

**Comencem**

- Les edats de tres nens sumades de dues en dues donen 6, 8 i 12 anys, respectivament. Troba les edats de cada nen.

El sistema és: 
$$\begin{cases} x + y = 6 \\ x + z = 8 \\ y + z = 12 \end{cases}$$

Es pot resoldre per reducció.

La solució és: 1, 5 i 7 anys respectivament.

- Resol el sistema següent:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x + z = 4 \\ y + z = 5 \end{cases}$$

Per substitució s'obté:  $x = 1, y = 2, z = 3$ .

**Exercicis**

1. Esbrina si (0, 1, 2) és la solució d'algun dels sistemes següents:

Substituir  $x = 0, y = 1$  i  $z = 2$  en cada una de les equacions de cada sistema. Si es verifiquen les tres alhora, és solució:

a) 
$$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ 3x + y = 1 \\ 2x - y + z = 2 \end{cases}$$

No

b) 
$$\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 3y - 2z = -1 \\ 5x + y - z = -1 \end{cases}$$

Sí

c) 
$$\begin{cases} 2x - 4y + 2z = 0 \\ -2y + z = 0 \\ -4x + y + z = 3 \end{cases}$$

Sí

d) 
$$\begin{cases} 3x + z = 2 \\ x + 3y = 1 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

No

2. Aplica les propietats de l'equivalència de sistemes fins a arribar a un d'esglaonat, per trobar la solució dels sistemes següents:

a) 
$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - 3y + 2z = 1 \\ x + y - 2z = -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ -5y = 1 \\ 3z = 3 \end{cases} \quad (-4/5, -1/5, 1)$$

b) 
$$\begin{cases} -x + y + z = 2 \\ 3x - y + z = 0 \\ -2x + 3y - 5z = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x + y + z = 2 \\ x + z = 1 \\ 9z = 9 \end{cases} \quad (1, 1, 0)$$

3. Aplica el mètode de Gauss per resoldre, si és possible, els sistemes següents. Explica en cada cas de quin tipus de sistema es tracta.

a) 
$$\begin{cases} 3x - 3y + z = 0 \\ x - 2y + 2z = 3 \\ 2x + 2y - 6z = -4 \end{cases}$$

Posem la segona equació en primer lloc i dividim la tercera per 2 per aplicar Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 3 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -5 & -9 \\ 0 & 3 & -5 & -5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -5 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

el sistema és incompatible.

b) 
$$\begin{cases} 3x - 3y + z = 0 \\ x - 2y + 2z = 3 \\ 2x + 2y - 3z = 6 \end{cases}$$

Posar la segona equació en primer lloc. Es pot esquematitzar el procés representant les files de les successives matrius:  $F_1, F_2, F_3 \rightarrow F_1, F'_2 = F_2 - 3F_1, F'_3 = F_3 - 2F_1 \rightarrow F_1, F'_2, F''_3 = F'_3 - 2F'_2 \rightarrow$  Compatible determinat: (5, 7, 6)

$$c) \begin{cases} 3x - 3y + z = 0 \\ x - 2y + 2z = 3 \\ 2x + 2y - 3z = -12 \end{cases}$$

Posar la segona equació en primer lloc.

$$F_1, F_2, F_3 \rightarrow F_1, F'_2 = F_2 - 3F_1, F'_3 = F_3 - 2F_1 \rightarrow F_1, F'_2, F'_3 = F'_3 - 2F'_2 \rightarrow \text{Compatible determinat: } (-3, -3, 0)$$

$$d) \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 3x - y + 2z = 0 \\ 5x + y - z = 1 \end{cases}$$

$$F_1, F_2, F_3 \rightarrow F_1, F'_2 = F_2 + F_1, F'_3 = F_3 - F_1 \rightarrow F_1, F'_2, F'_3 = F'_3 - F'_2 \rightarrow \text{Compatible determinat: } (1/20, 27/2, 3/5).$$

4. Si en un sistema de tres equacions i tres incògnites substitueixes una equació per la que resulta de sumar les tres, obtens un sistema equivalent? Raona la teva resposta.

Sí. La suma de les tres equacions és una combinació lineal d'elles i el sistema que en resulta és equivalent al donat.

5. Escriu dues equacions lineals amb tres incògnites. Afegeix una tercera equació de manera que el sistema format per aquesta i les altres dues sigui compatible indeterminat.

La tercera equació cal que sigui una combinació lineal de les dues donades. Per exemple:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ x - 2y - z = 3 \\ 2x - y + z = 4 \end{cases}$$

6. Resol els sistemes següents en cas que siguin compatibles:

$$a) \begin{cases} 3x - 5y + 3z = 1 \\ x - 3y + 2z = 2 \\ x + y - z = -3 \end{cases}$$

Posar la segona equació en primer lloc:  $F_1, F_2, F_3 \rightarrow F_1, F'_2 = F_2 - 3F_1, F'_3 = F_3 - F_1 \rightarrow$  Compatible indeterminat ja que  $F'_2 = F'_3$ . Les solucions expressades en funció de  $z$ , són:  $x = (7z - 17)/4, y = (3z - 5)/4, z$ .

$$b) \begin{cases} 2x + y + z = 4 \\ 3x + 4y - z = 4 \\ x + 3y + 2z = 4 \end{cases}$$

Posar la tercera equació en primer lloc:  $F_1, F_2, F_3 \rightarrow F_1, F'_2 = F_2 - 2F_1, F'_3 = F_3 - 3F_1 \rightarrow F_1, F'_2, F'_3 = F'_3 - F'_2 \rightarrow$  Compatible determinat:  $(7/5, 1/5, 1)$

$$c) \begin{cases} x - 2y = 15 \\ -3x + 4y = 7 \end{cases}$$

Per reducció. Compatible determinat:  $x = 37$  i  $y = -26$

$$d) \begin{cases} 12x - y = 10 \\ 14x + 5y = 1 \end{cases}$$

Per reducció. Compatible determinat:  $x = 51/74$  i  $y = -64/37$ .

7. Aplica el teorema de Rouché als sistemes següents i troba la solució dels que siguin compatibles.

$$a) \begin{cases} x - y + z = 7 \\ x + y - z = 3 \\ -x + y + z = 1 \end{cases}$$

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$|M| = 4$ , rang  $M =$  rang  $M' = 3$ , per tant el sistema és compatible determinat. Es pot resoldre per Gauss:  $(5, 2, 4)$ .

$$b) \begin{cases} x + y + z = 11 \\ 2x - y + z = 5 \\ 3x + 2y - z = 24 \end{cases}$$

$|M| = 11$ , rang  $M =$  rang  $M' = 3$ , per tant el sistema és compatible determinat. Es pot resoldre per Gauss:  $(52/11, 59/11, 10/11)$

$$c) \begin{cases} 2x + y - z = 15 \\ 5x - y + 5z = 16 \\ x + 4y + z = 20 \end{cases}$$

$|M| = -6$ , rang  $M =$  rang  $M' = 3$ , per tant el sistema és compatible determinat. Es pot resoldre per Gauss:  $(5, 4, -1)$

$$d) \begin{cases} 3x - y = 0 \\ x + y + z = 1 \\ -x + 3y - z = -2 \end{cases}$$

$|M| = -12$ , rang  $M =$  rang  $M' = 3$ , per tant el sistema és compatible determinat. Es pot resoldre per Gauss:  $(-1/12, -1/4, 4/3)$ .

8. Comprova que aquests sistemes són incompatibles:

$$a) \begin{cases} 2x - y + z = 2 \\ 3x + 2y - 4z = 1 \\ x + 3y - 5z = 4 \end{cases}$$

$|M| = 0$ . Hi ha un determinant de segon ordre diferent de 0, per tant, rang  $M = 2$  i rang  $M' = 3$  ja que el determinant que s'obté en orlar amb la columna de termes independents és diferent de 0. El sistema és incompatible.

$$b) \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x - y - 2z = 1 \\ 3x - 3z = 2 \end{cases}$$

rang  $M = 2$  i rang  $M' = 3$ . Igual que l'apartat anterior.

9. Contesta veritat o fals a cadascuna de les afirmacions següents:

a) Un sistema de tres equacions i tres incògnites és sempre compatible determinat.

És fals. Depèn dels rangs de les matrius  $M$  i  $M'$ .

b) Un sistema compatible indeterminat té només dues solucions.

És fals. Si és indeterminat té infinites solucions.

c) La matriu del sistema de dues equacions i tres incògnites és de rang 3.

És fals. Com a màxim és de rang 2, ja que només es pot considerar un determinant de segon ordre.

d) Un sistema és incompatible quan té més equacions que incògnites.

És veritat. Coincideixen els rangs de les matrius i no hi ha cap determinant d'ordre superior a 3.

10. Escriu els sistemes següents en forma matricial i troba'n la solució, si són compatibles, utilitzant la matriu inversa:

$$a) \begin{cases} 2x + y - z = 3 \\ x + 3y + 2z = -1 \\ 3x - y + 5z = 7 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$|M| = 45$ , per tant existeix la matriu inversa i podem trobar la solució:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{45} \begin{pmatrix} 17 & -4 & 5 \\ 1 & 13 & -5 \\ -10 & 5 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Solució: (2, -1, 0)

$$b) \begin{cases} x + y + z = 6 \\ 3x - y + 2z = 7 \\ 2x + 3y - z = 5 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$|M| = 13$ , per tant existeix la matriu inversa i podem trobar la solució:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} -5 & 4 & 3 \\ 7 & -3 & 1 \\ 11 & -1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

La solució: (1, 2, 3).

11. Escriu un sistema de dues equacions amb tres incògnites. Posa'l en forma matricial. Té inversa, la matriu del sistema? És un sistema compatible i determinat? Raona les teves respostes.

Per exemple: 
$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 1 \\ x + y + z = 3 \end{cases}$$

En notació matricial: 
$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

La matriu  $M$  és (2, 3), no és quadrada i no té inversa. No es pot resoldre el sistema per aquest mètode.

12. Escriu en forma matricial el sistema:

$$\begin{cases} 2x - y + 2z = 0 \\ -x + 2y - z = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

El pots resoldre utilitzant la matriu inversa? Raona la teva resposta.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

i  $|M| = 0$ , per tant,  $M$  no té inversa i no es pot resoldre el sistema per aquest mètode.

13. Resol el sistema següent en forma matricial:

$$\begin{cases} x - 3y = 2 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$i |M| = 7, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{7} \\ -\frac{1}{7} \end{pmatrix}$$

La solució és:  $x = 11/7$  i  $y = -1/7$ .

14. Comprova que els sistemes següents són de Cramer i troba'n la solució utilitzant aquest mètode:

Per comprovar si els sistemes següents són de Cramer, calculem el determinant  $\Delta$  de la matriu del sistema. Si és diferent de 0, es pot aplicar aquest mètode. Calculem els determinants corresponents a cada incògnita, tot i que per trobar la tercera incògnita, també podem substituir les altres dues en una de les equacions.

$$a) \begin{cases} x + y - z = 3 \\ 2x - 2y - 3z = 1 \\ x + y - 2z = 2 \end{cases}$$

$\Delta = 4$ ,  $\Delta_x = 12$ ,  $\Delta_y = 4$  i  $\Delta_z = 4$ ;  $x = \Delta_x/\Delta = 3$ ,  $y = \Delta_y/\Delta = 1$  i  $z = \Delta_z/\Delta = 1$ .

$$b) \begin{cases} 3x - 4y - z = 1 \\ 2x + y - 6z = 1 \\ x + y - 3z = 2 \end{cases}$$

$\Delta = 8$ ,  $\Delta_x = 40$ ,  $\Delta_y = 24$  i  $\Delta_z = 16$ . La solució és:  $(5, 3, 2)$

$$c) \begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ 2x + 3y + 3z = 1 \\ 3x - y + 5z = 2 \end{cases}$$

$\Delta = -5$ ,  $\Delta_x = 5$ ,  $\Delta_y = 0$  i  $\Delta_z = -5$ . La solució és:  $(-1, 0, 1)$

$$d) \begin{cases} x - y + z = 1 \\ -x + 3y = 2 \\ 2x + 2y + 5z = 8 \end{cases}$$

$\Delta = 2$ ,  $\Delta_x = 5$ ,  $\Delta_y = 3$  i  $\Delta_z = 0$ . La solució és:  $(5/2, 3/2, 0)$

$$e) \begin{cases} x + 3y = 6 \\ x - 8y = 16 \end{cases}$$

$\Delta = -11$ ,  $\Delta_x = -96$  i  $\Delta_y = 10$ . La solució és:  $(96/11, -10/11)$

$$f) \begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases}$$

$\Delta = 1$ ,  $\Delta_x = 5$  i  $\Delta_y = -3$ . La solució és:  $(5, -3)$ .

15. Considera el sistema següent i mira si el pots resoldre pel mètode de Cramer.

$$\begin{cases} 2x + 3y - 5z = 8 \\ -x + 2y - z = 5 \\ 5x - 3y - 2z = -7 \end{cases}$$

Si es considera el sistema  $\begin{cases} 2x + 3y = 8 + 5z \\ -x + 2y = 5 + z \end{cases}$  es

pot resoldre per Cramer ja que  $\Delta = 7 \neq 0$ . La solució és:  $(1/7 + z, 18/7 + z, z)$ .

16. Raona, i resol en cas que sigui possible, els sistemes següents pel mètode de Cramer.

$$a) \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - 3y + z = 0 \\ 5x + y - z = 0 \end{cases}$$

$\Delta = 26$ . Es pot resoldre per Cramer.  $\Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$  per tenir una columna de zeros. És compatible determinat i la solució és la trivial:  $(0, 0, 0)$ .

$$b) \begin{cases} 2x - y + 3z = 0 \\ -x + 2y - 3z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

$\Delta = 0$ . Es pot considerar el sistema:

$$\begin{cases} 2x - y = -3z \\ -x + 2y = 3z \end{cases}$$

$$\Delta' = 3, \Delta_x = \begin{vmatrix} -3z & -1 \\ 3z & 2 \end{vmatrix} = -3z,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & -3z \\ -1 & 3z \end{vmatrix} = 3z.$$

Compatible indeterminat i la solució:  $(-\lambda, \lambda, \lambda)$ .

17. Resol els sistemes homogenis següents:

$$a) \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

$\Delta = 6$ ,  $\Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$ .

Compatible determinat:  $(0, 0, 0)$

$$b) \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y + 3z = 0 \\ 4x + y + 5z = 0 \end{cases}$$

$$\Delta = 0.$$

Compatible indeterminat:  $(\lambda, -1/4 \lambda, -3/4 \lambda)$

$$c) \begin{cases} x + y = 0 \\ y + z = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$$

$$\Delta = 2, \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0.$$

Compatible determinat:  $(0, 0, 0)$

$$d) \begin{cases} 3x + y - z = 0 \\ -2x - y + 2z = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$$

$$\Delta = 0.$$

Compatible indeterminat:  $(\lambda, -2\lambda, -\lambda)$

$$e) \begin{cases} x - y - z = 0 \\ 3x + 5y + z = 0 \\ -2x + 4y = 0 \end{cases}$$

$$\Delta = -24, \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0.$$

Compatible determinat:  $(0, 0, 0)$ .

**18. Estudia la compatibilitat dels sistemes següents i resol els que siguin compatibles.**

$$a) \begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - y + 3z = 9 \\ 4x + y + 5z = 22 \end{cases}$$

$|M| = |M'| = 0$ . Rang  $M = \text{rang } M' = 2$  i el sistema és compatible indeterminat i es pot resoldre per Gauss. Les solucions es poden expressar:  $((4 + \lambda)/3, \lambda, (19 + 7\lambda)/3)$ .

$$b) \begin{cases} 2x - 3y + z = 9 \\ 4x + y - z = -1 \\ 6x - 2y = 8 \end{cases}$$

$|M| = 0$  i  $|M'| = -26$ . Rang de  $M = 2$  i rang  $M' = 3$ . El sistema és incompatible.

$$c) \begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ x + 3z = 3 \\ x + y - 3z = 5 \end{cases}$$

$|M| = -6$ . Rang  $M = \text{rang } M' = 3$ . El sistema és compatible determinat. Es pot resoldre per Cramer perquè té ja  $\Delta = |M| = -6$ :  $\Delta_x = 18$ ,  $\Delta_y = -12$  i  $\Delta_z = 12$ . La solució és:  $(-3, 2, -2)$

$$d) \begin{cases} 2x - 4y + 6z = 2 \\ y + 2z = -3 \\ x - 3y + z = 4 \end{cases}$$

$|M| = |M'| = 0$ . Rang  $M = \text{rang } M' = 2$  i el sistema és compatible indeterminat i es pot resoldre per Gauss. Les solucions es poden expressar:  $(-5 - 7\lambda, -3 - 2\lambda, \lambda)$ .

$$e) \begin{cases} 2x + 3y - z = -5 \\ x + 2y - z = -5 \\ 5x + y + z = 11 \end{cases}$$

$|M| = -3$ . Rang  $M = \text{rang } M' = 3$ . El sistema és compatible determinat. La solució és:  $(2, -2, 3)$ .

$$f) \begin{cases} 2x - y = -7 \\ x + 2y = 4 \\ 5x + y = -7 \\ 3x + y = -3 \end{cases}$$

$|M| = 5$ . Rang  $M = \text{rang } M' = 2$ . El sistema és compatible determinat. La solució és:  $(-2, 3)$ .

**19. Discuteix els sistemes següents segons els valors del paràmetre  $k$ :**

$$a) \begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ 2x + y - 3z = 2 \\ kx - y - 2z = 3 \end{cases}$$

Si fem  $|M| = 0 \rightarrow k = 3$ . Per aquest valor,  $|M'| = 0$  i rang  $M = \text{rang } M' = 2$  i el sistema és compatible indeterminat. Per  $k \neq 3$  és compatible determinat.

$$b) \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \\ kx + 2y + z = 0 \end{cases}$$

Si fem  $|M| = 0 \rightarrow k = 2$ . Per aquest valor,  $|M'| = 0$  i rang  $M = \text{rang } M' = 2$  i el sistema és compatible indeterminat. Per  $k \neq 2$  és compatible determinat i té la solució trivial.

$$c) \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 3x + 2y + kz = 5 \\ 2x + y - z = 3 \end{cases}$$

Si fem  $|M| = 0 \rightarrow k = 0$ . Per aquest valor,  $|M'| = 2$ . Per  $k = 0$  el sistema és incompatible ja que rang  $M = 2$  i rang  $M' = 3$ . Per  $k \neq 0$  és compatible determinat.

$$d) \begin{cases} 2x + y + z = 3 \\ x - 3y + 8z = 2 \\ 3x + 5y + kz = 3 \end{cases}$$

Si fem  $|M| = 0 \rightarrow k = -6$ . Per aquest valor,  $|M'| = -7$ . Per  $k = -6$  el sistema és incompatible ja que rang  $M = 2$  i rang  $M' = 3$ . Per  $k \neq -6$  és compatible determinat.

$$e) \begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ kz + 2z = 2 \\ 4x + z = 0 \end{cases}$$

Si fem  $|M| = 0 \rightarrow k = 8$ . Per aquest valor,  $|M'| = 8$ . Per  $k = 8$  el sistema és incompatible ja que rang  $M = 2$  i rang  $M' = 3$ . Per  $k \neq 8$  és compatible determinat.

$$f) \begin{cases} x - ky = 1 \\ 2x + ky = k \\ x + y = 2 \end{cases}$$

Per  $k = -1$  el sistema és incompatible. Només serà compatible determinat si rang  $M =$  rang  $M' = 2$ . Això implica que  $|M'| = 0 \rightarrow k = 2 \pm \sqrt{6}$ . Només és compatible determinat per aquests dos valors de  $k$ . Per valors diferents d'aquests és incompatible.

20. En una granja hi ha porcs, vaques i cavalls, en total 54 animals. El nombre de vaques representa  $\frac{3}{4}$  del nombre de porcs, i el de cavalls,  $\frac{2}{3}$  del de vaques. Quants animals hi ha de cada classe a la granja?

Nombre de porcs:  $x$ , nombre de vaques:  $y$ , nombre de cavalls:  $z$ .

$$\begin{cases} x + y + z = 54 \\ y = 3/4x \\ z = 2/3y \end{cases}$$

Es pot resoldre per substitució:

La solució: 24 porcs, 18 vaques i 12 cavalls.

21. La suma de les edats de tres persones és 100 anys. Troba l'edat de cadascuna d'elles si saps que la del mig té 10 anys més que la més petita, i que la més gran té tants anys com les altres dues juntes.

Edat més gran:  $x$ , edat del mitjà:  $y$ , edat més petita:  $z$ .

$$\begin{cases} x + y + z = 100 \\ y = 10 + z \\ x = y + z \end{cases}$$

Es pot resoldre per substitució: 50, 30 i 20 anys respectivament.

22. En un nombre de tres xifres la suma d'aquestes és 10. La xifra de les desenes és 3 i quan s'inverteix l'ordre d'aquestes xifres, s'obté un altre nombre que excedeix el primer en 495 unitats. Troba aquest nombre.

$$xyz \rightarrow 100x + 10y + z$$

$$\begin{cases} x + y + z = 10 \\ y = 3 \\ 100x + 10y + z - (100z + 10y + x) = 495 \end{cases}$$

El nombre és 136.

23. L'edat d'en Pere és el doble de l'edat de la Maria. Fa 7 anys la suma de les edats era igual a l'edat actual d'en Pere. Troba les dues edats.

Edat d'en Pere:  $x$ , edat de Maria:  $y$ .

$$\begin{cases} x = 2y \\ x - 7 + y - 7 = x \end{cases}$$

Solució: 28 i 14 anys respectivament.

24. Les edats d'una nena, el seu pare i la seva àvia sumen 100 anys. Calcula aquestes edats sabent que la diferència entre l'edat del pare i la de la seva filla és la meitat de l'edat de l'àvia i que 14 vegades l'edat de la nena és el doble de l'edat del pare.

Edat de la nena:  $x$ , edat del pare:  $y$ , edat de l'àvia:  $z$ .

$$\begin{cases} x + y + z = 100 \\ y - x = z/2 \\ 14x = 2y \end{cases}$$

Solució: 5, 35 i 60 anys respectivament.

25. D'un nombre de tres xifres se sap que:

- Sumant la xifra de les centenes amb la de les unitats s'obté la xifra de les desenes.
- Les tres xifres sumen 10.
- Si s'inverteix l'ordre de les xifres, s'obté un altre nombre 297 unitats major.

Calcula el nombre.

$$xyz \rightarrow 100x + 10y + z$$

$$\begin{cases} x + z = y \\ x + y + z = 10 \\ 100z + 10y + x - (100x + 10y + z) = 297 \end{cases}$$

El nombre és 154.

## Acabem

1. Estudia la compatibilitat dels sistemes següents i resol els que siguin compatibles.

$$a) \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + 3y + 5z = 11 \\ x - 5y + 6z = 29 \end{cases}$$

$|M| = 23 \rightarrow \text{rang } M = \text{rang } M' = 3$  i el sistema és compatible determinat. La solució: (1, -2, 3)

$$b) \begin{cases} x - y + z = 3 \\ 2y + 3z = 15 \\ 3x + y = 12 \end{cases}$$

$|M| = -18 \rightarrow \text{rang } M = \text{rang } M' = 3$  i el sistema és compatible determinat. La solució: (3, 3, 3)

$$c) \begin{cases} x + y = 12 \\ y + z = 8 \\ x + z = 6 \end{cases}$$

$|M| = -18 \rightarrow \text{rang } M = \text{rang } M' = 3$  i el sistema és compatible determinat. La solució: (5, 7, 1)

$$d) \begin{cases} x + 2y - 3z = -16 \\ 3x + y - 2z = -10 \\ 2x - 3y + z = -4 \end{cases}$$

$|M| = 14 \rightarrow \text{rang } M = \text{rang } M' = 3$  i el sistema és compatible determinat. La solució: (1, 5, 9)

$$e) \begin{cases} x + y - 2z = 9 \\ 2x - y + 4z = 4 \\ 2x - y - 6z = -1 \end{cases}$$

$|M| = 63 \rightarrow \text{rang } M = \text{rang } M' = 3$  i el sistema és compatible determinat. La solució: (1/3, 4, 2)

$$f) \begin{cases} 3x + y - z = 3 \\ -6x + 2y + z = 8 \\ 18x - 5y + 2z = -10 \end{cases}$$

$|M| = 30 \rightarrow \text{rang } M = \text{rang } M' = 3$  i el sistema és compatible determinat. La solució: (4, 6, 1/2)

$$g) \begin{cases} 2x - 5y + 3z = -12 \\ 3x + 2y - 5z = 1 \\ 7x - 4y + 2z = 0 \end{cases}$$

$|M| = 95 \rightarrow \text{rang } M = \text{rang } M' = 3$  i el sistema és compatible determinat. La solució: (2, 5, 3)

$$h) \begin{cases} x + (1 - \sqrt{3})y + (1 + \sqrt{3})z = 1 \\ (1 + \sqrt{3})x + y + (1 - \sqrt{3})z = 1 \\ (1 - \sqrt{3})x + (1 + \sqrt{3})y + z = 1 \end{cases}$$

$|M| = 0 \rightarrow \text{rang } M = \text{rang } M' = 2$  i el sistema és compatible indeterminat. La solució:  $(-2\lambda, -\lambda, \lambda)$

$$i) \begin{cases} x + y + 3z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ 2x + y + 5z = 0 \end{cases}$$

$|M| = 27 \rightarrow \text{rang } M = \text{rang } M' = 3$  i el sistema és compatible determinat; es pot resoldre per reducció o Gauss. La solució: (1/3, 1/3, 1/3).

j) El sistema següent està escrit en la forma matricial:  $AX = B$ . Per resoldre'l cal trobar la matriu de les incògnites, la qual cosa implica el càlcul de la matriu inversa  $A^{-1}$  si existeix. També es pot resoldre multiplicant les matrius i escrivint el sistema en la forma més usual i resoldre'l per qualsevol dels mètodes.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Multiplicarem les matrius i obtenim el sistema:

$$\left. \begin{cases} x + 2z = 1 \\ 2y + 4y + 5z = 0 \\ 3x - y + 3z = 2 \end{cases} \right\} |M| = -11$$

$\text{rang } M = \text{rang } M' = 3 \rightarrow$  compatible determinat.

Per Cramer:  $\Delta_x = 1$ ;  $\Delta_y = 7$  i  $\Delta_z = -6$

$$x = \frac{1}{11}, y = \frac{-7}{11}, z = \frac{6}{11}.$$

2. Raona per què tots els sistemes següents són compatibles. Expressa la solució d'aquells que siguin indeterminats.

$$a) \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - 3y - 2z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 2x - 3y - z = 0 \\ -x + y - 3z = 0 \\ -x - 6y + 8z = 0 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x + 2y - 2z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases}$$

Són sistemes homogenis i tenen com a mínim la solució trivial. c) és compatible indeterminat ja que  $|M| = 0$ . Les solucions:  $(0, \lambda, \lambda)$ .

3. En una granja hi ha 1300 caps de bestiar distribuïts en tres corrals de manera que la relació entre el nombre d'animals del primer corral i el del segon és  $\frac{19}{18}$  i la relació entre el nombre d'animals del segon i tercer és  $\frac{6}{5}$ . Calcula quants animals hi ha en cada corral.

Nombre de caps en el primer corral:  $x$ , nombre de caps en el segon:  $y$ , nombre de caps en el tercer:  $z$ .

$$\begin{cases} x + y + z = 1300 \\ x/y = 19/18 \\ y/z = 6/5 \end{cases}$$

Per substitució es resol fàcilment. La solució: 475, 450 i 375 caps de bestiar respectivament.

4. Un constructor compra tres parcel·les i paga 150 €/m<sup>2</sup>, 180 €/m<sup>2</sup> i 200 €/m<sup>2</sup>, respectivament. Calcula la superfície de cada una sabent que entre les tres fan 1870 m<sup>2</sup>, que el preu total de l'operació és de 336000 € i que el preu de la tercera parcel·la representa les tres quartes parts del preu de les altres dues juntes.

m<sup>2</sup> la 1a parcel·la:  $x$ , m<sup>2</sup> la 2a parcel·la:  $y$ , m<sup>2</sup> la 3a parcel·la:  $z$

$$\begin{cases} x + y + z = 1870 \\ 15\,000x + 18\,000y + 20\,000z = 33\,600\,000 \\ 20\,000z = 3/4(15\,000x + 18\,000y) \end{cases}$$

Cal simplificar les equacions abans de resoldre el sistema. La solució: 500 m<sup>2</sup>, 650 m<sup>2</sup> i 720 m<sup>2</sup>.

5. Considera el sistema:

$$\begin{cases} x + my + z = 4 \\ x + 3y + z = 5 \\ mx + y + z = 4 \end{cases}$$

Troba els valors de  $m$  pels quals el sistema no és de Cramer. Resol el sistema per aquest mètode quan  $m = -1$ .

No és de Cramer si  $\Delta = 0 \Rightarrow m = 3$  i  $m = 1$ . Per  $m = -1$ ,  $\Delta = 8$  i el sistema és compatible determinat. La solució:  $(1/4, 1/4, 4)$ .

6. Discuteix el sistema següent segons el valor del paràmetre  $m$ . Expressa la solució general pel valor de  $m$  que el faci compatible indeterminat.

$$\begin{cases} x + my + z = m + 2 \\ x + y + mz = -2(m + 1) \\ mx + y + z = m \end{cases}$$

Fer  $|M| = 0 \rightarrow m_1 = 1$  i  $m_2 = -2$

Per  $m = 1 \rightarrow \text{rang } M = 2$  i  $\text{rang } M' = 3 \rightarrow$  sistema incompatible.

Per  $m = -2 \rightarrow \text{rang } M = \text{rang } M' = 2 \rightarrow$  sistema compatible indeterminat.

Es per resoldre per gauss i s'obté:

$$\left( \frac{4+3\lambda}{3}, \frac{2+3\lambda}{3}, \lambda \right)$$

7. Discuteix el sistema següent segons els valors de  $t$  i prova de resoldre'l quan sigui compatible:

$$\begin{cases} 5x - 11y + 9z = t \\ x - 3y + 5z = 2 \\ 2x - 4y + 2z = 1 \end{cases}$$

Per a  $t = 4$   $\text{rang } M = \text{rang } M' = 2$  i el sistema és compatible indeterminat. Les solucions:  $((-5 + 14\lambda)/2, (-3 + 8\lambda)/2, \lambda)$ . Per  $t \neq 4$  és incompatible ja que  $\text{rang } M = 2$  i  $\text{rang } M' = 3$ .



8. Un antiquari compra tres peces d'art per 2 milions d'euros. Confia a vendre-les amb uns guanys del 20%, del 50% i del 25%, respectivament, amb la qual cosa obtindria un benefici de 0,6 milions. Però en una subhasta ha aconseguit uns guanys del 80%, del 90% i del 85%, respectivament, fet que li ha representat un benefici de 1,7 milions. A quin preu va comprar cada peça?

Preu 1a peça:  $x$ , 2a:  $y$  i 3a:  $z$  milions de ptes.

$$\begin{cases} x + y + z = 20 \\ 1,2x + 1,5y + 1,25z = 26 \\ 1,8x + 1,9y + 1,85z = 37 \end{cases}$$

Solució: 5, 5 i 10 milions respectivament.

9. Analitza'n la compatibilitat i resol el sistema següent. Demuestra que hi ha infinites solucions que tenen els tres valors de les incògnites positius.

$$\begin{cases} 3x - y + z = 1 \\ -5x + 5y + z = -1 \\ x + 8y + 7z = 2 \end{cases}$$

Compatible indeterminat ja que rang  $M = \text{rang } M' = 2$ . Una expressió de les solucions és:  $((37\lambda + 10)/5, (1 - 4\lambda)/5, \lambda)$ . Cal resoldre les inequacions que donen les solucions en nombres positius. Pels valors de  $\lambda$  tal que  $0 < \lambda < 1/4$  les infinites solucions són positives.

10. Per a quin valor de  $k$  el sistema és compatible? Troba'n la solució.

$$\begin{cases} x - y + 3z = 8 \\ 2x - y + z = 3 \\ x + y - z = 0 \\ x + y - 2z = k \end{cases}$$

Resolvem el sistema format per les 3 primeres equacions:

rang  $M = \text{rang } M' = 3 \rightarrow$  compatible determinat

Per Cramer:

$$\Delta = 6; \Delta_x = 6, \Delta_y = 12, \Delta_z = 18 \\ x = 1; y = 2; z = 3$$

Substituïm aquesta solució en la 4a equació:

$1 + 2 - 6 = k \Rightarrow$  Per  $k = -3$  el sistema és compatible.

11. Considera les equacions:

$$2x - y + z = 0 \text{ i } 3x - 2y - z = 3$$

Escriu una tercera equació que, amb les dues anteriors, formi un sistema que sigui:

- a) Compatible determinat.

Resoldre el sistema format per les dues equacions que és indeterminat i escriure una tercera equació que verifiqui una solució particular:  $5x + y - 5z = 9$

- b) Compatible indeterminat.

Qualsevol combinació lineal de les dues equacions:  $5x - 3y = 3$

- c) Incompatible.

Com l'anterior però amb el terme independent diferent:  $5x - 3y = 9$ .

12. Les tres xifres d'un nombre sumen 18. Si a aquest nombre li restem el que resulta d'invertir l'ordre de les seves xifres, s'obté 594. Troba aquest nombre si sabem que la xifra de les desenes és la mitjana aritmètica de les altres dues.

$$xyz \rightarrow 100x + 10y + z$$

$$\begin{cases} x + y + z = 18 \\ 100x + 10y + z - (100z + 10y + x) = 594 \\ y = \frac{x+z}{2} \end{cases}$$

Solució: El nombre és 963.

13. Per la festa major, un noi va a tres espectacles diferents. El primer dia va dues vegades a l'espectacle X, una al Y i l'altra al Z, i es gasta 130 €. El segon dia va tres vegades al X i una al Y i es gasta 180 €. El tercer dia va un cop a cada espectacle i es gasta només 80 €. Quin era el preu de cada espectacle?

X, Y, Z preus dels espectacles respectivament:

$$\begin{cases} 2X + Y + Z = 1300 \\ 3X + Y = 1800 \\ X + Y + Z = 800 \end{cases}$$

Solució:  $X = 500$  ptes.,  $Y = 300$  ptes. i  $Z$  és gratis.

14. Troba l'edat de tres germans sabent que el triple de l'edat del primer menys el doble de l'edat del segon més l'edat del tercer fan 22 anys, l'edat del primer menys la del segon més el doble de la del tercer fan 8 anys, i el doble de la del primer més la del segon menys la del tercer fan 20 anys.

$x, y, z$  les tres edats.

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = 22 \\ x - y + 2z = 8 \\ 2x + y - z = 20 \end{cases}$$

Solució: 9, 3 i 1 anys respectivament.

**15. Troba la solució dels sistemes següents que siguin compatibles:**

$$a) \begin{cases} x - 2y = -3 \\ -2x + 3y + z = 4 \\ 2x + y - 5z = 4 \end{cases}$$

$|M| = |M'| = 0 \rightarrow$  Sistema compatible indeterminat ja que  $\text{rang } M = \text{rang } M' = 2$ . Prenem les dues primeres equacions:

$$y = \lambda, x = -3 + 2\lambda, z = 4 + 2x - 3y = -2 + \lambda$$

Solució:  $(-3 + 2\lambda, \lambda, -2 + \lambda)$ .

$$b) \begin{cases} x + 3y - z = 5 \\ 2x - y + 5z = 7 \\ x + 10y - 8z = 9 \end{cases}$$

$\text{rang } M = 2$  i  $\text{rang } M' = 3 \rightarrow$  Sistema incompatible.

$$c) \begin{cases} 3x + y - z = 4 \\ x + 2y = 5 \\ 5x + 5y - z = 14 \end{cases}$$

$\text{rang } M = \text{rang } M' = 2 \rightarrow$  Sistema compatible indeterminat. Prenem les dues primeres equacions:

$$y = \lambda, x = 5 - 2\lambda, z = 3x + \lambda - 4 = 11 - 5\lambda$$

Solució:  $(5 - 2\lambda, \lambda, 11 - 5\lambda)$

**16. Discuteix els sistemes següents segons els valors del paràmetre  $\lambda$ .**

$$a) \begin{cases} x + 3y + \lambda z = 1 \\ \lambda x + 9y + 9z = \lambda \\ x + \lambda y + 3z = 1 \end{cases}$$

Observant el sistema es pot concloure: Si  $\lambda = 3$  tenim:  $\text{rang } M = \text{rang } M' = 1 \rightarrow$  sistema compatible indeterminat amb dos graus de llibertat. Si  $\lambda \neq 3 \rightarrow$  sistema compatible determinat.

$$b) \begin{cases} 2x + 3\lambda y + z = \lambda \\ 4x + 6y + 2\lambda z = 2\lambda \\ 6\lambda x + 9y + 3\lambda z = 3\lambda \end{cases}$$

$|M| = 0$  per a qualssevol valor de  $\lambda$ . Per  $\lambda = 1$  el determinant de  $2n$  ordre és 0. Per tant:

Per  $\lambda = 1 \rightarrow \text{rang } M = \text{rang } M' = 1 \rightarrow$  sistema compatible indeterminat amb dos graus de llibertat.

Per  $\lambda \neq 1 \rightarrow \text{rang } M = \text{rang } M' = 2 \rightarrow$  sistema compatible indeterminat amb un grau de llibertat.

$$c) \begin{cases} x - y + z = 5 \\ \lambda x + y + 2\lambda z = 1 \\ 2\lambda x + 2y - 3z = 5\lambda + 1 \end{cases}$$

$$|M| = 0 \rightarrow \lambda_1 = -1 \text{ i } \lambda_2 = -\frac{3}{4}$$

Per  $\lambda_1 = -1 \rightarrow \text{rang } M = \text{rang } M' = 2 \rightarrow$  sistema compatible indeterminat.

Per  $\lambda_2 = -\frac{3}{4} \rightarrow \text{rang } M \text{ i } \text{rang } M' = 3 \rightarrow$  sistema incompatible.