Comencem

- **Cada 100 g de producte d'un determinat aliment conté 0,06 g de vitamina A, 0,3 g de vitamina B i 0,2 g de calci. Anàlogament, un altre aliment conté 0,1 g de vitamina A, 0,2 g de vitamina B i 0,15 g de calci, també per cada 100 g. Escriu la matriu corresponent.**

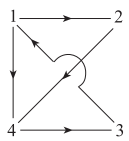
$$\begin{pmatrix} 0{,}06 & 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}15 \end{pmatrix}$$

- **La representació matricial d'una xarxa de transport per carretera, segons el conveni anterior, és donada per la matriu:**

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

Dibuixa un esquema que hi estigui relacionat.

Resposta oberta. Per exemple:



Exercicis

1. Escriu les matrius següents:

a) **$A = (a_{ij})$ i = 1, 2, 3, 4; j = 1, 2, 3 per $a_{ij} = \dfrac{i}{j}$.**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 2 & 1 & 2/3 \\ 3 & 3/2 & 1 \\ 4 & 2 & 4/3 \end{pmatrix}$$

b) **$B = (b_{ij})$ d'ordre (2, 4) sabent que $b_{ij} = (-1)^i + (-1)^j$.**

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

c) **$C = (c_{ij})$ de tres files i tres columnes per a $c_{ij} = j^i$.**

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \\ 1 & 8 & 27 \end{pmatrix}$$

2. Indica els vectors que determinen cadascuna de les matrius de l'exercici anterior.

a) $\vec{u} = (1, 2, 3, 4)$,

$$\vec{v} = \left(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2\right) \text{ i } \vec{w} = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, \frac{4}{3}\right)$$

b) $\vec{a} = \vec{c} = (-2, 0)$ i $\vec{b} = \vec{d} = (0, 2)$

c) $\vec{u} = (1, 1, 1)$, $\vec{v} = (2, 4, 8)$ i $\vec{w} = (3, 9, 27)$

3. Escriu una matriu que representi 2 vectors de V_2, i una altra que representi 4 vectors de V_3. Indica l'ordre de cadascuna.

Resposta oberta. Per exemple:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriu A és d'ordre (2, 2) i la matriu B d'ordre (3, 4).

4. Escriu una matriu *A* d'ordre (3, 4).

Resposta oberta. Per exemple:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) **Troba'n la matriu oposada i la matriu transposada. Comprova que la matriu oposada de la transposada és igual a la matriu transposada de l'oposada.**

$$-A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$^{t}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$-({}^tA) = {}^t(-A) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

***b*) Comprova que $^t(^tA) = A$.**

$${}^t({}^tA) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = A$$

5. Donades les matrius següents:

$$A = \begin{pmatrix} 2x & 3z \\ x-y & 2y \end{pmatrix} \text{ i } B = \begin{pmatrix} 4y & -t \\ z & 3x+4 \end{pmatrix}$$

Troba els valors de *x, y*, *z* i *t* sabent que *A* = = *B*.

(1) $2x = 4y$
(2) $3z = -t$
(3) $x - y = z$
(4) $2y = 3x + 4$

De (1) i (4) $\rightarrow$ $x = -2$, $y = -1$, substituint a (3) $\rightarrow$ $z = -1$, i substituint a (2) $\rightarrow$ $t = 3$.

6. Escriu una matriu quadrada d'ordre 3 que sigui triangular superior. Indica els vectors de V_3 que defineixen la matriu. Calcula'n la traça.

Resposta oberta. Per exemple:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\vec{u} = (2, 0, 0)$, $\vec{v} = (3, -1, 0)$ i $\vec{w} = (-1, 2, 1)$

$\text{tra}(A) = 2 - 1 + 1 = 2$

7. Escriu una matriu quadrada d'ordre 4 que sigui alhora simètrica i antisimètrica. Hi ha moltes matrius que tinguin aquesta característica?

La matriu quadrada nul·la d'ordre quatre. Només aquesta.

8. Qualsevol matriu diagonal és simètrica? I antisimètrica? Justifica'n les respostes.

Sí, ja que si A és una matriu diagonal $\rightarrow {}^tA = A$ $\rightarrow A$ és simètrica.

No, perquè si és una matriu diagonal, els elements de la diagonal principal no són zero, i per tant no pot ser antisimètrica.

9. Per què han de ser zero els elements de la diagonal principal d'una matriu antisimètrica?

Perquè sigui una matriu antisimètrica, els elements de la diagonal principal han de verificar que $a_{ii} = -a_{ii}$, d'on s'obté que $a_{ii} = 0$.

10. Tenim la matriu:

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

***a*) Com és aquesta matriu?**

És una matriu simètrica.

***b*) Troba la matriu transposada de la matriu oposada.**

$$\begin{pmatrix} -6 & -2 & -1 & -4 \\ -2 & -4 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ -4 & 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

***c*) Com són entre elles la matriu que has trobat en l'apartat anterior i la matriu inicial?**

Són oposades.

***d*) Es pot enunciar, en aquest sentit, alguna propietat general?**

En una matriu simètrica, la transposada de l'oposada coincideix amb la matriu oposada.

11. Donades les matrius:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

***a*) Comprova les propietats de la suma i del producte de matrius.**

Suma:

- associativa:

$$A + (B + C) = (A + B) + C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 6 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

- existència d'element neutre:

$$A + O = O + A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = A, \text{ sent O}$$

la matriu quadrada nul·la d'ordre tres.

- existència d'element simètric:

$A + (-A) = (-A) + A = O$,

$$\text{sent } -A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

- commutativa:

$$A + B = B + A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Producte:

- associativa:

$$(AB)C = A(BC) = \begin{pmatrix} 18 & 0 & 37 \\ 10 & -1 & 11 \\ 10 & 2 & 10 \end{pmatrix}$$

- distributiva:

$$A(B + C) = AB + AC = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 16 \\ 2 & -1 & 6 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$(A + B)C = AC + BC = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 6 \\ 7 & 0 & 17 \\ 11 & -5 & 16 \end{pmatrix}$$

***b*) Prenent el valors *k* = 2 i *h* = –3, comprova les propietats del producte d'un nombre per una matriu.**

$$2(A + B) = 2A + 2B = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 0 \\ -2 & 2 & 8 \\ 4 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

$$5A = 2A + 3A = \begin{pmatrix} -5 & 10 & 5 \\ 5 & 0 & 5 \\ 10 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$2(3A) = \begin{pmatrix} -6 & 12 & 6 \\ 6 & 0 & 6 \\ 12 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$1A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = A$$

***c*) Amb el mateix valor de *k* de l'apartat anterior, comprova les propietats de la transposició de matrius.**

$${}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$${}^t(2A) = 2({}^tA) = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 4 \\ 4 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$${}^t(AB) = ({}^tB)({}^tA) = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \\ 9 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$${}^t(A^2)+ = ({}^tA)^2 = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

12. Amb les matrius de l'exercici anterior, calcula:

a*) 2*A* – 3*B* + 4*C

$$\begin{pmatrix} -5 & 11 & 9 \\ 20 & 1 & 1 \\ 8 & -8 & 10 \end{pmatrix}$$

b*) *AB* + *C

$$\begin{pmatrix} -5 & 0 & 10 \\ 4 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

c*) 3*A* – *CB

$$\begin{pmatrix} -9 & 7 & 10 \\ 2 & -8 & -1 \\ 3 & -5 & -4 \end{pmatrix}$$

***d*) *C*(*A* – 2*B*)**

$$\begin{pmatrix} -13 & 3 & 11 \\ 0 & -8 & -4 \\ 0 & -10 & -8 \end{pmatrix}$$

***e*) A^3**

$$\begin{pmatrix} -4 & 11 & 4 \\ 4 & 3 & 4 \\ 11 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

***f*) $(BC)^2$**

$$\begin{pmatrix} -10 & -6 & -26 \\ 132 & 10 & 186 \\ 112 & -8 & 136 \end{pmatrix}$$

13. Es diu que dues matrius *A* i *B* commuten quan *AB* = *BA*. Comprova, amb matrius quadrades d'ordre 3, que:

Respostes obertes. Per exemple:

***a*) Una matriu diagonal commuta amb qualsevol matriu del seu mateix ordre.**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$AB = BA = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

***b*) Si *I* és la matriu unitat, *IA* = *AI* = *A*.**

$$IA = AI = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

14. Siguin *A* i *B* dues matrius quadrades d'ordre 2, tals que:

$A = (a_{ij})$; $a_{11} = a_{22} = 1$, $a_{12} = 2$, $a_{21} = 0$

$B = (b_{ij})$; $b_{11} = b_{22} = a_{12}$, $b_{12} = b_{11} + 1$, $b_{21} = 0$

***a*) Escriu les dues matrius.**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

***b*) Les matrius *A* i *B* commuten?**

Sí, ja que $AB = BA = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

***c*) Comprova que $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$. Per què creus que passa això? Justifica'n la resposta.**

$$(A + B)(A - B) = A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} -3 & -8 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Si commuten, vol dir que AB = BA, d'on tenim que:

$(A + B)(A - B) = AA + BA - AB - BB = A^2 + BA - BA - B^2 = A^2 - B^2$

15. Demostra que si *A* i *B* no commuten, aleshores $(A + B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$.

Si no commuten, tenim que $AB \neq BA$, i per tant $BA + AB \neq 2AB$, d'on:

$(A + B)^2 = (A + B)(A + B) = AA + BA + AB + BB = A^2 + BA + AB + B^2$

16. Siguin *A*, *B* i *C* matrius quadrades d'ordre 3 i no nul·les.

***a*) És possible que *AB* doni la matriu nul·la d'ordre 3?**

Sí, ja que el producte de dues matrius no nul·les pot donar la matriu nul·la.

***b*) Si es verifica que *AB* = *AC*, podem assegurar que *B* = *C*?**

No, $AB = AC \rightarrow AB - AC = 0 \rightarrow A(B - C) = 0$ i pot ser que $A \neq 0$ i $B - C \neq 0$ d'on $B \neq C$.

17. Donades les matrius:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -2 \\ -1 & 7 & 4 \end{pmatrix} \text{ i } B = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ -9 & 0 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$$

calcula els productes *AB* i $({}^tB)({}^tA)$.

$$AB = \begin{pmatrix} -33 & 11 \\ -47 & 3 \end{pmatrix} \qquad ({}^tB)({}^tA) = \begin{pmatrix} -33 & -47 \\ 11 & 3 \end{pmatrix}$$

18. Calcula els determinants d'ordre 2 següents:

a) $\begin{vmatrix} \sqrt{2}-1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2}+1 \end{vmatrix} = -1$

b) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = 1$

c) $\begin{vmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{5} \\ -\frac{3}{7} & \frac{4}{5} \end{vmatrix} = 13/21$

d) $\begin{vmatrix} e^{-x} & 1 \\ 1 & e^{x} \end{vmatrix} = 0$

19. Considera les matrius: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$,

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 7 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \text{ i } C = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Calcula |*A*|, |*B*|, |*C*| i |*A* + *B* + *C*|.

$|A| = 19$, $|B| = 26$, $|C| = 2$, $|A + B + C| = 17$.

20. Comprova les igualtats següents:

a) $\begin{vmatrix} 2t-10 & t-5 \\ 1+t & t \end{vmatrix} = (t-1)(t-5)$

$$\begin{vmatrix} 2t-10 & t-5 \\ 1+t & t \end{vmatrix} = t^2 - 6t + 5 = (t-1)(t-5)$$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} = (y-x)(z-x)(z-y)$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} = yz^2 + x^2z + xy^2 - x^2y - xz^2 - y^2z$$

$(y-x)(z-x)(z-y) = yz^2 - xz^2 + x^2z - y^2z +$
$+ xy^2 - x^2y$.

21. Resol les equacions:

a) $\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1+x \end{vmatrix} = 0$

$$x^3 + 3x^2 = 0 \rightarrow x = 0,\ x = -3$$

b) $\begin{vmatrix} x-1 & x+4 \\ 1+x & x \end{vmatrix} = -10$

$$-6x - 4 = -10 \rightarrow x = 1$$

22. Considera els vectors de V_3, $\vec{u} = (-1, 2, 1)$, $\vec{v} = (2, 3, -2)$ i $\vec{w} = (0, -1, 3)$; i calcula:

$D(-\vec{u} + \vec{v} + \vec{w},\ \vec{u} - \vec{v} + \vec{w},\ \vec{u} + \vec{v} - \vec{w})$

$$\left.\begin{aligned} -\vec{u} + \vec{v} + \vec{u} &= (3,0,0) \\ \vec{u} - \vec{v} + \vec{w} &= (-3,-2,6) \\ \vec{u} + \vec{v} - \vec{w} &= (1,6,-4) \end{aligned}\right\};\ \begin{vmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 6 \\ 0 & 6 & -4 \end{vmatrix} =$$

$$= 3\begin{vmatrix} -2 & 6 \\ 6 & -4 \end{vmatrix} = 3(8 - 36) = -84$$

23. Considerant la matriu *A* de l'exemple anterior, calcula |*A*| i |*A|. Quina relació s'estableix entre els dos determinants?**

$|A| = -14,\ |A^*| = 196,\ |A^*| = |A|^2$

24. Sigui $A = (a_{ij})$ una matriu quadrada d'ordre 3, definida per $a_{ij} = i - j + 1$. Troba la matriu A^* i comprova que $^t(A^*) = (^tA)^*$.

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$^t(A^*) = (^tA)^* = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

25. Sigui *B* la matriu definida pels vectors $\vec{u} = (1, 2)$ i $\vec{v} = (-1, 1)$ de V_2.

a) **Troba *B**.**

$$B^* = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

b) **Les matrius *B* i *B** commuten? Justifica'n la resposta.**

No, perquè $BB^* = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$ i

$$B^*B = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

c) **Calcula |*B*|, |*B**|, |*BB**| i |*B***B*|.**

$|B| = |B^*| = 3,\ |BB^*| = |B^*B| = 9.$

26. Calcula el determinant $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

a) **Per la regla de Sarrus.**

$10 + 2 + 12 - 15 = 9$

b) **Desenvolupant-lo pels elements de la segona fila.**

$-(-2) + 3 \cdot 4 + 5(-1) = 2 + 12 - 5 = 9$

c) **Desenvolupant-lo pels elements de la tercera columna.**

c) $-2(-7) + 5(-1) = 14 - 5 = 9.$

27. Desenvolupa, per la columna o la fila més adequada, els determinants:

a) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -3 & 9 & 5 \\ 6 & 5 & 0 \end{vmatrix}$

3a columna $\rightarrow -135$

b) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -6 \\ 3 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$

3a fila $\rightarrow -20$

c) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

2a fila $\rightarrow -16$

28. Comprova amb determinants d'ordre 3 i utilitzant la regla de Sarrus les propietats *a*), *b*), *c*), *g*) i *j*).

Resposta oberta. Per exemple:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 3$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 3; \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -3$

c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 6; \quad 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 = 6$

f) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$

g) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 3$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 + 1 = 3$$

29. Esbrina, emprant determinants, la dependència o independència lineal dels vectors següents:

***a*) $\vec{u}$ = (3, 1, 2), $\vec{v}$ = (–1, –1, 2), $\vec{w}$ = (0, 2, –3)**

$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -10 \neq 0 \rightarrow$ linealment independents

***b*) $\vec{u}$ = (–1, 1, 4), $\vec{v}$ = (2, 1, 1), $\vec{w}$ = (–2, 0, 2)**

$\begin{vmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow$ linealment dependents

***c*) $\vec{u}$ = (1, 0, –1), $\vec{v}$ = (–2, 2, 1), $\vec{w}$ = (1, 2, –2)**

$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow$ linealment dependents

***d*) $\vec{u}$ = (1, 1, –1), $\vec{v}$ = (1, –1, 1), $\vec{w}$ = (–1, 1, 1)**

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \rightarrow$ linealment independents

30. Utilitzant determinants, troba els valors de *a*, per tal que els vectors de V_3 següents siguin linealment dependents:

***a*) $\vec{u}$ = (1, 1, *a*), $\vec{v}$ = (2, –3, –2), $\vec{w}$ = (5, *a*, –8)**

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & -3 & a \\ a & -2 & -8 \end{vmatrix} = 2a^2 + 17a + 30;$

$2a^2 + 17a + 30 = 0 \rightarrow a_1 = -\frac{5}{2}, \ a_2 = -6$

***b*) $\vec{u}$ = (1, –3, 2), $\vec{v}$ = (2, 1, *a*), $\vec{w}$ = (2, –13, 13)**

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -3 & 1 & -13 \\ 2 & a & 13 \end{vmatrix} = 7a + 35; \ 7a + 35 = 0 \rightarrow$

$\rightarrow a = -5$

31. Calcula el determinant següent, calculant només un determinant d'ordre 2:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{4} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{-3} & \mathbf{1} & \mathbf{-2} \end{vmatrix}$$

Resposta oberta. Per exemple, deixant la 1a fila igual i canviant les altres dues per $f_2' = f_2 + f_1$ i $f_3' = f_3 - f_1$ i desenvolupant-lo pels elements de la segona columna nova queda:

$$-\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ -5 & -6 \end{vmatrix} = -12$$

32. Troba el rang de les matrius següents:

***a*) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$**

***b*) $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$**

***c*) $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$**

***d*) $D = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$**

rang A = 2, rang B = rang C = rang D = 3

33. Considera la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a+1 & 1 & -a \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$**. Troba els valors de** a **pels quals rang** $A \neq 3$**.**

$|A| = 0 \rightarrow -a^2 + 3a - 2 = 0 \rightarrow a = 1,\ a = 2$

34. Sigui A **una matriu quadrada regular. Demostra:**

a) **Si** $AX = B$**, aleshores** $X = A^{-1}B$

$AX = B \rightarrow A^{-1}(AX) = A^{-1}B \rightarrow (A^{-1}A)X = A^{-1}B \rightarrow IX = A^{-1}B \rightarrow X = A^{-1}B$

b) **Si** $XA = C$**, aleshores** $X = CA^{-1}$

$XA = C \rightarrow (XA)A^{-1} = CA^{-1} \rightarrow X(AA^{-1}) = CA^{-1} \rightarrow XI = CA^{-1} \rightarrow X = CA^{-1}$

c) **Aplica-ho a les matrius:**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{i } C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{-5}{13} & \frac{14}{13} & \frac{11}{13} \\ \frac{-1}{13} & \frac{8}{13} & \frac{-1}{13} \end{pmatrix}$$

$$X = CA^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{13} & \frac{-3}{13} \\ \frac{-11}{13} & \frac{4}{13} \\ \frac{16}{13} & \frac{-7}{13} \end{pmatrix}$$

35. De les matrius:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{i } C = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) **Indica'n una que tingui inversa.**

La matriu A.

b) **Troba aquesta inversa. Fes-ne la comprovació.**

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}\ AA^{-1} = A^{-1}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

36. Amb les matrius de l'exercici anterior, troba una matriu X **tal que** $AX - B = C$**.**

$$X = A^{-1}(C + B) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ \frac{-7}{4} & 1 & \frac{-7}{4} \end{pmatrix}$$

37. Troba la inversa de la matriu:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

i comprova-ho.

Calcula $|A^{-1}|$ **i compara-ho amb** $|A|$**. Què observes?**

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{6}{11} & \frac{-8}{11} & \frac{-1}{11} \\ \frac{-8}{11} & \frac{7}{11} & \frac{5}{11} \\ \frac{7}{11} & \frac{-2}{11} & \frac{-3}{11} \end{pmatrix}$$

$$AA^{-1} = A^{-1}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$|A^{-1}| = -1/11 = 1/|A|$

38. Troba una matriu B**, tal que** $BA = (1\ 2\ 0)$**, essent** A **la matriu de l'exercici anterior.**

$B = (-10/11\ \ 6/11\ \ 9/11)$

39. Comprova que la inversa de

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ és } A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Demostra que $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$

$$\left|A^{-1}\right| = \frac{1}{(ad-bc)^2} \cdot \begin{vmatrix} d & -b \\ -c & a \end{vmatrix} = \frac{da - bc}{(ad-bc)^2} = \frac{1}{ad - bc} = \frac{1}{|A|}$$

40. Amb les matrius A **i** B**, comprova:**

$(BA)^{-1} = (A^{-1})(B^{-1})$ **i** $(AB)^{-1} = (B^{-1})(A^{-1})$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(BA)^{-1} = (A^{-1})(B^{-1}) = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & \frac{-1}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{6} \end{pmatrix}$$

$$(AB)^{-1} = (B^{-1})(A^{-1}) = \begin{pmatrix} \frac{-1}{6} & \frac{-1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$$

Acabem

1. Donades les matrius:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ i}$$

$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix}$ **troba, si existeix, la matriu X:**

a) **$2A - B + X = C$**

$$\begin{pmatrix} 7 & -1 & -4 \\ -2 & 0 & -1 \\ 0 & 6 & -5 \end{pmatrix}$$

b) **$\frac{1}{2}X - 3B = A - C$**

$$\begin{pmatrix} 20 & -8 & 2 \\ 18 & 8 & 22 \\ 4 & 6 & 16 \end{pmatrix}$$

c) **$XB = C$**

$$\begin{pmatrix} \frac{-1}{7} & \frac{3}{7} & \frac{5}{7} \\ \frac{-3}{7} & \frac{2}{7} & \frac{-6}{7} \\ \frac{25}{21} & \frac{-47}{21} & \frac{57}{21} \end{pmatrix}$$

d) **$AX = B$**

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 5 \\ \frac{-3}{2} & 0 & 8 \\ \frac{3}{2} & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2. Sigui $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ troba una altra matriu quadrada B d'ordre 2 tal que $AB = 3A$.

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

3. Calcula el determinant d'una matriu quadrada A d'ordre 3, definida per les condicions:

$a_{ij} = 3$ ($i = j$), $a_{ij} = 1$ ($i \neq j$)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow |A| = 20.$$

4. Resol l'equació següent:

$$\begin{vmatrix} x & 2x+1 & 2x+1 \\ 2x+1 & 3x-1 & 4x \\ 3x-1 & 4x & 6x-1 \end{vmatrix} = 0$$

$-6x^2 + 3x = 0 \rightarrow x = 0$, $x = 1/2$.

5. Demostra que les arrels del polinomi següent són 4, 8 i –12.

$$p(x) = \begin{vmatrix} x & 8 & 8 \\ 8 & x & 4 \\ 4 & 4 & x \end{vmatrix}$$

$p(x) = x^3 - 112x + 384 = (x - 4)(x - 8)(x + 12)$.

6. Calcula:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 4 & 17 \end{pmatrix}$$

7. Troba les matrius inverses de:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ i}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Fes-ne la comprovació.

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -2 & 7\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\quad B^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -4 & -3\\ 1 & -5 & -3\\ -1 & 6 & 4\end{pmatrix}$$

$$C^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{-1}{12} & \frac{-5}{6} & \frac{7}{12}\\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{-1}{6}\\ \frac{1}{6} & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{6}\end{pmatrix}$$

$$AA^{-1}=A^{-1}A=BB^{-1}=B^{-1}B=CC^{-1}=C^{-1}C=$$
$$=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

8. De les matrius:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & 4 & 1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & -1 & 3\\ 0 & 3 & 0\end{pmatrix}\ \text{i}$$
$$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}3 & -2 & 1\\ 1 & -4 & -1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

indica'n una que tingui inversa i troba-la.

Troba una matriu *X* tal que *XA* + *B* = 2*C*.

La matriu A, $A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ -2 & -4 & 1\end{pmatrix}$;

$X=(2C-B)A^{-1}=\begin{pmatrix}7 & -2 & -1\\ 11 & 13 & -5\\ -2 & -9 & 2\end{pmatrix}$

9. Les matrius:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a & b\\ -b & a\end{pmatrix}\ \text{i}\ \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}c & d\\ -d & c\end{pmatrix}$$

commuten? Justifica'n la resposta.

Sí, ja que $AB=BA=\begin{pmatrix}ac-bd & ad+bc\\ -bc-ad & -bd+ac\end{pmatrix}$

10. Decideix, segons els valors de *k*, el rang de la matriu:

$$\begin{pmatrix}1 & k & k^2\\ 1 & 2 & 4\\ 1 & 3 & 9\end{pmatrix}$$

$k^2-5k+6=0\rightarrow k=2,\ k=3.$

Si $k\neq 2$ i $k\neq 3$, el rang és 3; i si $k=2$ o $k=3$, aleshores el rang és 2.

11. Troba el rang de les matrius següents:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 1\\ 3 & 2 & 1 & 1\\ 5 & 3 & 3 & 2\end{pmatrix}\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -3 & -2\\ 1 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1 & 5 & 3 & 2 & 2\\ 2 & 3 & 1 & 1 & 2\\ 0 & 7 & 5 & 3 & 2\end{pmatrix}\quad \boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 0\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}$$

rang A = 3, rang B = 2, rang C = 2 i rang D = 3.

12. Troba A^n si:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a & 1-a\\ 1+a & -a\end{pmatrix}$$

Si n és parell $A^n=I$, si n és senar $A^n=A$.