Comencem

- **Com s'anomenen dos vectors que tenen el mateix mòdul, la mateixa direcció i sentits contraris? I el vector que resulta de fer-ne la suma?**

  Vectors oposats. Vector mil.

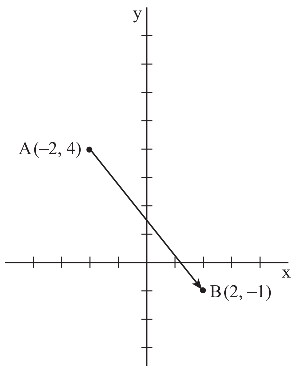
- **Dos vectors que tenen diferent direcció, tenen també diferent sentit? Justifica la teva resposta.**

  Els sentits de dos vectors només es poden comparar si aquests vectors tenen la mateixa direcció.

- **El vector del pla $\overrightarrow{AB}$ és un representant del vector $\vec{v}$ = (4, –5). Si les coordenades del punt *A* són (–2, 4), quines són les coordenades del punt *B*? Resol l'exercici analíticament i gràficament.**

  Anomenem $B(x,y)$. Es compleix:

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB} \to (4,-5) = (x+2, y-4)$$
$$4 = x+2 \to x = 2$$
$$-5 = y-4 \to y = -1$$
$$B(2,-1)$$



Exercicis

1. **Indica en cada cas com identificaries a partir de les seves coordenades:**

   a) **Un punt de l'eix X**

   $(x,0,0)$

   b) **Un punt de l'eix *Y***

   $(0,y,0)$

   c) **Un punt de l'eix Z**

   $(0,0,z)$

   d) **Un punt del pla *XY***

   $(x,y,0)$

   e) **Un punt del pla XZ**

   $(x,0,z)$

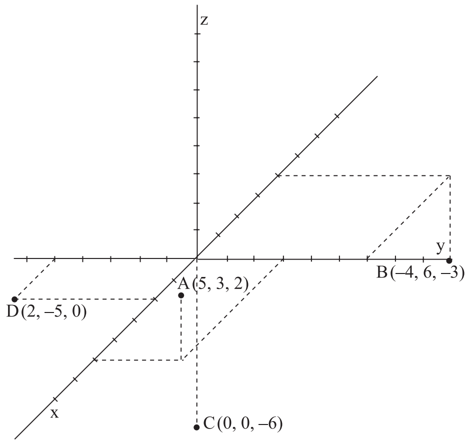
   f) **Un punt del pla *YZ***

   $(0,y,z)$

   x, y i $z \in$ IR

2. **Dibuixa uns eixos de coordenades i representa-hi els punts següents:**

   ***A*(5, 3, 2) *B*(–4, 6, –3) *C*(0, 0, –6) *D*(2, –5, 0)**



3. **Digues les coordenades dels punts següents:**

   a) **El punt *P* que es troba a l'eix *X* a distància 3 de l'origen de coordenades en el sentit negatiu de l'esmentat eix.**

   $P(-3,0,0)$

   b) **El punt *Q* que es troba en el pla *YZ* a distància 5 de l'origen de coordenades i tal que el vector $\overrightarrow{OQ}$ forma un angle de 30° amb el sentit positiu de l'eix *Y*.**

$$Q(0, 5\cos 30^\circ, 5\sin 30^\circ) = \left(0, \frac{5\sqrt{3}}{3}, \frac{5}{2}\right)$$

   c) **El punt *R* situat en el pla *XZ* a distància 4 de l'origen i tal que la recta que passa per *O* i per *R* forma un angle de 60° amb el sentit positiu de l'eix *Z*.**

$$R(4\sin 60^\circ, 0, 4\cos 60^\circ) = \left(2\sqrt{3}, 0, 2\right)$$

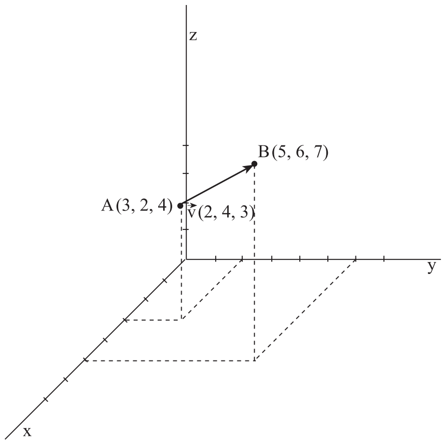
4. **Donat el vector $\vec{v}$ = (2, 4, 3), dibuixa en uns eixos de coordenades el seu representant**

que té per origen el punt *A*(3, 2, 4). Quines són les coordenades de l'extrem d'aquest vector?

$$\text{Si } B(xyz),\ \vec{v} = \overrightarrow{AB} \rightarrow (2,4,3) = (x-3,\ y-2,\ z-4)$$

$$2 = x - 3 \rightarrow x = 5;\ 4 = y - 2 \rightarrow y = 6;\ 3 = z - 4 \rightarrow z = 7$$

L'extrem del vector $\vec{v}$ és el punt $B(5,6,7)$.



5. Determina els components cartesians i el mòdul de cadascun dels vectors següents:

***a*) $\overrightarrow{AB}$ amb *A*(–3, –1, 5) i *B*(2, –4, –1)**

$$\overrightarrow{AB} = (5,-3,-6) \rightarrow \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{70}$$

***b*) $\overrightarrow{CD}$ amb *C*(0, –4, 1) i *D*(–3, 5, –6)**

$$\overrightarrow{CD} = (-3,9,-7) \rightarrow \left|\overrightarrow{CD}\right| = \sqrt{139}$$

***c*) $\overrightarrow{EF}$ amb *E*(1, –1, 3) i *F*(–2, 3, –1)**

$$\overrightarrow{EF} = (-3,4,-4) \rightarrow \left|\overrightarrow{EF}\right| = \sqrt{41}$$

***d*) $\overrightarrow{GH}$ amb *G*(–6, 10, 3) i *H*(–5, 8, –1)**

$$\overrightarrow{GH} = (1,-2,-4) \rightarrow \left|\overrightarrow{GH}\right| = \sqrt{21}$$

6. Representant el vector $\vec{v}$ = (2, –6, –1) amb origen al punt *M*, s'obté el punt *N*(1, 0, –4). Determina les coordenades de *M*.

Anomenem $M(x,y,z)$. Si $\vec{v} = \overrightarrow{MN}$, es verifica:

$$(2, -6, -1) = (1 - x, -y, -4 - z)$$

Per tant:

$$2 = 1 - x \rightarrow x = -1$$
$$-6 = -y \rightarrow y = 6$$
$$-1 = -4 - z \rightarrow z = -3$$
$$M(-1, 6, -3)$$

7. Quins són els components del vector nul? I el seu mòdul?

$$\vec{O} = (0,0,0); \left|\vec{O}\right| = 0$$

8. Els vectors $\overrightarrow{PQ}$ i $\overrightarrow{RS}$ són equipol·lents. Si *P*(0, –1, 3), *Q*(3, 4, 1) i *S*(–4, –2, 1), esbrina les coordenades del punt *R*.

Anomenem $R(x,y,z)$

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS} \rightarrow (3,5,-2) = (-4 - x, -2 - y, 1 - z)$$
$$3 = -4 - x \rightarrow x = -7$$
$$5 = -2 - y \rightarrow y = -7$$
$$-2 = 1 - z \rightarrow z = 3$$
$$R(-7,-7,3)$$

9. Els punts *P*, *Q*, *R* i S de l'exercici anterior determinen un paral·lelogram? Raona'n la resposta.

Sí, perquè si els vectors $\overrightarrow{PQ}$ i $\overrightarrow{RS}$ són equivalents, també ho són els vectors $\overrightarrow{PR}$ i $\overrightarrow{QS}$. Per tant, unint mitjançant segments els punts P, Q, R i S s'obté un quadrilàter que té els costats iguals i paral·lels dos a dos.

10. Dos vectors oposats tenen el mateix mòdul, la mateixa direcció i sentits contraris. Quina relació s'estableix entre els components de dos vectors oposats? Determina els components i el mòdul del vector oposat del vector $\vec{v}$ = (–1, 3, –4).

Els components respectius de dos vectors oposats són nombres reals que també són oposats.

$$-\vec{v} = (1,-3,4); \left|-\vec{v}\right| = \sqrt{26}$$

11. Donats els punts *A*(2, 4, 5) i *B*(4, 6, *t*), calcula el valor de *t* sabent que |$\overrightarrow{AB}$| = 3.

$$\overrightarrow{AB} = (2,2,t-5) \rightarrow \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{4 + 4 + (t-5)^2} = \sqrt{t^2 - 10t + 33}$$

$$\overrightarrow{AB} = 3 \rightarrow \sqrt{t^2 - 10t + 33} = 3 \rightarrow t^2 - 10t + 24 = 0 \rightarrow t_1 = 6 \text{ i } t_2 = 4$$

L'exercici té dues possibles solucions.

12. Considera un punt *P* i el vector $\overrightarrow{QR}$ = (2, –3, 5). Si les coordenades de *Q* són (1, 2, –1) i el vector posició del punt *P* és equipol·lent al vector $\overrightarrow{QR}$, troba les coordenades dels punts *P* i *R*.

Les coordenades del punt *P* són (2, –3, 5).

Anomenem (x,y,z) les coordenades del punt R. Es compleix la igualtat: $(2, -3, 5) = (x - 1, y - 2, z + 1)$

$$2 = x - 1 \rightarrow x = 3$$
$$-3 = y - 2 \rightarrow y = -1$$
$$5 = z + 1 \rightarrow z = 4$$

Les coordenades del punt R són (3, –1, 4).

13. Donats els vectors $\vec{a} = (2, -4, 5)$, $\vec{b} = (-5, 7, -1)$ i $\vec{c} = (-5, 2, 3)$, troba els components dels vectors:

***a*) $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$**

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = (2,1,1)$$

***b*) $-3\vec{a} + 2\vec{b} - 2\vec{c}$**

$$-3\vec{a} + 2\vec{b} - 2\vec{c} = (-6,22,-3)$$

***c*) $\frac{1}{2}(-\vec{a} - 3\vec{b} + 3\vec{c})$**

$$\frac{1}{2}\left(-\vec{a} - 3\vec{b} + 3\vec{c}\right) = \left(-1, \frac{-11}{2}, \frac{7}{2}\right)$$

***d*) $\vec{a} - (\vec{c} - \vec{b})$**

$$\vec{a} - \left(\vec{c} - \vec{b}\right) = \vec{a} - \vec{c} + \vec{b} = (2,1,1)$$

14. Si $\vec{a}$ és un vector de l'espai i k, $h \in \Re$, demostra que es verifica:

***a*) $(k + h) \cdot \vec{a} = k \cdot \vec{a} + h \cdot \vec{a}$**

$$(k+h) \cdot \vec{a} = (k+h) \cdot (a_1, a_2, a_3) =$$
$$= ((k+h)a_1, (k+h)a_2, (k+h)a_3) =$$
$$= (ka_1 + ha_1, ka_2 + ha_2, ka_3 + ha_3) =$$
$$= (ka_1, ka_2, ka_3) + (ha_1, ha_2, ha_3) =$$
$$= k(a_1, a_2, a_3) + h(a_1, a_2, a_3) = k\vec{a} + h\vec{a}$$

***b*) $(k \cdot h) \cdot \vec{a} = k \cdot (h \cdot \vec{a})$**

$$(kh) \cdot \vec{a} = (kh) \cdot (a_1, a_2, a_3) =$$
$$= ((kh)a_1, (kh)a_2, (kh)a_3) =$$
$$= (k(ha_1), k(ha_2), k(ha_3)) =$$
$$= k(ha_1, ha_2, ha_3) = k(h\vec{a})$$

15. Els vectors $\vec{p} = (-2, 3, 1)$ i $\vec{q} = (4, -6, -2)$, tenen la mateixa direcció? I el mateix sentit? Quina relació hi ha entre els seus mòduls?

Tenen la mateixa direcció i sentit contrari, ja que es verifica que $\vec{q} = -2\vec{p}$, o, el que és el mateix, $\vec{p} = -\frac{1}{2}\vec{q}$. Per tant: $|\vec{q}| = 2|\vec{p}| \rightarrow |\vec{p}| = \frac{1}{2}|\vec{q}|$

16. Determina el vector unitari en la direcció i sentit de cadascun dels vectors següents:

***a*) $\vec{a} = (1,-3,2)$**

$$|\vec{a}| = \sqrt{14} \rightarrow \vec{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{-3}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}\right)$$

***b*) $\vec{b} = (3,-4,0)$**

$$|\vec{b}| = 5 \rightarrow \vec{u} = \left(\frac{3}{5}, \frac{-4}{5}, 0\right)$$

***c*) $\vec{c} = (2\sqrt{2},3,-2\sqrt{2})$**

$$|\vec{c}| = 5 \rightarrow \vec{u} = \left(\frac{2\sqrt{2}}{5}, \frac{3}{5}, \frac{-2\sqrt{2}}{5}\right)$$

***d*) $\vec{d} = (-2,2,-1)$**

$$|\vec{d}| = 3 \rightarrow \vec{u} = \left(\frac{-2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{-1}{3}\right)$$

***e*) $\vec{e} = (1,1,-1)$**

$$|\vec{e}| = \sqrt{3} \rightarrow \vec{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$$

***f*) $\vec{f} = (-3,4,0)$**

$$|\vec{f}| = 5 \rightarrow \vec{u} = \left(\frac{-3}{5}, \frac{4}{5}, 0\right)$$

17. Si el vector $\vec{v} = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, v_3\right)$ és unitari, quins valors pot tenir v_3?

$$|\vec{v}| = \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{1}{9} + v_3^2} = 1 \rightarrow \frac{5}{9} + v_3^2 = 1 \rightarrow v_3^2 =$$
$$= \frac{4}{9} \rightarrow v_3 = \pm\frac{2}{3}$$

18. Si $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}$, es verifica $|\vec{s}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$.

***a*) Interpreta geomètricament aquesta desigualtat.**

Si $\vec{a}$ i $\vec{b}$ tenen diferent direcció, els segments que representen els vectors $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{s}$ determinen un triangle. Per tant, qualsevol dels costats d'aquest triangle ha de ser més petit que la suma dels altres dos costats. En particular, $|\vec{s}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$.

***b*) Indica en quin cas particular es verifica la igualtat.**

Si $\vec{a}$ i $\vec{b}$ tenen la mateixa direcció i el mateix sentit, es compleix la igualtat $|\vec{s}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$.

19. Demostra que el conjunt de totes les funcions reals que s'anul·len en el punt x_0, amb les operacions habituals de suma de funcions i producte d'un nombre real per una funció, té estructura d'espai vectorial.

- Si $f, g \in F$, $(f + g)(x_0) = f(x_0) + g(x_0) = 0 + 0 = 0 \rightarrow f + g \in F$.
- Si $f \in F$ i $\lambda \in$ IR, $(\lambda f)(x_0) = (\lambda f)(x_0)\ \lambda \cdot 0 = 0 \rightarrow \lambda f \in$ F.
- L'element neutre $0(x) = 0$ pertany a F, ja que $0(x) = 0$.
- Si $f \in F$, existeix l'element oposat $-f \in F$, ja que $(-f)(x_0) = -f(x_0) = -0 = 0$.

20. Considera els vectors següents:

$$\vec{v} = (2, -1, 3) \text{ i } \vec{w} = (-1, 3, -2)$$

Troba el vector $\vec{x} \in V_3$ que verifica $3\vec{x} - 2\vec{w} = \vec{v}$.

$$3\vec{x} - 2\vec{w} = \vec{v} \rightarrow 3\vec{x} = \vec{v} + 2\vec{w} \rightarrow \vec{x} = \frac{1}{3}(\vec{v} + 2\vec{w}) \rightarrow$$

$$\rightarrow \vec{x} = \left(0, \frac{5}{3}, \frac{-1}{3}\right)$$

21. Considera un vector no nul $\vec{v} \in V_3$. Prova que el conjunt de vectors de V_3 de la forma $k \cdot \vec{v}$, k $\in \Re$ amb les operacions suma i producte per un nombre real té estructura d'espai vectorial. No oblidis que $(V_3, +, \cdot)$ ja és un espai vectorial. Interpreta geomètricament el conjunt de vectors estudiat.

a)

$$\text{Si } k, h \in \text{IR}, k\vec{v} + h\vec{v} = (k + h)\vec{v} \in S$$

b)

$$\text{Si } h \in \text{IR}, h(k\vec{v}) = (kh)\vec{v} \in S$$

El conjunt S està format per tots els vectors que tenen la mateixa direcció.

22. Troba els nombres reals λ_1 i λ_2 que verifiquen la condició $\lambda_1(2, -3) + \lambda_2(-1, 2) = (0, 0)$.

$$\lambda_1(2, -3) + \lambda_2(-1, 2) = (0, 0)$$

$$\left.\begin{array}{l} 2\lambda_1 - \lambda 2 = 0 \\ -3\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \end{array}\right\} \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

23. Donats els vectors $\vec{v}_1 = (-3, 1, 5)$, $\vec{v}_2 = (2, -5, 3)$ i $\vec{v}_3 = (4, 0, -1)$, troba en cada cas el vector que resulta de fer-ne les combinacions lineals següents:

***a*) $-\vec{v}_1 + 3\vec{v}_2 - \vec{v}_3$**

$$-\vec{v}_1 + 3\vec{v}_2 - \vec{v}_3 = (5, -16, 5)$$

***b*) $2\vec{v}_1 - \vec{v}_2 - 3\vec{v}_3$**

$$2\vec{v}_1 - \vec{v}_2 - 3\vec{v}_3 = (-20, 7, 10)$$

***c*) $-2(\vec{v}_1 - 2\vec{v}_2) + 4\vec{v}_3$**

$$-2(\vec{v}_1 - 2\vec{v}_2) + 4\vec{v}_3 = -2\vec{v}_1 + 4\vec{v}_2 + 4\vec{v}_3 =$$

$$= (30, -22, -2)$$

***d*) $3\vec{v}_1 - (\vec{v}_2 - 2\vec{v}_3)$**

$$3\vec{v}_1 - (\vec{v}_2 - 2\vec{v}_3) = 3\vec{v}_1 - \vec{v}_2 + 2\vec{v}_3 = (-3, 8, 10)$$

24. Expressa el vector $\vec{v} = (2, -4, -1)$ en combinació lineal dels vectors $\vec{v}_1 = (1, -2, 3)$, $\vec{v}_2 = (4, 1, 2)$ i $\vec{v}_3 = (1, 0, 0)$.

$$\vec{v} = \lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \lambda_3\vec{v}_3$$

$$(2, -4, -1) = \lambda_1(1, -2, 3) + \lambda_2(4, 1, 2) + \lambda_3(1, 0, 0)$$

$$\begin{cases} 2 = \lambda_1 + 4\lambda_2 + \lambda_3 \\ -4 = -2\lambda_1 + \lambda_2 \\ -1 = 3\lambda_1 + 2\lambda_2 \end{cases}$$

La solució del sistema és $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$ i $\lambda_3 = 9$.

$$\vec{v} = \vec{v}_1 - 2\vec{v}_2 + 9\vec{v}_3$$

25. Donats els vectors $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$, indica raonadament si són certes o falses les afirmacions següents:

***a*) Cada vector $\vec{v}_i$ és combinació lineal de tots ells.**

Cert, perquè, per exemple:

$$\vec{v}_1 = \lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \ldots + \lambda_n\vec{v}_n \rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$$

***b*) El vector $\vec{0}$ també és combinació lineal d'aquests vectors.**

Cert, perquè:

$$\vec{0} = \lambda_1\vec{v}_1 + \ldots + \lambda_n\vec{v}_n \rightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0.$$

26. Donats dos vectors no nuls de V_3, quina condició geomètrica s'ha de verificar perquè un d'ells sigui combinació lineal de l'altre? Quina relació cal que hi hagi entre els respectius components d'aquests dos vectors? Passa el mateix amb dos vectors no nuls de V_2?

Els dos vectors han de tenir la mateixa direcció, és a dir, s'han de situar sobre la mateixa recta o sobre rectes parel·leles.

Els components respectius d'aquests vectors han de ser proporcionals:

$$\vec{v} = k \cdot \vec{w} \to (v_1, v_2, v_3) = k(w_1, w_2, w_3) \to$$
$$\to \frac{v_1}{w_1} = \frac{v_2}{w_2} = \frac{v_3}{w_3} = k$$

Amb dos vectors no nuls de v_2 passa exactament el mateix.

27. Esbrina si són linealment dependents o linealment independents els conjunts de vectors següents:

a) **$\vec{a}_1$ = (2, –1, 3) i $\vec{a}_2 = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -1\right)$**

$\vec{a}_1 = k\vec{a}_2 \to k = -3 \to$ linealment dependents

b) **$\vec{b}_1$ = (–1, 0, 2), $\vec{b}_2$ = (2, 0, –4) i $\vec{b}_3$ = (3, –1, 5)**

$\vec{b}_2 = \alpha\vec{b}_1 + \beta\vec{b}_3 \to \alpha = -2,\ \beta = 0 \to$ linealment dependents

c) **$\vec{c}_1$ = (1, –2, 4), $\vec{c}_2$ = (0, 2, 1) i $\vec{c}_3$ = (–1, –3, 0)**

$$\vec{c}_3 = \lambda_1\vec{c}_1 + \lambda_2\vec{c}_2$$
$$(-1,-3,0) = \lambda_1(1,-2,4) + \lambda_2(0,2,1)$$
$$\begin{cases} -1 = \lambda_1 \\ -3 = -2\lambda_1 + 2\lambda_2 \\ 0 = 4\lambda_1 + \lambda_2 \end{cases}$$

El sistema no té solució $\to$ linealment independents.

d) **$\vec{d}_1$ = (1, –3), $\vec{d}_2$ = (2, 1) i $\vec{d}_3$ = (–4, –9)**

$$\vec{d}_3 = \lambda_1\vec{d}_1 + \lambda_2\vec{d}_2$$
$$(-4,-9) = \lambda_1(-1,3) + \lambda_2(2,1)$$
$$\begin{cases} -4 = \lambda_1 + 2\lambda_2 \\ -9 = -3\lambda_1 + \lambda_2 \end{cases}$$

$\lambda_1 = 2$; $\lambda_2 = -3$; $\to$ linealment dependents.

e) **$\vec{e}_1$ = (1, 0, 0), $\vec{e}_2$ = (0, 1, 0), $\vec{e}_3$ = (0, 0, 1) i $\vec{e}_4$ = (2, –3, 5)**

$$\vec{e}_4 = \lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2 + \lambda_3\vec{e}_3$$

$\lambda_1 = 2$; $\lambda_2 = -3$; $\lambda_3 = 5 \to$ linealment dependents.

28. Existeix algun valor de *k* que faci que els vectors $\vec{v}_1$ = (3, 2, 2) i $\vec{v}_2$ = (6, –4, *k*) siguin linealment dependents? Justifica la resposta.

No, perquè independentment del valor de *k*, $\frac{3}{6} \neq \frac{2}{-4}$

29. Troba *p* perquè els vectors següents: $\vec{u}_1$ = (1, 2, –3), $\vec{u}_2$ = (3, 0, –4) i $\vec{u}_3$ = (2, 1, *p*) siguin linealment dependents. Per a quins valors de *p* aquests mateixos vectors són linealment independents?

$$\vec{u}_3 = \lambda_1\vec{u}_1 + \lambda_2\vec{u}_2$$
$$(2,1,p) = \lambda_1(1,2,-3) + \lambda_2(3,0,-4)$$
$$\begin{cases} 2 = \lambda_1 + 3\lambda_2 \\ 1 = 2\lambda_1 \\ p = -3\lambda_1 - 4\lambda_2 \end{cases}$$
$$\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2}$$
$$p = -3 \cdot \frac{1}{2} - 4 \cdot \frac{1}{2} = -\frac{3}{2} - 2 = -\frac{7}{2}$$

Si $p = -7/2 \to$ vectors linealment dependents.
Si $p \neq -7/2 \to$ vectors linealment independents.

30. Justifica que si *A*, *B* i *C* són tres punts de $\mathfrak{R}^3$ i els vectors $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$ són linealment dependents, aleshores aquests tres punts estan alineats. Esbrina si els punts *A*(3, –4, 1), *B*(2, –1, 4) i *C*(0, 5, 10) es troben sobre la mateixa recta.

Si els vectors $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{BC}$ són linealment dependents, vol dir que tenen la mateixa direcció. Per tant, els punts *A*, *B* i *C* han d'estar alineats.

$$\overrightarrow{AB} = (-1,3,3)$$
$$\overrightarrow{BC} = (-2,6,6)$$

Es compleix que $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \to$ els punts *A*, *B* i *C* se situen en la mateixa recta.

31. Se sap que els punts *P*, *Q* i *R* estan alineats. Si *P*(1, –2, 3) i *Q*(4, 1, 5), determina les coordenades *x* i *y* del punt *R* sabent que la seva coordenada *z* és 9.

$$\overrightarrow{PQ} = (3,3,2)$$
$$\overrightarrow{QR} = (x-4, y-1, 4)$$
$$\overrightarrow{PQ} = k \cdot \overrightarrow{QR} \to (3,3,2) = k(x-4, y-1, 4)$$
$$2 = k \cdot 4 \to k = \frac{1}{2}$$
$$3 = \frac{1}{2}(x-4) \to x = 10$$
$$3 = \frac{1}{2}(y-1) \to y = 7$$

Les coordenades del punt *R* són (10,7,9).

32. Comprova que els vectors $\vec{v}_1 = (1, 2, -1)$, $\vec{v}_2 = (2, 1, 0)$ i $\vec{v}_3 = (-1, 3, 1)$ són linealment independents. Expressa el vector $\vec{w} = (5, 2, -3)$ en combinació lineal dels vectors $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ i $\vec{v}_3$.

$\vec{w} = \lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2$

$$(5,2,-3) = \lambda_1(1,2,-1) + \lambda_2(2,1,0) + \lambda_3(-1,3,1)$$

$$\begin{cases} 5 = \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 \\ 2 = 2\lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3 \\ -3 = -\lambda_1 + \lambda_3 \end{cases}$$

$\lambda_1 = 2;\ \lambda_2 = 1;\ \lambda_3 = -1$

Per tant, $\vec{w} = 2\vec{v}_1 + \vec{v}_2 - \vec{v}_3$

33. Donats els vectors $\vec{v} = (6, 4, -2)$ i $\vec{w} = (-3, -2, 1)$:

a) **Troba el valor de λ que verifica $\vec{v} = \lambda \cdot \vec{w}$.**

$$(6,4,-2) = \lambda(-3,-2,1) \rightarrow \lambda = -2$$

b) **Comprova després que $|\vec{v}| = |\lambda| \cdot |\vec{w}|$.**

$|\vec{v}| = \sqrt{56} = 2\sqrt{14}$

$|\vec{w}| = \sqrt{14}$

$|\lambda| = 2$

Efectivament, es compleix que $|\vec{v}| = |\lambda||\vec{w}|$.

34. Indica raonadament si són certes o falses les afirmacions següents:

a) **En V_2, qualsevol conjunt format per dos vectors linealment independents és base.**

Certa

b) **En V_3, qualsevol conjunt format per dos vectors linealment independents és base.**

Falsa

c) **Si la dimensió d'un espai vectorial *V* (dim *V*) és *n*, *n* + 1 vectors d'aquest espai sempre són linealment dependents.**

Certa

d) **Tant en V_2 com en V_3, una recta que contingui l'origen és un subespai vectorial de dimensió 1.**

Certa

e) **En V_3, un pla és un subespai vectorial de dimensió dos.**

Falsa

35. Esbrina si els vectors $\vec{v}_1 = (1, 0, -3)$, $\vec{v}_2 = (2, -1, 1)$ i $\vec{v}_3 = (0, -2, 3)$ són base de V_3.
Si la resposta és afirmativa, troba els components del vector $\vec{v} = (3, 2, 4)$ en aquesta base.

Els vectors $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ i $\vec{v}_3$ són base de v_3, ja que són linealment independents.

$\vec{v} = \lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \lambda_3\vec{v}_3$

$$(3,2,4) = \lambda_1(1,0,-3) + \lambda_2(2,-1,1) + \lambda_3(0,-2,3)$$

$$\begin{cases} 3 = \lambda_1 + 2\lambda_2 \\ 2 = -\lambda_2 - 2\lambda_3 \\ 4 = -3\lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3 \end{cases}$$

$$\lambda_1 = \frac{-31}{11};\ \lambda_2 = \frac{32}{11};\ \lambda_3 = \frac{-27}{11}$$

Els components de $\vec{v}$ en la base $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ són $\left(-\frac{31}{11}, \frac{32}{11}, -\frac{27}{11}\right)$.

36. Considera un vector $\vec{v} \in V_2$ els components del qual en la base $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ són (3, –2). Es demanen els components d'aquest mateix vector en la base $B' = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$, sabent que:

$$\vec{v}_1 = 4\vec{u}_1 - \vec{u}_2 \text{ i } \vec{v}_2 = \vec{u}_1 - 3\vec{u}_2$$

$$\vec{v} = 3\vec{v}_1 - 2\vec{v}_2 = 3(4\vec{u}_1 - \vec{u}_2) - 2(\vec{u}_1 - 3\vec{u}_2) =$$
$$= 12\vec{u}_1 - 3\vec{u}_2 - 2\vec{u}_1 + 6\vec{u}_2 = 10\vec{u}_1 + 3\vec{u}_2$$

Els components de $\vec{v}$ en la base $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ són (10,3).

37. Els components del vector en la base formada pels vectors $\vec{v}_1 = (1, 2, -1)$, $\vec{v}_2 = (2, 1, 0)$ i $\vec{v}_3 = (-1, 3, 1)$ són (2, –3, 4).

a) **Expressa el vector en combinació lineal dels vectors , i .**

$$\vec{v} = 2\vec{v}_1 - 3\vec{v}_2 + 4\vec{v}_3$$

b) **Troba els components de en la base canònica.**

$$\vec{v} = 2(1,2,-1) - 3(2,1,0) + 4(-1,3,1) =$$
$$= (-8,13,2).$$

38. Per a quins valors de *t* els vectors $\vec{u}_1 = (3, -4, t)$, $\vec{u}_2 = (1, 1, 2)$ i $\vec{u}_3 = (0, 2, -1)$ formen una base de V_3?

Els tres vectors han de ser linealment independents.

$\vec{u}_3 = \lambda_1\vec{u}_1 + \lambda_2\vec{u}_2$

$(0,2,-1) = \lambda_1(3,-4,t) + \lambda_2(1,1,2)$

$$\begin{cases} 0 = 3\lambda_1 + \lambda_2 \\ 2 = -4\lambda_1 - \lambda_2 \\ -1 = t\lambda_1 + 2\lambda_2 \end{cases}$$

$\lambda_1 = -2/7$, $\lambda_2 = 6/7$

$$-1 = t\cdot\left(-\frac{2}{7}\right) + 2\cdot\frac{6}{7} \rightarrow t = \frac{19}{2}$$

Els vectors $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ i $\vec{u}_3$ són base si $t \neq \frac{19}{2}$, $t \in IR$.

39. Els punts *A*(1, –2, 1), *B*(0, 0, –1), *C*(–2, –1, 3) i *D*(1, –1, 4) són coplanaris?

Els punts A, B, C i D no són coplanaris, perquè, per exemple els vectors $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ i $\overrightarrow{AD}$ són linealment independents.

$\overrightarrow{AB} = (-1,2,-2)$ $\quad\overrightarrow{AC} = (-3,1,2)$ $\quad\overrightarrow{AD} = (0,1,3)$

$(-1,2,-2) = \alpha(-3,1,2) + \beta(0,1,3)$

$$\begin{cases} -1 = -3\alpha \\ 2 = \alpha + \beta \\ -2 = 2\alpha + 3\beta \end{cases}$$

El sistema no té solució $\rightarrow$ els tres vectors són linealment independents.

40. En la base *B* = {(1, 1, –2), (3, –1, 4), (5, –2, 0)}, els components d'un vector $\vec{v}$ són (2, –3, 0). Determina els components d'aquest mateix vector en la base canònica i en la base *B'* = {(1, 0, –2), (2, –3 –1), (–2, 1, 0)}.

$\vec{v} = 2(1,1,-2) - 3(3,-1,4) = (-7,5,-16)$

$(-7,5,-16) = \lambda_1(1,0,-2) + \lambda_2(2,-3,-1) +$
$+\lambda_3(-2,1,0)$

$$\begin{cases} -7 = \lambda_1 + 2\lambda_2 - 2\lambda_3 \\ 5 = -3\lambda_2 + \lambda_3 \\ -16 = -2\lambda_1 - \lambda_2 \end{cases}$$

La solució del sistema és $\lambda_1 = \frac{67}{9}$, $\lambda_2 = \frac{10}{9}$, $\lambda_3 = \frac{25}{3}$

Per tant, els components del vector $\vec{v}$ en la base *B* són $\vec{v} = \left(\frac{67}{9}, \frac{10}{9}, \frac{25}{3}\right)$.

41. Ens diuen que els components d'un vector $\vec{v}$ en la base *B* = {(1, 0, 0), (0, 2, 0), (0, 0, –1)} són (2, 1, 2) i que els components d'aquest mateix vector en la base *B'* = {(2, 1, 0), (0, 0, 1), (–1, 1, 0)} són (1, 0, 2). És això possible? Per què?

En el primer, els components del vector $\vec{v}$ en la base canònica són:

$$\vec{v} = 2(1,0,0) + (0,2,0) + 2(0,0,-1) = (2,2,-2)$$

I en el segon cas, són:

$$\vec{v} = (2,1,0) + 2(-1,1,0) = (0,3,0)$$

Això no és possible, ja que si fos així, obtindríem dues ternes de components diferents per al mateix vector $\vec{v}$ en la base canònica, i això no té cap sentit.

42. Justifica cadascuna de les afirmacions següents:

***a*) Si el producte escalar de dos vectors és positiu, l'angle que formen és agut i si és negatiu, l'angle és obtús.**

$$\text{Si } \vec{a}\bullet\vec{b} > 0 \rightarrow \cos\alpha > 0 \rightarrow 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Si } \vec{a}\bullet\vec{b} < 0 \rightarrow \cos\alpha < 0 \rightarrow \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$$

***b*) Si dos vectors tenen la mateixa direcció i sentit, el producte escalar d'aquests dos vectors és igual al producte dels seus mòduls.**

$$\vec{a}\bullet\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos 0^\circ = |\vec{a}||\vec{b}|$$

***c*) Si dos vectors tenen la mateixa direcció i sentit contrari, el producte escalar d'aquests dos vectors és igual al producte dels seus mòduls amb signe negatiu.**

$$\vec{a}\bullet\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos 180^\circ = -|\vec{a}||\vec{b}|$$

43. Donat el punt *V*(3, –5, 7), calcula les projeccions ortogonals del vector $\vec{v} = \overrightarrow{OV}$ sobre els eixos de coordenades.

Sobre l'eix 0X, 3; sobre l'eix 0Y, 5; sobre l'eix 0Z, 7.

44. Considera el vector $\vec{v}$ = (3, –4, 5). Calcula els angles que forma amb els sentits negatius dels tres eixos de coordenades.

- Angle que forma el vector (3,–4,5) amb el vector (–1,0,0)

$$\cos\alpha = \frac{-3}{5\sqrt{2}} \rightarrow \alpha = 115{,}10^\circ \text{ (eix X)}$$

- Angle que forma el vector (3,–4,5) amb el vector (0,–1,0)

$$\cos\beta = \frac{4}{5\sqrt{2}} \to \beta = 55,55^\circ \text{ (eix Y)}$$

- Angle que forma el vector (3,–4,5) amb el vector (0,0,–1)

$$\cos\gamma = \frac{-5}{5\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2} \to \gamma = 135^\circ \text{ (eix Z)}$$

45. $\vec{v}$ i $\vec{w}$ són dos vectors de mòduls respectius 2 i 4. Sabent que formen un angle de 60°, calcula *k* perquè el vector $\vec{v} + \vec{w}k$ sigui perpendicular a $\vec{v}$.

$$\left(\vec{v} + k\vec{w}\right) \bullet \vec{v} = 0 \to \vec{v}\cdot\vec{v} + k\vec{v}\cdot\vec{v} = 0$$

$$\left|\vec{v}\right|^2 + k\left|\vec{w}\right|\cdot\left|\vec{v}\right|\cdot\cos 60^\circ = 0 \to 4 + k\cdot 4\cdot 2\cdot\frac{1}{2} = 0 \to$$

$$\to 4 + 4k = 0 \to k = -1$$

46. Se sap que els vectors $\vec{v}$ = (2, –1) i $\vec{w}$ = (w_1, w_2) $\in V_2$ són ortogonals.

***a*) Quina condició verifiquen els components del vector $\vec{w}$?**

$$\vec{v}\bullet\vec{w} = 0 \to 2w_1 + (-1)w_2 = 0 \to w_2 = 2w_1$$

***b*) Troba el vector sabent que el seu mòdul és 5 i analitza les solucions obtingudes.**

$$\begin{cases} w_2 = 2w_1 \\ w_1^2 + w_2^2 = 25 \end{cases}$$

$$w_1 = \pm\sqrt{5};\ w_2 = \pm 2\sqrt{5}$$

Hi ha dues solucions que són dos vectors oposats:

$$\vec{w}_1 = \left(\sqrt{5}, 2\sqrt{5}\right) \text{ i } \vec{w}_2 = \left(-\sqrt{5}, -2\sqrt{5}\right)$$

47. Resol les mateixes qüestions de l'exercici anterior, amb els vectors $\vec{v}$ = (1, 2, –1) i $\vec{w}$ = (w_1, w_2, w_3) $\in V_3$ i $|\vec{w}|$ = 5. Comenta les diferències que has trobat en relació amb l'exercici anterior i fes-ne una interpretació geomètrica. Et solucionaria el problema si et diguessin que el vector $\vec{w}$ es troba en el pla *YZ*? Per què?

Si $\vec{v}$ i $\vec{w}$ són perpendiculares:

$$\vec{v}\bullet\vec{w} = 0 \to w_1 + 2w_2 - w_3 = 0$$

En aquest cas, no és possible determinar el vector $\vec{w}$ que ens demanen, ja que el sistema:

$$\begin{cases} w_1 + w_2 - w_3 = 0 \\ w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 = 25 \end{cases}$$

té infinites solucions. Hi ha, per tant, infinits vectors $\vec{w}$ de mòdul 5 que són perpendiculars al vector $\vec{v}$.

Si $\vec{w}$ es troba en el pla YZ, w_1 = 0 i, per tant, sí que es pot determinar el vector. De la mateixa manera que en l'exercici anterior, s'obtenen dos vectors oposats:

$$\vec{w}_1 = \left(0, \sqrt{5}, 2\sqrt{5}\right) \text{ i } \vec{w}_2 = \left(0, -\sqrt{5}, -2\sqrt{5}\right)$$

Acabem

1. Determina les coordenades dels punts següents:

***a*) El punt *P* que es troba a l'eix *Z* a distància 5 de l'origen de coordenades en el sentit negatiu d'aquest eix.**

P(0, 0, –5)

***b*) El punt *Q* que es troba en el pla *XY* a distància 6 de l'origen de coordenades i tal que el vector $\overline{QC}$ forma un angle de 210° amb el sentit positiu de l'eix *X*.**

$$Q\left(6\cos 210^\circ, 6\sin 210^\circ, 0\right) \Rightarrow \left(-3\sqrt{3}, -3, 0\right)$$

***c*) El punt *R* situat en el pla *XZ* a distància 4 de l'origen de coordenades i tal que les projeccions ortogonals del vector $\overline{OR}$ sobre els eixos *X* i *Z* siguin iguals. Hi ha més d'un punt que verifiqui aquestes condicions?**

Hi ha 4 punts que verifiquen la condició de l'enunciat

$$R_1\left(4\cos 45^\circ, 0, 4\sin 45^\circ\right) \Rightarrow \left(2\sqrt{2}, 0, 2\sqrt{2}\right)$$

$$R_2\left(4\cos 135^\circ, 0, 4\sin 135^\circ\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left(-2\sqrt{2}, 0, 2\sqrt{2}\right)$$

$$R_3\left(4\cos 225^\circ, 0, 4\sin 225^\circ\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left(-2\sqrt{2}, 0, -2\sqrt{2}\right)$$

$$R_4\left(4\cos 315^\circ, 0, 4\sin 315^\circ\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left(2\sqrt{2}, 0, -2\sqrt{2}\right)$$

2. Els components del vector $\vec{v}$ són (–2, 4, 3). Es demana:

***a*) Les coordenades del seu extrem B si se situa el seu origen en el punt *A*(4, –3 , 6).**

Anomenem *B*(*x*,*y*,*z*)

$\vec{v} = \overrightarrow{AB} \rightarrow (-2,4,3) = (x - 4, y + 3, z - 6)$

$-2 = x - 4 \rightarrow x = 2$

$4 = y + 3 \rightarrow y = 1$

$3 = z - 6 \rightarrow z = 9$

$B(2,1,9)$

b) **Les coordenades del seu origen *C* si té l'extrem en el punt *D*(0, 4, –2).**

Anomenem $C(x,y,z)$

$\vec{v} = \overrightarrow{CD} \rightarrow (-2,4,3) = (-x, 4 - y, -2 - z)$

$-2 = -x \rightarrow x = 2$

$4 = 4 - y \rightarrow y = 0$

$3 = -2 - z \rightarrow z = -5$

$C(2,0,-5)$

c) **Els components del vector unitari que té la mateixa direcció que el vector i sentit contrari.**

$|\vec{v}| = \sqrt{29}$

$$\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{29}} \cdot (-\vec{v}) = \frac{-1}{\sqrt{29}} \cdot \vec{v} = \left(\frac{2}{\sqrt{29}}, \frac{-4}{\sqrt{29}}, \frac{-3}{\sqrt{29}} \right)$$

3. **Els punts *A*(3, 1, –2), *B*(5, 6, 4) i *C*(0, 4, –2) són tres vèrtexs consecutius d'un paral·lelogram. Determina les coordenades del quart vèrtex *D* i indica raonadament de quin tipus de paral·lelogram es tracta. Calcula'n l'àrea.**

S'ha de verificar que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Anomenem $D(x,y,z)$

$(2,5,6) = (-x, 4 - y, -2 - z)$
$2 = x \rightarrow x = -2$
$5 = 4 - y \rightarrow y = -1$
$6 = 2 - z \rightarrow z = -8$

Les coordenades del quart vèrtex són $D(-2, -1, -8)$

Es tracta d'un rombe, ja que el paral·lelogram en estudi té els quatre costats iguals i els seus angles són rectes.

Es verifica: $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{AD}\right| = \left|\overrightarrow{DC}\right| = \left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{65}$

D'altra banda, $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AD} \neq 0 \rightarrow$ els vectors $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AD}$ no són perpendiculars.

Les diagonals d'aquest rombe mesuren:

$$d_{AC} = \left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2}$$

$$d_{BD} = \left|\overrightarrow{BD}\right| = \sqrt{49+49+144} = \sqrt{242} = 11\sqrt{2}$$

i la seva àrea és:

$$A = \frac{3\sqrt{2} \cdot 11\sqrt{2}}{2} = 33u^2$$

4. **Donats els vectors $\vec{v}$ i $k\vec{v}$, $k \in$ R, estableix la relació que hi ha entre els seus mòduls.**

$$\vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$$

$$k\vec{v} = k(v_1, v_2, v_3) = (kv_1, kv_2, kv_3)$$

$$|k\vec{v}| = \sqrt{k^2 (v_1^2, v_2^2, v_3^2)} = |k| \cdot |\vec{v}|$$

5. **Si $\vec{a}$ = (1, –2, 1), $\vec{b}$ = (3, 0, –4) i $\vec{c}$ = (–2, 5, 1), determina:**

a) **$\vec{a}$ – (2$\vec{b}$ – 3$\vec{c}$)**

$$\vec{a} - (2\vec{b} - 3\vec{c}) = \vec{a} - 2\vec{b} + 3\vec{c} = (-11,13,12)$$

b) **($\vec{a} \bullet \vec{b}$) · $\vec{c}$**

$$(\vec{a} \bullet \vec{b}) \cdot \vec{c} = (2,-5,-1)$$

c) **$\vec{a} \bullet (\vec{b} + \vec{c})$**

$$\vec{a} \bullet (\vec{b} + \vec{c}) = -12$$

d) **L'angle format per $\vec{a}$ i $\vec{b}$**

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} \rightarrow \alpha = 94{,}68º$$

6. **Considera dos vectors no nuls $\vec{v}_1$ i $\vec{v}_2 \in V_3$. Prova que el conjunt de vectors de la forma $\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2$ amb λ_1 i $\lambda_2 \in$ R, amb les operacions suma i producte per un nombre real, és un subespai vectorial de V_3. Fes-ne la interpretació geomètrica considerant les dues possibilitats:**

Anomenem *S* aquest conjunt de vectors.

- Si λ'_1 i $\lambda'_2 \in IR, (\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2) + (\lambda'_1\vec{v}_1 + \lambda'_2\vec{v}_2) =$
$= (\lambda_1 + \lambda'_1)\vec{v}_1 + (\lambda_2 + \lambda'_2)\vec{v}_2 \in S$
- Si $\mu \in IR, \mu(\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2) = (\mu\lambda_1)\vec{v}_1 + (\mu\lambda_2)\vec{v}_2 \in S$

a) **Que $\vec{v}_1$ i $\vec{v}_2$ tinguin la mateixa direcció.**

Si $\vec{v}_1$ i $\vec{v}_2$ tenen la mateixa direcció, qualsevol vector de la forma $\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2$ també tindrà aquesta direcció. Els vectors considerats se situen sobre la mateixa recta o sobre rectes paral·leles.

b) **Que tinguin diferent direcció.**

Si $\vec{v}_1$ i $\vec{v}_2$ tenen diferent direcció, aquests dos vectors determinen un pla en què es troben tots els vectors de la forma $\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2$.

7. **Troba t perquè el vector $\vec{v}$ = (3, –4, 1) sigui combinació lineal dels vectors $\vec{v}_1$ = (1, 4, –2) i $\vec{v}_2$ = (5, 2, t). Per a quins valors de t aquests tres vectors formen una base de V_3?**

$\vec{v} = \lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2$

$(3,-4,1) = \lambda_1(1,4,-2) + \lambda_2(5,2,t)$

$$\begin{cases} 3 = \lambda_1 + 5\lambda_2 \\ -4 = 4\lambda_1 + 2\lambda_2 \\ 1 = -2\lambda_1 + t\lambda_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 = \lambda_1 + 5\lambda_2 \\ -2 = 2\lambda_1 + \lambda_2 \\ 1 = -2\lambda_1 + z\lambda_2 \end{cases}$$

La solució del sistema és $\lambda_1 = \frac{-13}{9}$ i $\lambda_2 = \frac{8}{9} \rightarrow$

$t = \frac{-17}{8}$.

Perquè els tres vectors formin una base de v_3 han de ser linealment independents, i això succeeix si $t \neq -17/8$.

8. **Expressa el vector $\vec{v}$ = (3, 4) en combinació lineal dels vectors $\vec{u}_1$ = (1, 0), $\vec{u}_2$ = (0, 1) i $\vec{u}_3$ = (2, 0). Té solució única el sistema que resulta? Com són entre ells els vectors $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ i $\vec{u}_3$? Formen una base de V_2?**

$\vec{v} = \lambda_1\vec{u}_1 + \lambda_2\vec{u}_2 + \lambda_3\vec{u}_3$

$(3,4) = \lambda_1(1,0) + \lambda_2(0,1) + \lambda_3(2,0)$

$$\begin{cases} 3 = \lambda_1 + 2\lambda_3 \\ 4 = \lambda_2 \end{cases}$$

Aquest sistema té infinites solucions. Són de la forma:

$\lambda_1 = 3 - 2\lambda_2$; $\lambda_2 = 4$; $\lambda_3 = \lambda_3$ ($\lambda_3 \in$ IR)

(per a cada valor de λ_3 s'obté una solució particular del sistema).

Els vectors $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ i $\vec{u}_3$ són linealment dependents, per tant, no formen base de v_2.

9. **Esbrina si els vectors $\vec{v}_1$ = (3, 5, –1), $\vec{v}_2$ = (1, 2, –1) i $\vec{v}_3$ = (0, 1, 1) són base de V_3. En cas afirmatiu, troba els components del vector $\vec{v}$ = (1, 3, –5) en aquesta base.**

Els tres vectors són base, ja que són linealment independents.

$\vec{v} = \lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \lambda_3\vec{v}_3$

$(1,3,-5) = \lambda_1(3,5,-1) + \lambda_2(1,2,-1) + \lambda_3(0,1,1)$

$$\begin{cases} 1 = 3\lambda_1 + \lambda_2 \\ 3 = 5\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 \\ -5 = -\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 \end{cases}$$

10. **Els components de $\vec{a}$ en la base $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ són (2, –1, 3). Determina els components del vector en la base $B' = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ sabent que:**

$$\vec{v}_1 = \vec{u}_1 - \vec{u}_3,\ \vec{v}_2 = -\vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3 \text{ i } \vec{v}_3 = 2\vec{u}_1 + \vec{u}_3$$

Cal expressar els vectors de la base B en combinació lineal dels vectors de la base B'.

$$\begin{cases} \vec{v}_1 = \vec{u}_1 - \vec{u}_2 \\ \vec{v}_2 = -\vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3 \\ \vec{v}_3 = 2\vec{u}_1 + \vec{u}_3 \end{cases}$$

$\vec{u}_1 = \frac{1}{3}\vec{v}_1 + \frac{1}{3}\vec{v}_3;\ \vec{u}_3 = -\frac{2}{3}\vec{v}_1 + \frac{1}{3}\vec{v}_3;\ \vec{u}_2 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$

$\vec{a} = 2\vec{u}_1 - \vec{u}_2 + 3\vec{u}_3 = 2\left(\frac{1}{3}\vec{v}_1 + \frac{1}{3}\vec{v}_3\right) + \left(-\vec{v}_1 - \vec{v}_2\right) +$

$+3\left(\frac{2}{3}\vec{v}_1 + \frac{1}{3}\vec{v}_3\right) = -\frac{7}{3}\vec{v}_1 - \vec{v}_2 + \frac{5}{3}\vec{v}_3$

$\vec{a} = \left(-\frac{7}{3}, -1, \frac{5}{3}\right)$

11. **Se sap que els vectors següents:**

$$\vec{a} = (1, 2, -1) \text{ i } \vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$$

són perpendiculars. Si el vector $\vec{b}$ es troba situat en el pla *YZ* i és unitari, troba'n els components. Interpreta les solucions obtingudes.

El vector $\vec{b}$ és del tipus $\vec{b} = (0, b_2, b_3)$

$\vec{a} - \vec{b} \rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \rightarrow 2b_2 - b_3 = 0$

$\left|\vec{b}\right| = 1 \rightarrow b_2^2 + b_3^2 = 1$

El sistema:

$$\begin{cases} 2b_2 - b_3 = 0 \\ b_2^2 + b_3^2 = 1 \end{cases}$$

te dues solucions: $b_2 = \pm\sqrt{5};\ b_3 = \pm 2\sqrt{5}$

Hi ha dues solucions, són els vectors oposats:

$\vec{b}_1 = \left(0, \sqrt{5}, 2\sqrt{5}\right)$ i $\vec{b}_2 = \left(0, -\sqrt{5}, -2\sqrt{5}\right)$

12. **Donats els vectors $\vec{v}_1$ = (3, –4, 5) i $\vec{v}_2$ = (1, 2, –3), calcula la projecció ortogonal de $\vec{v}_1$ sobre $\vec{v}_2$.**

Anomenem *OP* aquesta projecció:

$$OP = \frac{\left|\vec{v}_2 \bullet \vec{v}_1\right|}{\left|\vec{v}_1\right|} = \frac{20}{5\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

13. **Troba una expressió que et permeti calcular les coordenades del punt mitjà del segment d'extrems els punts $A(a_1, a_2, a_3)$ i $B(b_1, b_2, b_3)$.**

Anomenem $M(x,y)$ aquest punt. Es verifica:

$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$

$(x - a_1, y - a_2, z - a_3) = (b_1 - x, b_2 - y, b_3 - z)$

$x - a_1 = b_1 - x \to 2x = a_1 + b_1 \to x = \dfrac{a_1 + b_1}{2}$

$y - a_2 = b_2 - y \to 2y = a_2 + b_2 \to y = \dfrac{a_2 + b_2}{2}$

$z - a_3 = b_3 - z \to 2z = a_3 + b_3 \to z = \dfrac{a_3 + b_3}{2}$

$M = \left(\dfrac{a_1 + b_1}{2}, \dfrac{a_2 + b_2}{2}, \dfrac{a_3 + b_3}{2} \right)$

14. Les coordenades de dos vèrtexs consecutius d'un paral·lelogram són *A*(2, 3, –1) i *B*(0, –4, –3). Si el centre d'aquest paral·lelogram es localitza en el punt *P*(–1, 2, –2), determina les coordenades dels altres dos vèrtexs i la mesura dels seus angles.

Anomenem $C(c_1,c_2,c_3)$ i $D(d_1,d_2,d_3)$ aquests dos vèrtexs que no coneixem, de manera que els vèrtexs *A*, *B*, *C* i *D* són consecutius. Aleshores:

- *P* és el punt mitjà entre *A* i *C* → *C*(–4,1,–3)
- *P* és el punt mitjà entre *B* i *D* → *D*(–2,8,–1)

$(-1,2,-2) = \left(\dfrac{2 + c_1}{2}, \dfrac{2 + c_2}{2}, \dfrac{2 + c_3}{2} \right)$

$c_1 = 4$; $c_2 = 1$; $c_3 = -3$

$(-1,2,-2) = \left(\dfrac{d_1}{2}, \dfrac{-4 + d_2}{2}, \dfrac{-3 + d_3}{2} \right)$

$d_1 = -2$; $d_2 = 8$; $d_3 = -1$

$\cos \hat{A} = \dfrac{\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AD}}{\left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AD}\right|} = \dfrac{8 - 35}{\sqrt{57} \cdot \sqrt{41}} = \dfrac{-27}{\sqrt{57} \cdot \sqrt{41}} \to$

$\to \hat{A} \simeq 124º$

$\overrightarrow{AB} = (-2,-7,-2)$

$\overrightarrow{AD} = (-4,5,0)$

Per tant, $\hat{A} = \hat{C} \simeq 124º$; $\hat{B} = \hat{D} \simeq 56º$

15. Troba les coordenades de divisió del segment d'extrems els punts *P*(3, 6, –3) i *Q*(9, –6, 0) en tres parts iguals.

Anomenem *R* i *S* els punts les coordenades dels quals hem de determinar.

$\overrightarrow{PQ} = 3\overrightarrow{RS} \to (6,-12,3) = 3\,(r_1 - 3, r_2 - 6, r_3 + 3)$

$6 = 3r_1 - 9 \to r_1 = 5$

$-12 = 3r_2 - 18 \to r_2 = 2$

$3 = 3r_3 + 9 \to r_3 = -2$

$\overrightarrow{PQ} = 3\overrightarrow{SQ} \to (6,-12,3) = 3\,(9 - s_1, -6 - s_2 - s_3)$

$6 = 27 - 3s_1 \to s_1 = 7$

$-12 = -18 - 3s_2 \to s_2 = -2$

$3 = -3s_3 \to s_3 = -1$.

Els punts són *R*(5,2,–2) i *S*(7,–2,–1).

16. Demostra que el baricentre d'un triangle de vèrtexs els punts $A(a_1, a_2, a_3)$, $B(b_1, b_2, b_3)$ i $C(c_1, c_2, c_3)$ està situat en el punt *G* de coordenades:

$$G\left(\frac{a_1 + b_1 + c_1}{3}, \frac{a_2 + b_2 + c_2}{3}, \frac{a_3 + b_3 + c_3}{3} \right)$$

Anomenem *G*(*x*,*y*,*z*) el baricentre. Si *M* és el punt mitjà del costat *AB*, es compleix:

$M\left(\dfrac{a_1 + b_1}{2}, \dfrac{a_2 + b_2}{2}, \dfrac{a_3 + b_3}{2} \right)$ i $\overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{MG}$

$(c_1 - x, c_2 - y, c_3 - z) = 2\left(x - \dfrac{a_1 + b_1}{2}, \right.$

$\left. y - \dfrac{a_2 + b_2}{2}, z - \dfrac{a_3 + b_3}{2} \right)$

$c_1 - x = 2x - a_1 - b_1 \to x = \dfrac{a_1 + b_1 + c_1}{3}$

$c_2 - y = 2y - a_2 - b_2 \to y = \dfrac{a_2 + b_2 + c_2}{3}$

$c_3 - z = 2z - a_3 - b_3 \to z = \dfrac{a_3 + b_3 + c_3}{3}$