = 1 són asímptotes verticals, la recta $y = x$ és una asímptota obliqua. Té un màxim i un mínim relatius en $x = -\sqrt{3}$ i en $x = \sqrt{3}$ respectivament, el punt (0, 0) és un punt d'inflexió de tangent horitzontal, ja que és creixent en $(-\infty, -\sqrt{3})$ i $(\sqrt{3}, +\infty)$ i decreixent en $(-\sqrt{3}, -1)$, $(-1, 1)$ i $(1, \sqrt{3})$.



i) $f(x) = \dfrac{xe^x}{x+4}$

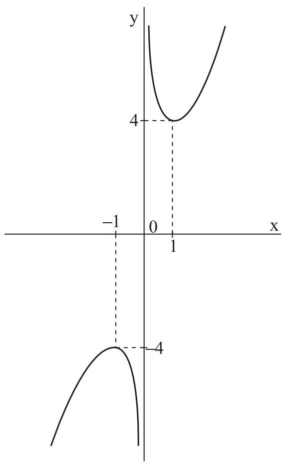
D_f = **R** – {– 4}, la recta x = – 4 és una asímptota vertical, no en té d'horitzontals ni d'obliqües. Talla els eixos en l'origen, té un punt estacionari en x = –2, com que és creixent en tot el seu domini, fa que en el punt

$(-2, -e^{-2})$ hi hagi un punt d'inflexió de tangent horitzontal.



j) $f(x) = \dfrac{x^4 + 3}{x}$

$D_f = \mathbf{R} - \{0\}$, l'eix *OY* és una asímptota vertical, no n'hi ha de cap més tipus. No talla els eixos en cap punt, $f'(x)$ s'anul·la en $x = \pm 1$, en el punt $(-1, -4)$ hi ha un màxim i en $(1, 4)$ un mínim, ja que és creixent en $(-\infty, -1)$ i $(1, +\infty)$, i decreixent en $(-1, 0)$ i $(0, 1)$.



16. A partir de la gràfica, dóna tota la informació possible de les funcions dels apartats *a*, *d*, *f* i *h* de l'exercici anterior.

a) $D_f = \mathbf{R} - \{2\}$, les rectes $x = 2$ i $y = 0$ són una asímptota vertical i una asímptota horitzontal respectivament. Talla els eixos en els punts $(3, 0)$ i $(0, -3)$, té un màxim absolut en el punt $(4, 1)$ i presenta un punt d'inflexió en $x = 5$. És decreixent en $(-\infty, 2)$ i $(4, +\infty)$, creixent en $(2, 4)$, és convexa en $(-\infty, 2)$ i $(2, 5)$ i còncava en $(5, +\infty)$. No és simètrica ni respecte de l'eix d'ordenades ni respecte de l'origen, el recorregut és $R_f = (-\infty, 1)$.

d) $D_f = \mathbf{R}$, talla l'eix d'abscisses en $(-\sqrt{3}, 0)$, $(0, 0)$ i $(\sqrt{3}, 0)$, té un màxim relatiu en $(-1, -2)$ i un mínim relatiu en el punt $(-2, 1)$, el punt $(0, 0)$ és un punt d'inflexió. És simètrica respecte de l'origen, és creixent en $(-\infty, -1)$ i $(1, +\infty)$, decreixent en $(-1, 1)$, és convexa en $(-\infty, 0)$ i còncava en $(0, +\infty)$. $R_f = \mathbf{R}$ no hi ha ni màxim ni mínim absoluts.

f) El domini és $D_f = \mathbf{R} - \{-2, 2\}$, les rectes $x = -2$ i $x = 2$ són asímptotes verticals, la recta $y = 0$ és una asímptota horitzontal. Té un màxim relatiu en el punt $(0, -2)$, no té cap mínim relatiu ni cap punt d'inflexió. És creixent en els intervals $(-\infty, -2)$ i $(-2, 0)$, i és decreixent en $(0, 2)$ i $(2, +\infty)$, és còncava en $(-\infty, -2)$ i $(2, +\infty)$ i convexa en l'interval $(-2, 2)$. És simètrica respecte de l'eix d'ordenades, el recorregut és $R_f = \mathbf{R}$, no hi ha cap màxim ni cap mínim absoluts.

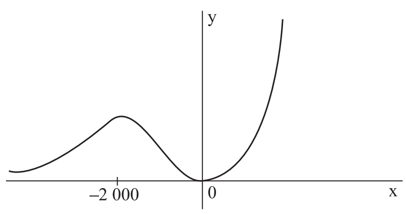
h) $D_f = \mathbf{R} - \{-1, 1\}$, les rectes $x = -1$ i $x = 1$ són asímptotes verticals, la recta $y = x$ és una asímptota obliqua. Té un màxim i un mínim relatius en $x = -\sqrt{3}$ i en $x = \sqrt{3}$ respectivament, el punt $(0, 0)$ és un punt d'inflexió de tangent horitzontal, és creixent en $(-\infty, -\sqrt{3})$ i $(\sqrt{3}, +\infty)$ i decreixent en $(-\sqrt{3}, -1)$, $(-1, 1)$ i $(1, \sqrt{3})$, és convexa en $(-\infty, -1)$ i $(0, 1)$ i còncava en $(-1, 0)$ i $(1, +\infty)$. És simètrica respecte de l'origen, el recorregut és $R_f = \mathbf{R}$, no té cap màxim ni cap mínim absoluts.

17. Calcula els intervals de creixement i de decreixement, els màxims i els mínims de la funció següent:

$$f(x) = x^2 \cdot e^{\frac{x}{1000}}$$

Després fes un esquema senzill del gràfic.

És creixent en els intervals $(-\infty, -2\,000)$ i $(0, +\infty)$, i decreixent en l'interval $(-2\,000, 0)$. Els punts $x = -2\,000$ i $x = 0$ són respectivament un màxim i un mínim.

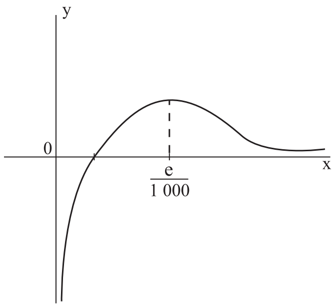


18. Considera la funció següent: $f(x) = \dfrac{\ln 1000x}{x}$ per a $x > 0$. Troba els valors de x tals que

f'(x) = 0. Després fes un esquema senzill de la gràfica de f(x), i explica-ho.

$f'(x) = \frac{1-\ln 10\,000x}{x^2}$, $f'(x) = 0 \rightarrow 1 - \ln 1\,000x = 0 \rightarrow \ln 1\,000x = 1 \rightarrow 1\,000x = e \rightarrow x = e/1\,000 \rightarrow f(e/1\,000) = 1\,000/e$.

En $x = e/1\,000$ la funció passa de creixent a decreixent, per tant hi ha un màxim en el punt $(e/1\,000,\ 1\,000/e)$

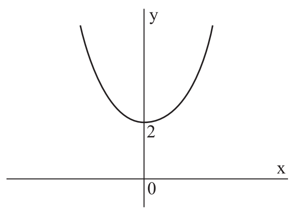


19. Fes un esquema senzill de la gràfica de la funció $f(x) = e^x + e^{-x}$ que posi en evidència els límits quan $x \rightarrow \infty$ i els possibles màxims i mínims. Explica raonadament tot el que fas.

$\lim_{x\to\infty} (e^x + e^{-x}) = +\infty$

$f'(x) = e^x - e^{-x}$, $f'(x) = 0 \rightarrow e^x - e^{-x} = 0 \rightarrow e^{2x} = 1 \rightarrow 2x = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow f(0) = 2$

En el punt (0,2) hi ha un mínim ja que la funció és decreixent en l'interval $(-\infty, 0)$ i creixent en $(0, +\infty)$



20. Troba dos nombres positius que sumant 30 tinguin mínima la suma dels seus quadrats.

La funció que cal optimitzar és $f(x) = x^2 + (30 - x)^2 = 2x^2 - 60x + 900$

$f'(x) = 4x - 60$, $f'(x) = 0 \rightarrow x = 15$ és la solució, ja que minimitza la funció $f(x)$.

21. La suma de totes les arestes d'un prisma recte de base quadrada és 36 cm. Calcula les dimensions del prisma perquè tingui volum màxim.

Considerem x el costat del quadrat de la base i y l'altura del prisma, tenim que:

$8x + 4y = 36 \rightarrow y = 9 - 2x$

$V = x^2y \rightarrow f(x) = x^2(9 - 2x) = 9x^2 - 2x^3 \rightarrow f'(x) = 18x - 6x^2$, $f'(x) = 0 \rightarrow x = 0,\ x = 3$

Per a $x = 0$ dóna volum mínim, i per a $x = 3$ el dóna màxim, per tant les dimensions del prisma són $x = y = 3$ cm.

22. Es vol construir un recipient cilíndric, amb tapa, de volum 100 m³. Quines han de ser les seves dimensions perquè s'utilitzi la mínima quantitat de material?

r: radi de la base, h: alçada del cilindre

$$\pi r^2 h = 100 \text{ m}^3 \rightarrow h = \frac{100}{\pi r^2}$$

$$S = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r\frac{100}{\pi r^2} + 2\pi r^2 = \frac{200}{r} + 2\pi r^2$$

$$f(r) = \frac{200}{r} + 2\pi r^2 \rightarrow f'(r) = -\frac{200}{r^2} + 4\pi r$$

$$f'(r) = 0 \rightarrow -\frac{200}{r^2} + 4\pi r = 0 \rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{50}{\pi}} \text{ m}$$

$$f''(r) = \frac{400}{r^3} + 4\pi,$$

$$f''\left(\sqrt[3]{\frac{50}{\pi}}\right) = \frac{400}{\frac{50}{\pi}} + 4\pi = 12\pi > 0 \text{ és un mínim.}$$

$$h = \frac{100}{\pi r^2} = \frac{100}{\pi\sqrt[3]{\left(\frac{50}{\pi}\right)^2}}\sqrt[3]{\frac{400}{\pi}} \text{ m}$$

23. Entre tots els cilindres rectes de base circular i d'àrea total 6π m², troba les dimensions del que té volum màxim i calcula aquest volum.

r: radi de la base, h: alçada del cilindre

$2\pi rh + 2\pi r^2 = 6\pi$ m² $\rightarrow h = \frac{6\pi - 2\pi r^2}{2\pi r} = \frac{3 - r^2}{r}$

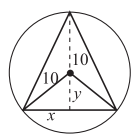
$V = \pi r^2 h = \pi r^2 \frac{3 - r^2}{r} = \pi r(3 - r^2) = 3\pi r - \pi r^3$

$f(r) = 3\pi r - \pi r^3 \rightarrow f'(r) = 3\pi - 3\pi r^2$
$f'(r) = 3\pi - 3\pi r^2 = 0 \rightarrow r^2 = 1 \rightarrow r = 1$ m
$f''(r) = -6\pi r$, $f''(1) = -6\pi < 0 \rightarrow$ és un màxim

$$h = \frac{3 - r^2}{r} = 2 \text{ m}$$

$V = \pi r^2 h = 2\pi$ m³ és el volum màxim

24. Troba les dimensions del triangle isòsceles d'àrea màxima, inscrit en una circumferència de radi 10 dm. Calcula aquesta àrea màxima.



Emprant les variables x, y del dibuix, tenim

$$x^2 + y^2 = 10^2 \rightarrow y = \sqrt{100 - x^2}$$

$$S = \frac{2x(10+y)}{2} = x(10+y) = x(10+\sqrt{100-x^2}) =$$

$$= 10x + x\sqrt{100-x^2} = 10x + \sqrt{100x^2 - x^4}$$

$$f(x) = 10x + \sqrt{100x^2 - x^4}$$

$$f'(x) = 10 + \frac{200x - 4x^3}{2\sqrt{100x^2 - x^4}} = 10 + \frac{2x(100-2x^2)}{2x\sqrt{100-x^2}} =$$

$$= 10 + \frac{100-2x^2}{\sqrt{100-x^2}}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 10 + \frac{100-2x^2}{\sqrt{100-x^2}} = 0 \rightarrow x = 5\sqrt{3} \text{ dm}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(1) = 10 + \dfrac{98}{\sqrt{99}} > 0 \rightarrow f(x) \\ \text{és creixent en } x < 5\sqrt{3} \\ f'(9) = 10 - \dfrac{62}{\sqrt{19}} < 0 \rightarrow f(x) \\ \text{és creixent en } x > 5\sqrt{3} \end{array}\right\} x = 5\sqrt{3} \text{ és un màxim}$$

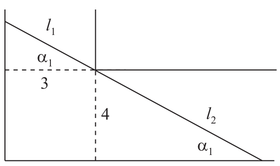
base: $b = 2x = 10\sqrt{3}$ dm

alçada: $h = 10 + y = 10 + \sqrt{100 - x^2} =$

$= 10 + \sqrt{100 - 75} = 10 + \sqrt{25} = 15$ dm

$S = \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}10\sqrt{3} \cdot 15 = 75\sqrt{3}$ dm^2 és l'àrea màxima

25. Una persona transporta un vidre molt prim per un carrer en forma de *L*, de manera que una de les parts del carrer té 4 m d'amplada i l'altra, 3 m. Quina serà la longitud màxima que podrà tenir el vidre per poder passar-hi?



Emprant les variable x, α del dibuix, tenim

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{x}{3} \rightarrow x = 3\operatorname{tg}\alpha$$

$l = l_1 + l_2$ és la longitud del carrer

$$\sin\alpha = \frac{x}{l_1} \rightarrow l_1 = \frac{x}{\sin\alpha} = \frac{3\operatorname{tg}\alpha}{\sin\alpha} = \frac{3}{\cos\alpha}$$

$$\sin\alpha = \frac{4}{l_2} \rightarrow l_2 = \frac{4}{\sin\alpha}$$

$$l = l_1 + l_2 = \frac{3}{\cos\alpha} + \frac{4}{\sin\alpha}$$

$$f(x) = \frac{3}{\cos\alpha} + \frac{4}{\sin\alpha} \rightarrow f'(x) = \frac{3\sin\alpha}{\cos^2\alpha} - \frac{4\cos\alpha}{\sin^2\alpha}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow \frac{3\sin\alpha}{\cos^2\alpha} - \frac{4\cos\alpha}{\sin^2\alpha} = 0 \rightarrow 3\sin^3\alpha =$$

$$= 4\cos^3\alpha$$

$$\frac{\sin^3\alpha}{\cos^3\alpha} = \frac{4}{3} \rightarrow \operatorname{tg}^3\alpha = \frac{4}{3} \rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \sqrt[3]{\frac{4}{3}} \rightarrow \alpha = 47{,}74^\circ$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(45^\circ) = -\sqrt{2} < 0 \rightarrow f(\alpha) \text{ decreix per } \alpha < 47{,}74^\circ \\ f'(60^\circ) = 6\sqrt{3} - \dfrac{8}{3} > 0 \rightarrow f(\alpha) \text{ neix per } \alpha < 47{,}74^\circ \end{array}\right\}$$

$\alpha = 47{,}74^\circ$ és un mínim per l'amplada del carrer, per tant serà un màxim per la longitud del mirall.

$$l = \frac{3}{\cos 47{,}74^\circ} + \frac{4}{\sin 47{,}74^\circ} = \frac{3}{0{,}6724} + \frac{4}{0{,}7401} =$$

= 4,46 + 5,40 = 9,86 m = 986 cm és la longitud màxima que pot tenir el mirall

26. Considera una piràmide recta que té per base un hexàgon regular d'1 cm de costat. L'altura d'aquesta piràmide mesura també 1 cm. Digues a quina distància de la base s'ha de situar un punt *P* sobre l'altura per tal que la suma de les distàncies de *P* als vèrtexs de la piràmide sigui mínima.

$$f(x) = 6\sqrt{x^2+1} + 1 - x$$

$$f'(x) = 6\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} - 1 = \frac{6x}{\sqrt{x^2+1}} - 1$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow \frac{6x}{\sqrt{x^2+1}} - 1 = 0 \rightarrow 6x = \sqrt{x^2+1}$$

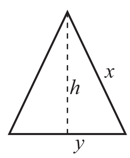
$$36x^2 = x^2 + 1 \rightarrow 35x^2 = 1 \rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{35}} \text{ cm}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(0{,}1) < 0 \rightarrow f(x) \text{ decreix per x} < \dfrac{1}{\sqrt{35}} \\ f'(0{,}2) > 0 \rightarrow f(x) \text{ creix per x} > \dfrac{1}{\sqrt{35}} \end{array}\right\} x = \frac{1}{\sqrt{35}}$$

és un mínim.

El punt P s'ha de situar a $\frac{1}{\sqrt{35}}$ cm del centre de la base.

27. Un triangle isòsceles de perímetre 27 cm gira al voltant de la seva altura, i engendra un con. Calcula la base del triangle perquè el con generat tingui volum màxim, i determina'l.



$$2x + 2y = 27 \text{ cm} \to x = \frac{27 - 2y}{2}$$

$$V = \frac{1}{3}\pi y^2 h = \frac{1}{3}\pi y^2 \sqrt{x^2 - y^2} =$$

$$= \frac{1}{3}\pi y^2 \sqrt{\left(\frac{27 - 2y}{2}\right)^2 - y^2} =$$

$$= \frac{1}{6}\pi y^2 \sqrt{729 - 108y} = \frac{1}{6}\pi\sqrt{729y^4 - 108y^5}$$

$$f(y) = \frac{\pi}{6}\sqrt{729y^4 - 108y^5} \to$$

$$\to f'(y) = \frac{\pi}{6}\frac{486y - 90y^2}{\sqrt{81 - 12y}}$$

$$f'(y) = 0 \to y = \frac{486}{90} = 5{,}4 \text{ cm}$$

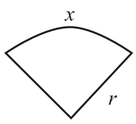
$$\left.\begin{array}{l} f'(5) > 0 \to f(y) \\ \text{creix en } y < 5{,}4 \\ f'(6) < 0 \to f(y) \\ \text{decreix en } y > 5{,}4 \end{array}\right\} y = 5{,}4 \text{ és un màxim}$$

$b = 2y = 2 \cdot 5{,}4 = 10{,}8$ cm és la base del cilindre

$$V = f(5{,}4) = \frac{\pi}{6}\sqrt{729 \cdot 5{,}4^4 - 108 \cdot 5{,}4^5} =$$
$$= 198{,}36 \text{ cm}^3$$

és el volum màxim.

28. Hem de construir un parterre en forma de sector circular amb perímetre de 20 m. Calcula el radi del sector per tal d'obtenir-lo d'àrea màxima.



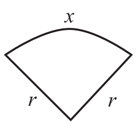
$$2r + x = 20 \text{ m} \to x = 20 - 2r$$

$$S = \frac{xr}{2} = \frac{(20 - 2r)r}{2} = (10 - r)r = 10r - r^2$$

$f(r) = 10r - r^2 \to$ tindrà un màxim

$f'(r) = 10 - 2r$, $f'(r) = 0 \to 10 - 2r = 0 \to$
$r = 5$ cm

29. Quin perímetre mínim pot tenir un sector circular de 25 m² d'àrea?



$$\frac{xr}{2} = 25 \text{ m}^2 \to x = \frac{50}{r}$$

$$P = 2r + x = 2r + \frac{50}{r}$$

$$f(r) = 2r + \frac{50}{r} \to f'(r) = 2 - \frac{50}{r^2}$$

$$f'(r) = 0 \to 2 - \frac{50}{r^2} = 0 \to r^2 = 25 \to r = 5 \text{ m}$$

$$f''(r) = \frac{100}{r^3},\ f''(5) = \frac{4}{5} > 0 \to \text{ és un mínim}$$

$$P = f(5) = 2 \cdot 5 + \frac{50}{5} = 20 \text{ m}$$

és el perimetre mínin

30. Troba els punts de la gràfica de la funció $y^2 = 4x$, tals que la distància al punt (4, 0) sigui mínima. Calcula aquesta distància.

$y^2 = 4x \to y = \sqrt{4x} = 2\sqrt{x} \to P(x, 2\sqrt{x})$, $Q(4, 0)$

$d(P, Q) = |\overrightarrow{QP}| = \sqrt{(x-4)^2 + (2\sqrt{x})^2} =$

$= \sqrt{x^2 - 8x + 16 + 4x} = \sqrt{x^2 - 4x + 16}$

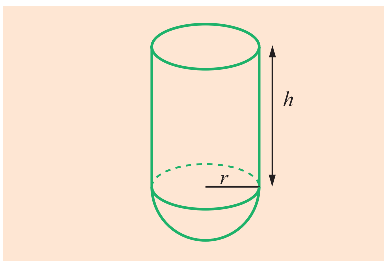
$f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 16} \to f'(x) = \dfrac{x - 2}{\sqrt{x^2 - 4x + 16}}$;

$f'(x) = 0 \to x = 2 \to y = \pm 2\sqrt{2}$

En $x = 2$, $f'(x)$ passa de negativa a positiva, per tant la funció $f(x)$ passa de decreixent a creixent, en el punt $x = 2$ la funció presenta un mínim.

Els punts solució del problema són
$P_1(2, -2\sqrt{2})$ i $P_2(2, 2\sqrt{2})$.

31. Considera un dipòsit constituït per una semiesfera de radi r a la qual s'ha afegit un cilindre circular del mateix radi r i d'altura h, tal com s'indica en la figura 4.35. Calcula r i h de manera que l'àrea total de les parets i de la tapa sigui de 5 m² i tingui volum màxim.



$$2\pi rh + \pi r^2 + 2\pi r^2 = 5 \to 2\pi rh + 3\pi r^2 = 5 \to$$

$$h = \frac{5 - 3\pi r^2}{2\pi r}$$

$$V = \pi r^2 h + \frac{2}{3}\pi r^3 = \pi r^2 \frac{5 - 3\pi r^2}{2\pi r} + \frac{2}{3}\pi r^3 =$$

$$= \frac{5}{2}r - \frac{3}{2}\pi r^3 + \frac{2}{3}\pi r^3 = \frac{5}{2}r - \frac{5}{6}\pi r^3$$

$$f(r)=\frac{5}{2}r-\frac{5}{6}\pi r^3 \rightarrow f'(r)=\frac{5}{2}-\frac{5}{2}\pi r^2$$

$$f'(r)=0 \rightarrow \frac{5}{2}-\frac{5}{2}\pi r^2=0 \rightarrow r^2=\frac{1}{\pi} \rightarrow r=\frac{1}{\sqrt{\pi}} \text{ m}$$

$$f''(r)=-5\pi r,\ f''\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)=-5\sqrt{\pi}<0 \rightarrow$$

és un màxim.

$$h=\frac{5-3\pi r^2}{2\pi r}=\frac{5-3\pi\cdot\frac{1}{\pi}}{2\pi\cdot\frac{1}{\sqrt{\pi}}}=\frac{2}{2\sqrt{\pi}}=\frac{1}{\sqrt{\pi}} \text{ m}$$

32. Troba el punt de la paràbola $y = 2x^2$ que està més a prop del punt (9, 0).

$y = 2x^2 \rightarrow P(x,2x^2)$ és un punt de la paràbola

$Q(9,0)$; $\overrightarrow{PQ}=(9-x,-2x^2)$,

$$\left|\overrightarrow{PQ}\right|=\sqrt{(9-x)^2+(-2x^2)^2}=\sqrt{81-18x+x^2+4x^2}$$

$$f(x)=\sqrt{81-18x+x^2+4x^4}$$

$$f'(x)=\frac{-9+x+8x^3}{\sqrt{81-18x+x^2+4x^4}},\ f'(x)=0 \rightarrow$$

$8x^3 + x - 9 = 0 \rightarrow x = 1$

$$\left.\begin{array}{l} f'(0)=-1<0 \rightarrow \\ \rightarrow f(x) \text{ creix en } x<1 \\ f'(2)=\frac{57}{\sqrt{113}}>0 \rightarrow \\ \rightarrow f(x) \text{ decreix en } x>1 \end{array}\right\} x=1 \text{ és un mínim}$$

Si $x = 1 \rightarrow y = 2x^2 = 2 \rightarrow P(1,2)$

33. Calcula els punts de la gràfica de la funció següent $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ en què la tangent té pendent màxim.

$$g(x)=f'(x)=\frac{-2x}{(1+x^2)^2} \rightarrow g'(x)=f''(x)=\frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}$$

$g'(x) = 0 \rightarrow 6x^2 - 2 = 0 \rightarrow x = \pm 1/\sqrt{3}$. En $x = -1/\sqrt{3}$ hi ha un màxim de $g(x)$, $y = f(-1/\sqrt{3}) = 3/4$, el punt de la gràfica que dóna la solució al problema és $P(-1/\sqrt{3}, 3/4)$.

34. Entre totes les rectes que són tangents a la gràfica de la funció $f(x)$ = tg x, on x està situada entre $-\dfrac{\pi}{2}$ i $\dfrac{\pi}{2}$, escriu l'equació de la que té pendent mínim.

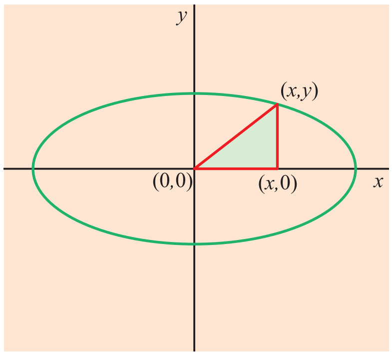
$$g(x)=f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x} \rightarrow g'(x)=\frac{2\sin x}{\cos^3 x}$$

$g'(x) = 0 \rightarrow 2 \sin x = 0 \rightarrow \sin x = 0 \rightarrow x = 0$

$$\left.\begin{array}{l} g'\left(-\frac{\pi}{4}\right)<0 \rightarrow g(x) \text{ decreix} \\ \text{en } -\frac{\pi}{2}<x<0 \\ g'\left(\frac{\pi}{4}\right)>0 \rightarrow g(x) \text{ creix} \\ \text{en } 0<x<\frac{\pi}{2} \end{array}\right\} \begin{array}{l} x=0 \text{ és un} \\ \text{mínim de } g(x) \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} m=g(0)=1 \\ y_0=f(0)=0 \rightarrow O(0,0) \end{array}\right\} y=x$$

35. Considera un triangle rectangle, de vèrtexs (0, 0), (x, 0) i (x, y), amb $x > 0$ i $y > 0$, i amb el vèrtex (x, y) sobre l'el·lipse d'equació $x^2 + 2y^2 = 2$, tal com s'indica en la figura 4.36. Troba el punt (x, y) que fa que el triangle rectangle tingui àrea màxima.



$$x^2+2y^2=2 \rightarrow x=\sqrt{2-2y^2}$$

$$S=\frac{1}{2}xy=\frac{1}{2}y\sqrt{2-2y^2}=\frac{1}{2}\sqrt{2y^2-2y^4}$$

$$f(y)=\frac{1}{2}\sqrt{2y^2-2y^4} \rightarrow f'(y)=\frac{1-2y^2}{\sqrt{2-2y^2}}$$

$$f'(y)=0 \rightarrow 1-2y^2=0 \rightarrow y=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(0)>0 \rightarrow \\ f(x) \text{ creix en } y<\frac{1}{\sqrt{2}} \\ f'(0{,}8)<0 \rightarrow \\ f(x) \text{ decreix en } y<\frac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right\} y=\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ és un màxim}$$

$$x=\sqrt{2-2y^2}=\sqrt{2-2\cdot\frac{1}{2}}=1 \rightarrow P\left(1,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

36. Quina és l'àrea més gran que pot tenir un rectangle de costats paral·lels als eixos de coordenades inscrit a l'el·lipse d'equació $4x^2 + y^2 = 1$?

$$4x^2+y^2=1 \rightarrow y=\sqrt{1-4x^2}$$

$$S = 2x \cdot 2y = 4xy = 4x\sqrt{1-4x^2} = 4\sqrt{x^2-4x^4}$$

$$f(x) = 4\sqrt{x^2-4x^4} \to f'(x) = \frac{4(1-8x^2)}{\sqrt{1-4x^2}}$$

$$f'(x) = 0 \to 1-8x^2 = 0 \to x = \pm\frac{1}{\sqrt{8}} = \pm\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(0) > 0 \to f(x) \\ \text{creix en } x < \dfrac{1}{2\sqrt{2}} \\ f'(0{,}4) < 0 \to f(x) \\ \text{decreix en } x > \dfrac{1}{2\sqrt{2}} \end{array}\right\} x = \frac{1}{2\sqrt{2}} \text{ és un màxim}$$

$$y = \sqrt{1-4x^2} = \sqrt{1-4\cdot\frac{1}{8}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$S = 4xy = 4\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = 1 \text{ és l'àrea màxima}$$

37. La resistència de flexió d'una biga de secció rectangular és directament proporcional a la base i directament proporcional, també, al quadrat de l'altura d'aquesta secció. Calcula les dimensions que ha de tenir la secció rectangular d'una biga fabricada a partir del tronc cilíndric d'un arbre que fa un metre de diàmetre per tal que tingui una resistència de flexió màxima.

x: base, y: altura

$$x^2 + y^2 = 1 \text{ m}^2 \to y^2 = 1 - x^2$$

$$R = kxy^2 = kx(1 - x^2) = kx - kx^3$$

$$f(x) = kx - kx^3 \to f'(x) = k - 3kx^2$$

$$f'(x) = 0 \to k - 3kx^2 = 0 \to x = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

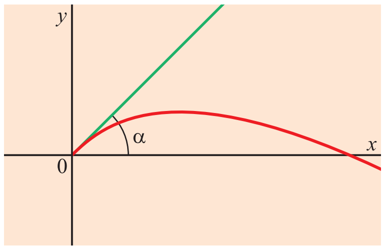
$$f''(x) = -6kx,\ f''\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{6k}{\sqrt{3}} < 0 \to$$

és un màxim

$$y = \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \text{ m}$$

$$\text{base: } x = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ m, alçada: } y = \sqrt{\frac{2}{3}} \text{ m}$$

38. La trajectòria d'un projectil disparat per un canó d'artilleria situat a l'origen de coordenades és la paràbola $f(x) = -k(1 + \text{tg}^2\,\alpha)x^2 +$ $+ (\text{tg}\,\alpha)x$, on k és una constant positiva que depèn de les característiques del canó, i α és l'angle que formen l'eix de les x positives i el canó. L'angle α se suposa comprès entre 0 i 90 graus, tal com indica el dibuix (fig. 4.37). Calcula l'angle α per al qual la paràbola anterior talla l'eix de les x positives al més lluny possible de l'origen.



$f(x) = 0 \to -k(1 + \text{tg}^2\,\alpha)x^2 + x \cdot \text{tg}\,\alpha = 0 \to$
$x[-k(1 + \text{tg}^2\,\alpha)x + \text{tg}\,\alpha] = 0$

$x = 0 \to O(0,0)$, l'altre punt, el que interessa és:

$-k(1 + \text{tg}^2\,\alpha)x + \text{tg}\,\alpha = 0 \to x = \dfrac{\text{tg}\,\alpha}{k(1+\text{tg}^2\,\alpha)}$ és el que cal optimitzar

$$g(\alpha) = \frac{\text{tg}\,\alpha}{k(1+\text{tg}^2\,\alpha)} \to g'(\alpha) = \frac{k(1-\text{tg}^2\,\alpha)}{1+\text{tg}^2\,\alpha}$$

$g'(\alpha) = 0 \to 1 - \text{tg}^2\,\alpha = 0 \to \text{tg}\,\alpha = 1 \to \alpha = 45^\circ$

$$\left.\begin{array}{l} g'(30^\circ) > 0 \to g(\alpha) \text{ creix} \\ \text{en } \alpha < 45^\circ \\ g'(60^\circ) < 0 \to g(\alpha) \text{ decreix} \\ \text{en } \alpha > 45^\circ \end{array}\right\} \begin{array}{l} \alpha = 45^\circ \text{ és un} \\ \text{màxim de } g(\alpha) \end{array}$$

39. Per tal d'il·luminar una taula circular d'un metre de radi, volem penjar del sostre de l'habitació un llum situat en la vertical del centre de la taula i que enfoqui cap avall. Digues a quina alçada hem de situar aquest llum respecte a la taula per tal que els punts de la seva vora tinguin una il·luminació màxima. Si designem com a *L* el llum, que se suposa puntual, i com a *P* un punt qualsevol de la taula, tal com indica el dibuix (fig. 4.38), la il·luminació *I* del punt *P* és donada per

$$I = K\frac{\cos\alpha}{d^2}$$

on *K* és una constant que depèn de les característiques del llum, *d* és la distància entre *P* i *L*, i α és l'angle entre *PL* i la vertical.

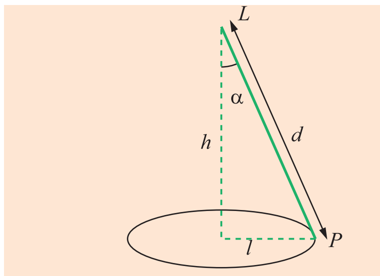


Fig. 4.38

$$I = k\frac{\cos\alpha}{d^2} = k\frac{h/d}{d^2} = k\frac{h}{d^3} = \frac{\sqrt{d^2-1}}{d^3}$$

$$f(d) = k\frac{\sqrt{d^2-1}}{d^3} \to f'(d) = k\frac{3-2d^2}{d^4\sqrt{d^2-1}}$$

$$f'(d) = 0 \to 3-2d^2 = 0 \to d^2 = \frac{3}{2} \to d = \sqrt{\frac{3}{2}} \text{ m}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(1{,}2) > 0 \to \\ f(d) \text{ creix en } d < \sqrt{\frac{3}{2}} \\ f'(1{,}3) < 0 \to \\ f(d) \text{ decreix en } d > \sqrt{\frac{3}{2}} \end{array}\right\} d = \sqrt{\frac{3}{2}} \text{ és un màxim}$$

$$h = \sqrt{d^2-1} = \sqrt{\frac{3}{2}-1} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ m}$$