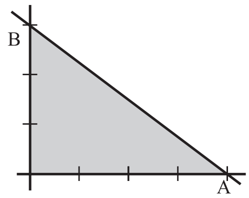
Comencem

- **Considera un triangle rectangle de catets 3 cm i 4 cm respectivament. Calcula'n l'àrea. Situa en una referència cartesiana el triangle rectangle de manera que el vèrtex de l'angle recte coincideixi amb l'origen de coordenades i els catets amb els semieixos positius, respectivament. Aplica el procediment que hem utilitzat abans: troba una primitiva de la funció que té per gràfica la recta que conté la hipotenusa. Comprova que obtens el mateix resultat.**



Àrea del triangle $\frac{3 \cdot 4}{2} = 6 \text{cm}^2$

Equació de la recta *AB*: $y = -\frac{3}{4}x + 3 = f(x)$

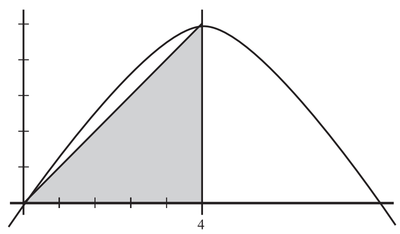
$$F(x) = -\frac{3}{4\frac{x^2}{2}} + 3x$$

$F(4) - F(0) = -6 + 12 = 6$

Obteniu el mateix resultat.

Exercicis

1. **Representa gràficament la funció $f(x) = -x^2 + 8x$ en l'interval [0, 4]. Calcula les sumes inferior i superior per estimar l'àrea sota la corba en aquest interval. Pots prendre $n = 8$.**



f(x) = –x2 + 8x

$$S_i = \frac{1}{2}\left[f(0) + f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1) + f\left(\frac{3}{2}\right) + f(2) + f\left(\frac{5}{2}\right) + f(3) + f\left(\frac{7}{2}\right)\right] = \frac{77}{2}$$

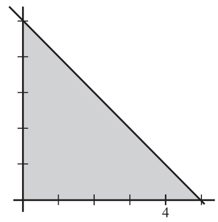
$$S_s = \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1) + f\left(\frac{3}{2}\right) + f(2) + f\left(\frac{5}{2}\right) + f(3) + f\left(\frac{7}{2}\right) + f(4)\right] = \frac{93}{2}$$

Una estimació es la mitjana d'aquests valors:

$$A = \frac{85}{2}u^2$$

2. **Calcula, en l'interval [0, 4], l'àrea sota la gràfica de la funció $f(x) = -x + 5$. Fes-ne una gràfica i justifica per què pots calcular exactament aquesta àrea.**

$f(x) = -x + 5$



$$A = \frac{5 \cdot 5}{2} - \frac{1 \cdot 1}{2} = \frac{24}{2} = 12\ u^2$$

3. **Considera la funció:**

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{x^2}{2} + 1}$$

de l'exemple 1. Fes una partició de l'interval [0, 3] en 12 subintervals. Calcula la suma de les àrees inferior i superior.

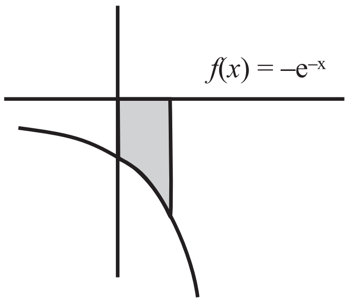
Comprova que l'estimació feta abans és correcta.

$$S_i = \frac{1}{4}\left[f(0) + f\left(\frac{1}{4}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{3}{4}\right) + f(1) + f\left(\frac{5}{4}\right) + f\left(\frac{3}{2}\right) + f\left(\frac{7}{4}\right) + f(2) + f\left(\frac{9}{4}\right) + f\left(\frac{5}{2}\right) + f\left(\frac{11}{4}\right)\right] = 6{,}95$$

$$S_s = \frac{1}{4}\left[f\left(\frac{1}{4}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{3}{4}\right) + f(1) + f\left(\frac{5}{4}\right) + f\left(\frac{3}{2}\right) + f\left(\frac{7}{4}\right) + f(2) + f\left(\frac{9}{4}\right) + f\left(\frac{5}{2}\right) + f\left(\frac{11}{4}\right) + f(3)\right] = 8{,}32$$

La mitjana de les dues sumes és: A=7,635 u^2.

4. **Representa gràficament la funció següent: $f(x) = -e^x$. Expressa la integral definida de $f(x)$ en l'interval [0, 1]. Encara que no podem calcular la integral $\int_0^1 -e^x dx$, coincideix aquesta integral amb l'àrea entre la corba i l'eix *OX* en el mateix interval? Raona la teva resposta.**



$f(x) = -e^x$

$-e^x < 0 \, \forall x \in \mathrm{R}$ i l'àrea no coincideix amb la integral.

5. **Utilitza les propietats lineals *c*) i *d*) de la integral definida per expressar**

$$\int_3^3 \left(3x^3 + \frac{x^2}{5} - 2\right) dx$$

com a suma d'integrals.

$$\int_3^3 \left(3x^2 + \frac{x^2}{5} - 2\right) dx = 3\int_3^3 x^3 dx +$$

$$+\frac{1}{5}\int_3^3 x^2 dx - 2\int_3^3 dx = 0$$

Totes les integrals són zero per tenir $a = b = 3$.

6. **L'expressió $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x}$ no és una integral, encara que ho sembli. Explica el perquè d'aquesta afirmació.**

La funció $f(x) = \dfrac{1}{x}$ no és contínua a [–1,1] i per tant, no existeix la integral en aquest interval.

7. **Raona la certesa o no de cadascuna de les sumes següents:**

a) $\int_2^2 x^2 dx + \int_3^3 x^2 dx + \int_4^4 x^2 dx = \int_2^4 x^2 dx$

La igualtat és falsa. Cada una de les integrals sumants és 0 i la suma diferent de 0.

b) $\int_2^2 x^2 dx + \int_2^3 x^2 dx + \int_3^4 x^2 dx = \int_2^4 x^2 dx$

La igualtat és certa. El primer sumant és 0, però els altres dos corresponen a intervals consecutius com el de la integral suma.

8. **Troba la derivada de cadascuna de les funcions següents:**

$$F(x) = \int_0^x (t^3 - 5t)dt \ , \ G(x) = \int_2^x 3t^2 dt,$$

$$H(x) = \int_2^x \cos^2 t dt \ \text{ i } \ J(x) = \int_x^3 \frac{dt}{t^2 + 1}$$

La derivada de cada funció és la funció a integrar. N'hi ha prou en canviar la *t* per *x*.

$$F'(x) = x^3 - 5x;\ G'(x) = 3x^2;\ H'(x) = \cos^2 x;$$

$$J'(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$$

9. **Calcula les integrals següents:**

a) $\int_0^2 (x+1)^6 dx$

$$\int_0^2 (x+1)^6 dx = \left[\frac{(x+1)^7}{7}\right]_0^2 = \frac{2187}{7}$$

b) $\int_{-2}^1 \frac{dx}{2-x}$

$$\int_{-2}^1 \frac{dx}{2-x} = \Big[-\ln|2-x|\Big]_{-2}^1 = \ln 4$$

c) $\int_{-1}^0 x^2 e^x dx$

La primitiva per parts dues vegades:

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2\int x e^x dx =$$

$$= x^2 e^x - 2\left[x e^x - \int e^x dx\right] = x^2 e^x - 2x e^x +$$

$$+2e^x = e^x(x^2 - 2x + 2)$$

$$\left[e^x(x^2 - 2x + 2)\right]_{-1}^0 = 2 - \frac{5}{e}$$

d) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin 2x dx = \left[\frac{-\cos 2x}{2}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{-\cos \pi}{2} -$$

$$-\left(\frac{-\cos(-\pi)}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

e) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{tg} x dx$

$$\int_0^{\pi/4} tgx dx = \int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{\cos x} dx = \left[-\ln|\cos x|\right]_0^{\pi/4} =$$

$$= -\ln\cos\frac{\pi}{4} - (-\ln\cos 0) = -\ln\frac{\sqrt{2}}{2} = -0{,}346$$

f) $\displaystyle\int_2^4 \frac{x}{x^2-1} dx$

$$\int_2^4 \frac{x}{x^2-1} dx = \left[\frac{1}{2}\ln|x^2-1|\right]_2^4 = \frac{1}{2}\ln 15 - \frac{1}{2}\ln 3 =$$

$$= \frac{1}{2}\ln 5 = 0{,}8$$

g) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx$

$$\int_{-1}^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx = \int_{-1}^1 x(1+x^2)^{-1/2} dx =$$

$$= \left[\frac{1}{2}\frac{(1+x^2)^{1/2}}{1/2}\right]_{-1}^1 = \sqrt{2} - \sqrt{2} = 0$$

h) $\displaystyle\int_2^4 \frac{x^3}{x^2-1} dx$

Cal dividir el numerador pel denorminador:

$$\int_2^4 \frac{x^3}{x^2-1} dx = \int_2^4 \left(x + \frac{x}{x^2-1}\right) dx = \left[\frac{x^2}{2} + \right.$$

$$\left. + \frac{\ln|x^2-1|}{2}\right]_2^4 = 8 + \frac{\ln 15}{2} - \left(2 + \frac{\ln 3}{2}\right) =$$

$$= 6 + \frac{\ln 5}{2} = 6{,}8$$

10. Calcula $\int_0^\pi \cos x dx$ i l'àrea sota la corba de la funció *f*(*x*) = cos *x* d*x* en l'interval [0, π]. Coincideixen els dos resultats? Raona la teva resposta.

$$\int_0^\pi \cos x dx = [\sin x]_0^\pi = \sin\pi - \sin 0 = 0$$

$$A = \int_0^{\pi/2} \cos x dx + \left|\int_{\pi/2}^\pi \cos x dx\right| = [\sin x]_0^{\pi/2}$$

$$+ [\sin x]_{\pi/2}^\pi = 1 + 1 = 2 \text{ u}^2$$

No coincideix els dos resultats ja que en l'interval [o, π] la funció *f*(*x*)=cos *x* s'anul·la $a\ x = \frac{\pi}{2}$.

11. Expressa i calcula l'àrea entre la gràfica de la funció *f*(*x*) = (*x* – 1) (*x*² – *x* – 6) i l'eix *OX*.

La funció talla l'eix 0*X* en els punts *x* = –2, *x* = 1, *x* = 3

$$A = \left|\int_{-2}^1 (x^3 - 2x^2 - 5x + 6) dx\right| + \left|\int_1^3 (x^3 - 2x^2 - \right.$$

$$\left. -5x + 6) dx\right| = \left|\left[\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 6x\right]_{-2}^1\right| +$$

$$+ \left|\left[\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 6x\right]_1^3\right| = \left|\left(\frac{1}{4} - \frac{2}{3} - \frac{5}{2} + 6\right) - \right.$$

$$\left. -\left(4 + \frac{16}{3} - 10 - 12\right)\right| + \left|\left(\frac{81}{4} - 18 - \frac{45}{2} + 18\right) - \right.$$

$$\left. -\left(\frac{16}{3} - 18\right)\right| = \frac{59}{3} \text{u}$$

12. Calcula l'àrea entre la gràfica de la funció següent *f*(*x*) = *x*³ – 3*x* i l'eix *OX*.

La funció talla l'eix 0*X* en els punts:

$$x = -\sqrt{3},\ x = 0 \text{ i } x = \sqrt{3}$$

i presenta simetria imparell i l'àrea es pot expressar:

$$A = 2\left|\int_{-\sqrt{3}}^0 (x^3 - 3x) dx\right| = 2\left|\left[\frac{x^4}{4} - \frac{3x^2}{2}\right]_{-\sqrt{3}}^0\right| =$$

$$= 2\left|-\frac{9}{4} + \frac{9}{2}\right| = \frac{9}{2} \text{ u}^2$$

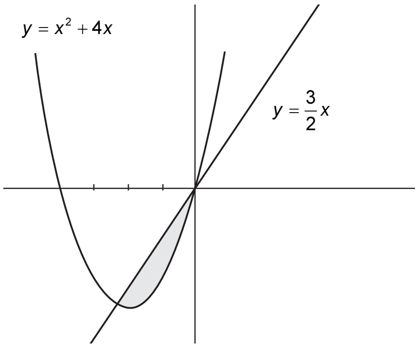
13. Calcula l'àrea de la regió compresa entre les gràfiques de les funcions *f*(*x*) = *x*² i *g*(*x*) = – *x*² + 8.

Punts d'intersecció: $f(x) = g(x) \to x^2 = -x^2 +$ $+ 8 \to x = \pm 2$

$$A = \left|\int_{-2}^2 (2x^2 - 8) dx\right| = \left|\left[\frac{2x^3}{3} - 8x\right]_{-2}^2\right| =$$

$$= \left|\frac{32}{3} - 32\right| = \frac{64}{3} u^2$$

14. Representa gràficament les funcions *f*(*x*) = *x*² + 4*x* i *g*(*x*) = $\frac{3x}{2}$. Calcula l'àrea de la regió compresa entre les dues gràfiques.

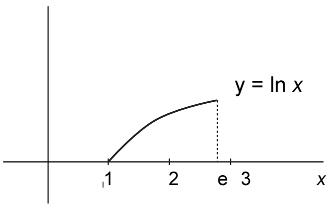


Punts d'intersecció: $f(x) = g(x) \rightarrow x^2 + 4x =$

$$= \frac{3x}{2} \rightarrow x = 0 \text{ i } x = -\frac{5}{2}$$

$$A = \left| \int_{-5/2}^{0} \left(x^2 + 4x - \frac{3x}{2} \right) dx \right| = \left| \left[\frac{x^3}{3} + 2x^2 - \frac{3x^2}{4} \right]_{-5/2}^{0} \right| = \frac{125}{48} u^2$$

15. Representa gràficament la funció *f*(*x*) = ln *x* en l'interval [1, e]. Calcula l'àrea sota aquesta corba en aquest interval.



$$A = \int_1^e \ln x dx = [x \ln x - x]_1^e = e - e - (0 - 1) = 1 \text{ u}^2$$

16. La funció *f*(*x*) = *x*² – *x*⁴ presenta simetria parell en la seva gràfica. Pots comprovar-ho. Calcula l'àrea sota aquesta corba i l'eix *OX*. Pots fer-ho calculant només una integral? Fes-ho així i t'estalviaràs càlculs.

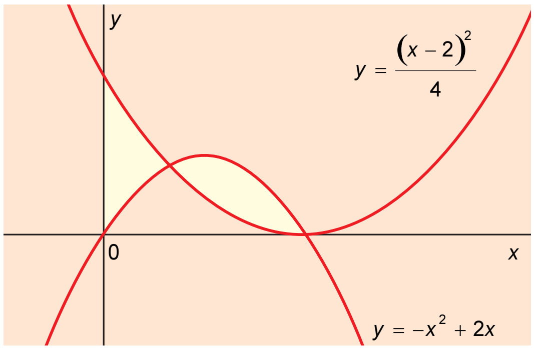
f(*x*) talla l'eix 0*X* en els punts: *x* = –1, *x* = 0 i *x* = 1. Per la simetria parell de la funció l'àrea es pot expressar per:

$$A = 2\left| \int_0^1 (x^2 - x^4) dx \right| = 2\left| \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right]_0^1 \right| = 2\left| \frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right| =$$

$$= \frac{4}{15} \text{ u}^2$$

17. Calcula l'àrea ombrejada de la figura 6.21. Les funcions representades són:

$$f(x) = \frac{(x-2)^2}{2} \text{ i } g(x) = -x^2 + 2x$$



Intersecció de les gràfiques:

$$\frac{(x-2)^2}{4} = -x^2 + 2x \rightarrow x = \frac{2}{5} \text{ i } x = 2$$

Cal calcular també l'àrea en l'interval $\left[0, \frac{2}{5}\right]$:

$$\frac{(x-2)^2}{4} + x^2 - 2x = \frac{5x^2 - 12x + 4}{4}$$

$$A = \left| \int_0^{2/5} \frac{5x^2 - 12x + 4}{5} dx \right| + \left| \int_{2/5}^{2} \frac{5x^2 - 12x + 4}{4} dx \right| =$$

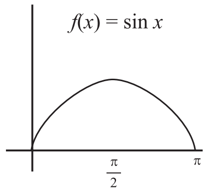
$$dx \left| = \left| \left[\frac{5x^3}{12} - \frac{3x^2}{2} + x \right]_0^{2/5} \right| + \left| \left[\frac{5x^3}{12} - \frac{3x^2}{2} + x \right]_{2/5}^{2} \right| = \right.$$

$$= \frac{26}{25} u^2$$

18. Calcula el volum que genera la paràbola *y* = = *x*² en girar a l'entorn de l'eix *OX* en l'interval [0, 3]. Fes-ne la representació gràfica.

$$V = \pi \int_0^3 x^4 dx = \pi \left[\frac{x^5}{5} \right]_0^3 = \frac{243}{5} \pi u^3$$

19. Dibuixa la gràfica de la funció *f*(*x*) = sin *x* en l'interval [0, π]. Calcula el volum del cos que genera en girar a l'entorn de l'eix de les abscisses.



$$V = \pi \int_0^\pi \sin^2 x dx = \pi \int_0^\pi \frac{1 - \cos 2x}{2} dx =$$

$$= \frac{\pi}{2} \left[x - \frac{\sin 2x}{2} \right]_2^\pi = \frac{\pi^2}{2} u^3$$

20. Considera la recta d'equació $y = 2x$ en l'interval [0, 2]. Si gira a l'entorn de l'eix de les abscisses, quin cos genera? I si consideres que ho fa en l'interval [1, 3], de quin cos es tracta? Calcula el volum de cadascun d'aquests cossos.

La funció $y = 2x$ en l'interval [0,2] genera un con i en l'interval [1,3] un tronc de con.

Volum del con:

$$V = \pi\int_0^2 4x^2dx = \pi\left[\frac{4x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{32\pi}{3}\ u^3$$

Volum del tronc de con:

$$V = \pi\int_1^3 4x^2dx = \pi\left[\frac{4x^3}{3}\right]_1^3 = \frac{104\pi}{3}\ u^3$$

21. Expressa i calcula el volum del cos generat per una circumferència de centre (3, 0) i radi 5.

El cos generat és una esfera i el seu volum només depèn del radi. Podem situar la circumferència centrada a l'origen de coordenades:

$$x^2 + y^2 = 25 \rightarrow y^2 = 25 - x^2$$

$$V = \pi\cdot 2\int_0^5 (25 - x^2)dx = 2\pi\left[25x - \frac{x^3}{3}\right]_0^5 =$$

$$= \frac{500\pi}{3}\ u^3$$

Acabem

1. Calcula la derivada de $F(x) = \int_1^3 (\cos t - 2t)dt$.

$F'(x) = 0$ ja que $F(x)$ és una constant.

2. Calcula $F'(1)$ si $F(x) = \int_1^{3x+1} (\cos t + 2t)dt$.

$F'(1) = 0$. Al substituir x per 1, F és una constant.

3. Calcula les integrals següents:

a) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{-x}{x^2+1}dx$

$$\int_{-1}^1 \frac{-x}{x^2+1}dx = \left[-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)\right]_{-1}^1 = -\frac{1}{2}(\ln 2 - $$
$$-\ln 2) = 0$$

b) $\displaystyle\int_0^2 (2-3x)^5 dx$

$$\int_0^2 (2-3x)^5 dx = \left[-\frac{1}{3}\frac{(2-3x)^6}{6}\right]_0^2 = -224$$

c) $\displaystyle\int_2^4 \frac{3}{1-x}dx$

$$\int_2^4 \frac{3}{1-x}dx = \left[-3\ \ln|1-x|\right]_2^4 = -3(\ln 3 - \ln 1) =$$

$$= -3\ln 3$$

d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1+x^4}dx$

$$\int_0^1 \frac{x}{1+x^4}dx = \left[\frac{1}{2}arc\ tg\ x\right]_0^1 = \frac{1}{2}\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8}$$

4. Calcula: $\int_{-2}^1 x^2e^xdx$. Per trobar la primitiva és necessari que apliquis el mètode d'integració per parts dues vegades.

$$\int x^2e^xdx = x^2e^x - 2\int xe^x = x^2e^x - 2\left[xe^x - \right.$$

$$\left. - \int e^x\right] = e^x(x^2 - 2x + 2)$$

$$\left[e^x(x^2 - 2x + 2)\right]_{-2}^1 = -10e^{-2} = \frac{-10}{e^2}$$

5. Calcula l'àrea compresa entre la gràfica de la funció $f(x) = \dfrac{1}{x}$, l'eix de les abscisses i les ordenades corresponents a $x = 1$ i $x = 2$.

$$A = \int_1^2 \frac{1}{x}dx = \left[\ln|x|\right]_1^2 = \ln 2\ u^2$$

6. Troba una primitiva de la funció

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - x - 2}$$

i calcula la integral d'aquesta funció en l'interval [3, 5].

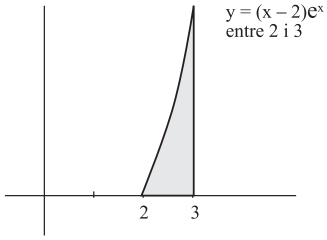
Cal dividir el numerador pel denominador:

$$\int\left(x^2 + 2x - 4 - \frac{8}{x-2}\right)dx = \frac{x^3}{3} + x^2 - 4x -$$

$$-8\ln|x-2|$$

$$\left[\frac{x^3}{3} + x^2 - 4x - 8\ln(x - 21\right]_3^5 = \frac{122}{3} - 8\ln 3\,u^2$$

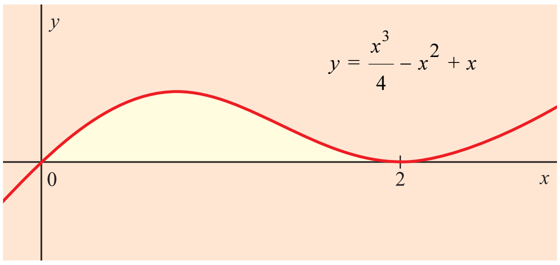
7. **Representa gràficament la funció $f(x) = (x - 2)\,e^x$ en l'interval [2, 3]. Calcula l'àrea sota aquesta corba en aquest interval.**



La primitiva per parts:

$$\int (x-2)e^x dx = (x-2)e^x - \int e^x dx = (x-2)e^x -$$
$$-e^x = e^x(x-3)$$
$$A = \left|\left[e^x(x-3)\right]_2^3\right| = \left|-e^2\right| = e^2\ u^2$$

8. **En una comarca un riu adopta la forma de la funció $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - x^2 + x$ (fig. 6.25) i és tallat per un camí que té la direcció positiva de l'eix *OX*. Prenent com a unitat el *km*, calcula el valor del camp comprès entre el riu i el camí si el preu és de 300 e l'hectàrea.**



$$A = \int_0^2 \left(\frac{1}{4}x^3 - x^2 + x\right)dx = \left[\frac{x^4}{16} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_0^2 =$$
$$= \frac{1}{3}\ \text{Km}^2$$
$$\frac{1}{3}\ \text{Km}^2 \cdot 100 = \frac{100}{3}\ \text{ha} \quad \text{Preu: } \frac{100}{3}\cdot 300 =$$
$$= 10\,000\ €$$

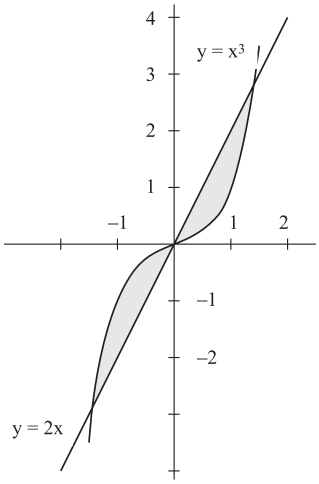
9. **Calcula l'àrea limitada per la gràfica de la funció següent $y = x^2 - 3x$ i l'eix *OX*.**

Les interseccions amb l'eix 0*X* són: $x = 0$ i $x = 3$

$$A = \left|\int_0^3 (x^2 - 3x)dx\right| = \left|\left[\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2}\right]_0^3\right| = \frac{9}{2}\ u^2$$

10. **Troba l'àrea de la zona limitada per les funcions $f(x) = x^3$ i $g(x) = 2x$. Fes-ne una gràfica.**

$$f(x) = g(x) \to x^3 = 2x \to x = 0,\ x = \pm\sqrt{2}$$



L'àrea està formada per dues regions iguals:

$$A = 2\left|\int_0^{\sqrt{2}} (x^3 - 2x)dx\right| = 2\left|\left[\frac{x^4}{4} - x^2\right]_0^{\sqrt{2}}\right| = 2\ u^2$$

11. **Troba l'àrea compresa entre les funcions $y = x^2$ i $y = \sqrt{x}$.**

Punts d'intersecció: $x^2 = \sqrt{x} \to x = 0$ i $x = 1$

$$A = \left|\int_0^1 (x^2 - \sqrt{x})dx\right| = \left|\left[\frac{x^3}{3} - \frac{2\sqrt{x^3}}{3}\right]_0^1\right| =$$
$$= \left|\frac{1}{3} - \frac{2}{3}\right| = \frac{1}{3}\ u^2$$

12. **Calcula l'àrea determinada per la funció $f(x) = x^3 - x$ i l'eix de les abscisses.**

Punts d'intersecció amb l'eix 0*X*:

$$x^3 - x = 0 \to x = 0,\ x = \pm 1$$

La funció presenta simetria imparell.

$$A = 2\left|\int_0^1 (x^3 - x)dx\right| = 2\left|\left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_0^1\right| = 2\left|\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right| =$$
$$= \frac{1}{2}\ u^2$$

13. **Troba els punts de tall amb l'eix de les abscisses de la funció $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ i expressa i calcula l'àrea compresa entre la gràfica de la funció i aquest eix.**

Punts de tall: $f(x) = 0 \to x = -2,\ x = 1$ i $x = 3$

$$A = \left|\int_{-2}^1 (x^3 - 2x^2 - 5x + 6)dx\right| + \left|\int_1^3 (x^3 - 2x^2 -\right.$$

$$-5x+6)dx\right| = \left|\left[\frac{x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}-\frac{5x^2}{2}+6x\right]_{-2}^{1}\right| +$$

$$+\left|\left[\frac{x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}-\frac{5x^2}{2}+6x\right]_{1}^{3}\right| = \frac{253}{12}\,u$$

14. Calcula $\int_0^2 \sqrt{4+x^2}$ utilitzant el canvi de variable: $x = 2 \sin t$.

La primitiva:

$$\int\sqrt{4-x^2}dx \to x = 2\sin t \to$$

$$dx = 2\cos t dt$$

$$\to \int\sqrt{4-4\sin^2 t}\, 2\cos t\, dt$$

$$= \int 4\sqrt{1-\sin^2 t}\cos t dt = 4\int \cos^2 t dt =$$

$$= 4\int\frac{1+\cos 2t}{2}dt = \frac{4}{2}\left(t+\frac{\cos 2t}{2}\right) = 2t+2t$$

$$\int_0^1\sqrt{4-x^2}dx = [2t+2t]_0^{\pi/2} = \pi$$

15. Demostra que l'àrea d'un cercle de radi *r* és donada per $A = \pi r^2$. Per fer-ho considera una circumferència centrada a l'origen de radi *r* de la qual només tindràs en compte la semicircumferència positiva. Calcula l'àrea sota aquesta corba i tindràs l'àrea del semicercle de radi *r*.

Circumferència:

$$x^2+y^2 = r^2 \to y = \sqrt{r^2-x^2}$$

Àrea del semicercle:

$$A = \int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}dx$$

Canvi de variable:

$$x = r\sin t \to dx = r\cos t dt$$

$$A = r^2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sqrt{1-\sin^2 t}\cos t dt = r^2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2 t\, dt =$$

$$= r^2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{1+\cos^2 t}{2} = r^2\left[\frac{t}{2}+\frac{\sin 2t}{4}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} =$$

$$= r^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right) = r^2\frac{\pi}{2}u$$

Àrea del cercle:

$$r^2\cdot\frac{\pi}{2}\cdot 2 = \pi r^2 u^2$$

16. Determina els valors de *a, b* i *c* en el polinomi $P(x) = ax^2 + bx + c$ si verifica $P(1) = 4$, $P'(1) = 8$ i $P(2) + 15P(0) = 0$. Representa la funció i calcula l'àrea compresa entre la corba i l'eix *OX*.

$P(1) = a + b + c = 4$ $\quad$ $P'(x) = 2ax + b$

$P'(1) = 2a + b = 8$

$P(2) + 15P(0) = 4a + 2b + c + 15c = 0$

Al resoldre el sistema s'obté:

$a = 3$, $b = 2$ i $c = -1$

$P(x) = 3x^2+2x-1$ és una paràbola que talla l'eix *0X* en els punts $x_1 = \frac{1}{3}$ i $x_2 = -1$

$$A = \int_{-1}^{1/3}(3x^2+2x-1)dx = \left[x^3+x^2-x\right]_{-1}^{1/3} =$$

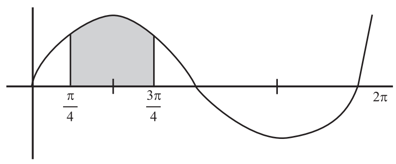
$$= \frac{40}{27}u^2$$

17. Calcula l'àrea entre la corba $f(x) = \dfrac{x}{1+x^4}$ i les rectes $x = 0$, $x = \dfrac{1}{2}$ i l'eix *OX*.

$$A = \int_0^{1/2}\frac{x}{1+x^4}dx = \left[\frac{arctg x^2}{2}\right]_0^{1/2} =$$

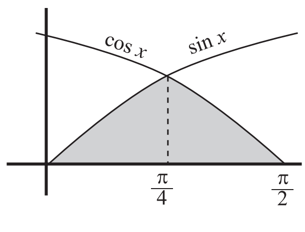
$$= \frac{arctg\frac{1}{4}}{2}u^2 \simeq 0{,}122\, u^2$$

18. Fes la gràfica de la funció $f(x) = \sin x$ en l'interval $[0,\ 2\pi]$ i calcula l'àrea compresa entre aquesta gràfica i les ordenades corresponents a $x = \dfrac{\pi}{4}$ i $x = \dfrac{3\pi}{4}$.



$$A = \int_{\pi/4}^{3\pi/4}\sin x dx = [-\cos x]_{\pi/4}^{3\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}\,u^2$$

19. Representa les funcions $y = \sin x$ i $y = \cos x$ en una mateixa gràfica en l'interval $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Calcula l'àrea compresa entre les dues funcions en aquest interval.



Les dues funcions es tallen en $x = \frac{\pi}{4}$ donant dues regions d'àrees A_1 i A_2:

$$A_1 = \int_0^{\pi/4} \sin x dx$$

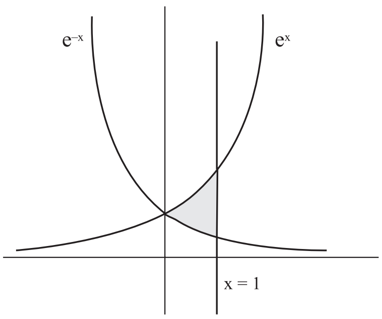
$$A_2 = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos x dx$$

$$A_1 = \left[-\cos x\right]_0^{\pi/4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + 1$$

$$A_2 = \left[\sin x\right]_{\pi/4}^{\pi/2} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$A = -\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 + 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} = 2 - \sqrt{2}\ u^2$$

20. Representa les funcions $y = e^x$ i $y = e^{-x}$ en una mateixa gràfica. Calcula l'àrea limitada per les dues corbes i la recta $x = 1$.



$$A = \int_0^1 \left(e^x - e^{-x}\right) dx = \left[e^x + e^{-x}\right]_0^1 =$$

$$= e + e^{-1} - 2 \cong 1{,}085\ u^2$$

21. Considera la funció $f(x) = \ln x$. Calcula l'àrea sota aquesta corba en l'interval [1, 2]. Pots fer el mateix en l'interval [0, 2]? Raona'n la resposta.

$$A = \int_1^2 \ln x dx = \left[x \ln x - x\right]_1^2 = 2\ln 2 - 2 - (-1) =$$

$$= 2\ln 2 - 1 \cong 0{,}386\ u^2$$

(La primitiva per parts ja s'ha fet anteriorment) No es pot calcular l'àrea en l'interval [0,2] perque la funció $f(x) = \ln x$ no és contínua a $x = 0$.

22. Calcula l'àrea entre la gràfica de la funció següent $f(x) = 2x \ln x$ en l'interval $[a, 1]$. Pot ser a un nombre negatiu? I $a = 0$? Per què?

$A = \left| \int_a^1 2x \ln x dx \right|$ Cal fer la primitiva per parts:

$$\int 2x \ln x dx = x^2 \ln x - \int x^2 \frac{1}{x} = x^2 \ln x - \frac{x^2}{2}$$

$$A = \left| \left[x^2 (\ln x - \frac{1}{2}) \right]_a^1 \right| = \left| -\frac{1}{2} - a^2 \left(\ln a - \frac{1}{2} \right) \right|$$

Cal que $a > 0$ ja que no existeixen el logaritme de $a < 0$ i de $a = 0$.

23. Troba el valor de a si sabem que l'àrea entre la paràbola $y = x^2 + ax$ i la recta $y + x = 0$ és 36 u^2.

Interseccions de les dues gràfiques: $x^2 + ax =$

$$= -x \rightarrow x^2 + ax + x = 0 \text{ i } x_1 = 0 \text{ i } x_2 = -(1+a)$$

$$A = \left| \int_0^{-(1+a)} \left[x^2 + (1+a)x \right] dx \right| = 36\ u^2$$

$$\left[\frac{x^3}{3} + \frac{(1+a)x^2}{2} \right]_0^{-(1+a)} = \frac{-(1+a)^3}{3} + \frac{(1+a)^3}{2} =$$

$$= \frac{(1+a)^3}{6} = 36$$

$$(1+a)^3 = 216 \rightarrow 1 + a = 6 \rightarrow a = 5$$

24. Calcula el volum de l'el·lipsoide generat per l'el·lipse d'equació $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ en girar a l'entorn del seu eix major.

En l'equació de l'el·lipse $a = 4$ i $y^2 = 9 - \frac{9x^2}{16}$

$$V = \pi \int_{-4}^4 \left(9 - \frac{9x^2}{16} \right) dx = \pi \left[9x - \frac{3x^3}{16} \right]_{-4}^4 =$$

$$= \pi(24 + 24) = 48\pi\ u^3$$

25. Representa gràficament la funció $f(x) = \sin x$ en l'interval $[-\pi, \pi]$. Raona quin és el valor de la integral $\int_{-\pi}^{\pi} \sin x dx$ sense calcular-la.

El valor de la integral: $\int_{-\pi}^{\pi} \sin x dx = 0$ ja que $f(x)= \sin x$ és una funció que presenta simetria imparell en aquest interval.

26. Demostra que no és necessari calcular la primitiva de la integral següent:

$$\int_{-1}^{1} (x e^{x^2} - \sin 2x) dx = 0$$

Estudia la simetria que pot presentar la gràfica de la funció que s'ha d'integrar.

La funció $f(x) = x e^{x^2} - \sin 2x$ presenta simetria imparell en l'interval [–1, 1], és a dir,

$$f(x) < 0 \text{ a } [-1, 0) \text{ i } f(x) > 0 \text{ a } (0, 1]$$

i per tant la integral és 0.

27. Calcula el volum generat per la funció $f(x) = x^3 + 1$ en girar a l'entorn de l'eix OX en l'interval [0, 2].

$$V = \pi \int_0^2 \left(x^3+1\right)^2 dx = \pi \int_0^2 \left(x^6+2x^3+1\right)dx =$$

$$= \pi \left[\frac{x^7}{7} + \frac{2x^4}{4} + x\right]_0^2 \pi = \left(\frac{2^7}{7} + 8 + 2\right) = \frac{198}{7}\pi\, u^3$$

28. Considera la corba d'equació $4x^2 + y^2 = 1$. Defineix la funció $y = f(x)$ associada a aquesta funció. Quin és el seu domini? En aquest domini, calcula el volum del cos que genera en girar a l'entorn de l'eix OX.

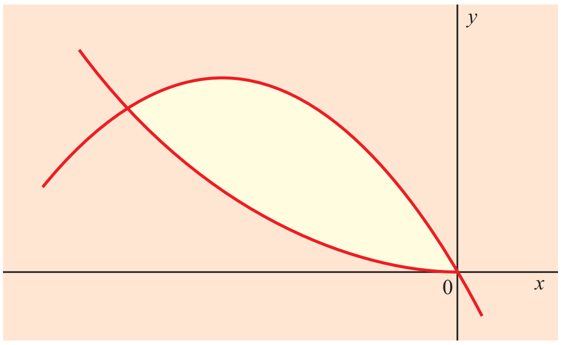
$$f(x) = \sqrt{1-4x^2} \text{ en l'interval } \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$$

$$V = \pi \int_{-1/2}^{1/2} \left(1-4x^2\right)dx = \pi \left[x - \frac{4x^3}{3}\right]_{-1/2}^{1/2} =$$

$$= \pi\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\right)$$

$$V = \pi\ u^3$$

29. Calcula l'àrea del recinte limitat pels gràfics de les dues funcions següents (fig. 6.26): $f(x) = x^3 - 2x$, $g(x) = x^2$, quan considerem només valors de $x \le 0$.



$$f(x) = g(x) \to x^3 - 2x = x^2 \to x_1 = 0,\ x_2 = 2$$

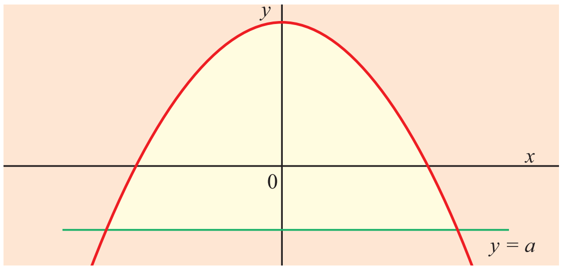
$$= 2 \text{ i } x_3 = -1$$

En la regió negativa és l'interval: $[-1, 0]$

$$A = \left|\int_{-1}^{0} \left(x^3 - 2x - x^2 dx\right)\right| = \left|\left[\frac{x^4}{4} - x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{0}\right| =$$

$$= \frac{5}{12}u^2$$

30. Considera un recinte tancat limitat per la paràbola d'equació $y = -x^2 + 1$ i la recta horitzontal d'equació $y = a$ (fig. 6.27), on a és un número més petit que 1 (que pot ser positiu o negatiu). Determina el valor de a per tal que l'àrea d'aquest recinte valgui $\frac{8\sqrt{2}}{3}$.



Interseccions: $-x^2 + 1 = a \to x = \pm\sqrt{1-a}$

$$A = \int_{-\sqrt{1+a}}^{\sqrt{1+a}} \left(-x^2 + 1 - a\right)dx = \frac{8\sqrt{2}}{3}$$

$$\left[\frac{-x^3}{3} + x - ax\right]_{-\sqrt{1-a}}^{\sqrt{1-a}} = \frac{4}{3}\sqrt{(1-a)^3}$$

$$\frac{4}{3}\sqrt{(1-a)^3} = \frac{8\sqrt{2}}{3} \to \sqrt{(1-a)^3} = 2\sqrt{2} \to 1 - a =$$

$$= 2 \to a = -1$$

31. Fent el canvi de variable $u = e^x$, calcula la integral:

$$\int_{\ln\frac{\pi}{2}}^{\ln\pi} e^x \sin e^x dx$$

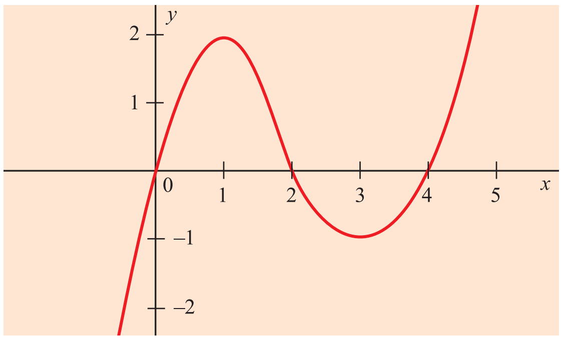
$$u = e^x \to du = e^x dx \to dx = \frac{du}{e^x}$$

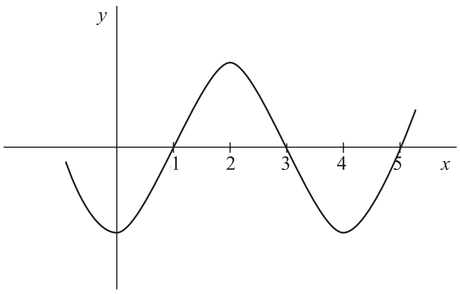
$$x_1 = \ln\pi \to u_1 = \pi \text{ i } x_2 = \ln\frac{\pi}{2} \to u_2 = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_{lu\frac{\pi}{2}}^{lu\pi} e^x \sin e^x dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} u \sin u\, du =$$

$$= \left[-u\cos u + \sin u\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = 1 - 1 = 0$$

32. Tenim una funció $y = f(x)$ de la qual l'única cosa que sabem és que la seva gràfica és aproximadament la que s'indica a la figura 6.28. Fes un esquema senzill de la gràfica de la funció $g(x) = \int_0^x f(t)dt$. Raona molt detalladament la resposta.

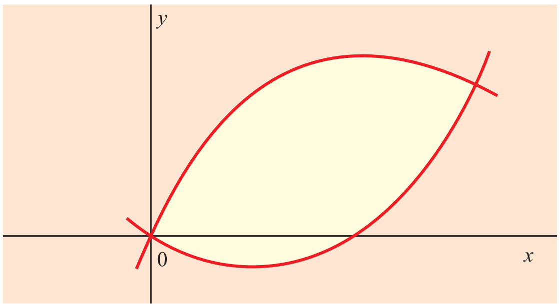




$g'(x) = f(x)$ La gràfica de la figura de l'enunciat és el de g'(x) i la que donem és la de g(x). En els punts x = 0, x = 2 i x = 4 hi ha extrems relatius.

33. Calcula l'àrea del recinte limitat per les dues paràboles d'equacions:

$$\boldsymbol{y = x^2 - 2x \text{ i } y = -x^2 + 4x}$$



Interseccions:

$$x^2 - 2x = -x^2 + 4x \rightarrow 2x^2 - 6x = 0 \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

$$A = \left| \int_0^3 \left(2x^2 - 6x\right) dx \right| = \left| \left[\frac{2x^3}{3} - 3x^2 \right]_0^3 \right| =$$

$$= |18 - 27| = 9\ u^2$$