EL DESCUBRIMIENTO DE LOS INCONMENSURABLES

PRIMERA CRISIS DE FUNDAMENTOS EN LA HISTORIA DE LA MATEMÁTICA

Dicen que la divinidad se enojó contra quien divulgó la doctrina de Pitágoras, pereciendo como un impío en el mar por sacrílego al haber revelado la doctrina de los números irracionales y la inconmensurabilidad.
JÁMBLICO. *Vida Pitagórica*. XXXIV, 247, p.141.

Sobre la inconmensurabilidad del diámetro respecto de la circunferencia a todos nos parece admirable que una cosa no sea medible por medio de otra que es divisible aún en partes muy pequeñas.
ARISTÓTELES. *Metafísica*. Libro I, Cap.2, 983a.

Para el alma antigua el principio de lo irracional fue como un criminal atentado a la divinidad misma. Que pone en cuestión no sólo el concepto antiguo del número, sino hasta el concepto del mundo antiguo.
O.SPENGLER. *El sentido de los números* (en *La decadencia de Occidente.* Cap.I.1). Austral, Madrid, 1998. p.152.

No es digno de llamarse hombre aquel que desconoce que la diagonal de un cuadrado es inconmensurable con el lado.
SOPHIE GERMAN. *Mémoire sur les Vibrations des surfaces élastiques* (1816).

La idea de que dos magnitudes, y más concretamente dos segmentos, tienen siempre una parte alícuota común, es decir que son conmensurables, es sin duda una etapa primigenia inevitable en el desarrollo del pensamiento intuitivo matemático tanto en el horizonte histórico como en el escolar, y por supuesto en el ámbito artesanal, por necesidades de la medida siempre aproximada de longitudes. La aparición de las magnitudes inconmensurables marcó una inflexión radical en la evolución histórica de la Geometría griega, ya que puso fin al sueño filosófico pitagórico acerca del número como esencia del universo, eliminó de la Geometría la posibilidad de medir siempre con exactitud y fue lo que imprimió a la Matemática griega una orientación geométrico-deductiva plasmada en la compilación enciclopédica de *Los Elementos* de Euclides. Los inconmensurables conducen a un trastorno lógico que estremece los cimientos de la Geometría griega, ya que al invalidar todas las pruebas pitagóricas de los teoremas que utilizaban proporciones producen la primera crisis de fundamentos en la Historia de la Matemática.

El sagaz matemático de la Academia platónica, Eudoxo de Cnido, resuelve de forma brillante y rigurosa, aunque provisional –durante dos mil años–, la antinomia radical entre finito e infinito, mediante su *Teoría de la Proporción* –plasmada en el Libro V de *Los Elementos* de Euclides–. Pero el desarrollo de La Geometría al margen y en detrimento de la Aritmética, la ausencia de un Álgebra simbólica, y es más, la conversión de toda la Matemática en Geometría, con un apodíctico estilo sintético de exposición que oculta la vía heurística del descubrimiento, fue el efecto más inmediato.

La primera crisis de fundamentos en la Historia de la Matemática

La grandeza sublime del *Teorema de Pitágoras* y la mágica belleza del *Pentagrama místico* pitagórico –generador de la *sección áurea* como razón entre la diagonal y el lado del pentágono regular– fueron dos de los tópicos más relevantes de la Escuela pitagórica, pero se convirtieron en dos caballos de Troya para la Geometría griega, porque llevaban en su interior el germen de la profunda crisis de la comunidad pitagórica donde aparecieron.

Los Diálogos de Platón informan que la comunidad matemática griega se vio gravemente sofocada por un descubrimiento que prácticamente demolía la base de la fe pitagórica en los números enteros. Los Pitagóricos, que, como filósofos presocráticos, habían considerado como núcleo dogmático de su Filosofía que «*los números son la esencia del universo*», encuentran que las consecuencias de su principal t*eorema* –llamado de Pitágoras– atentan contra los fundamentos de su doctrina, que les había llevado a establecer un paralelismo entre el concepto numérico y la representación geométrica. En efecto, el cuadrado que es una de las figuras geométricas más simples, proporciona un terrible ente geométrico, en el que hay un segmento, la diagonal, que no es conmensurable con otro segmento, el lado –no hay un submúltiplo de ambos, la diagonal y el lado, que pueda tomarse como unidad, para medir a ambos segmentos–. Igualmente sucede en el pentágono regular tan emblemático para los pitagóricos –la diagonal y el lado del pentágono son segmentos que no pueden ser medidos por una unidad común–. La creencia de que los números podían medirlo todo era una simple ilusión. Así quedaba eliminada de la Geometría la posibilidad de medir siempre con exactitud. Se había descubierto la magnitud inconmensurable, lo irracional –no expresable mediante razones–, «*el alogon*», que provocaría una crisis sin precedentes en la Historia de la Matemática.

La sacudida que la aparición del nuevo ente provocó en la Matemática griega puede calibrarse por la leyenda que relata un viejo escolio (atribuido al filósofo neo-platonico Proclo) del Libro X de *Los Elementos* de Euclides:

> «*Es fama que el primero en dar al dominio público la teoría de los irracionales, perecería en un naufragio, y ello porque lo inexpresable e inimaginable debería siempre haber permanecido oculto. En consecuencia, el culpable, que fortuitamente tocó y reveló este aspecto de las cosas vivientes, fue trasladado a su lugar de origen, donde es flagelado a perpetuidad por las olas.*»

En el mismo tono apocalíptico escribe Jámblico, como hemos visto en la primera cita, a cuyo texto precede el siguiente (Jámblico, *Vida Pitagórica*. XXXIV, 246–247, p.141):

> «*Se dice que primero que reveló la naturaleza de la conmensurabilidad e inconmensurabilidad a los indignos de participar de tales conocimientos fue aborrecido* [por la comunidad pitagórica] *hasta el punto de que no sólo lo expulsaron de la vida y de la vivienda en común, sino que incluso le erigieron una tumba como si él, que había sido una vez compañero, hubiese abandonado la vida entre los hombres*. [...] *Otros afirman que la divinidad se enojó contra quien divulgó la doctrina de Pitágoras, pereciendo como un impío en el mar por sacrílego al haber revelado la doctrina de los números irracionales y la inconmensurabilidad*.»

La lectura de los pasajes de Proclo y Jámblico, por muy legendarios que sean –como casi todo lo concerniente a lo pitagórico–, producen un escalofrío místico: la divulgación del fenómeno de la inconmensurabilidad se consideraba un pecado contra lo más sagrado –un grave sacrilegio–, un delito de lesa geometría, acreedor al más terrible castigo divino –ser conducido al lugar de origen, es decir, a la nada, ser desposeído del ser–.

El descubrimiento de la inconmensurabilidad marca un hito en la Historia de la Geometría, porque no es algo empírico, sino puramente teórico. Su aparición señaló el momento más dramático no sólo de la Geometría pitagórica sino de toda la Geometría griega, y fue con seguridad lo que imprimió a la Matemática griega un cambio de rumbo que la convertiría en la obra de ingeniería geométrico-deductiva plasmada en *Los Elementos* de Euclides.

El gran historiador de la Matemática Howard Eves, en su obra en dos volúmenes *Great Moments in Mathematics* (The math. Assoc. of America, Maine,1977) dedica al tema de los inconmensurables dos capítulos que titula *Lecture Five. Precipitation of the first crisis* y *Lecture six. Resolution of the first crisis*. H.Eves escribe (vol.1, p.53):

> *El descubrimiento de números irracionales y magnitudes inconmensurables provocó una considerable consternación en las filas pitagóricas al dar un golpe mortal a su Filosofía que dependía de los números enteros*. [...] *¿Cómo puede ser que el número* $\sqrt{2}$ *dependa de números enteros y no pueda expresarse como razón de dos de ellos*? *El sentido común y la intuición resultan contrariados por la contrapartida geométrica del hallazgo: –existen segmentos que no pueden ser medidos por una unidad común–. Pero toda la teoría de la proporción pitagórica y de figuras semejantes se basaba en esta presunta obvia asunción, de modo que una extensa parte de la geometría pitagórica quedaba invalidada de repente. Se precipitó una seria crisis de fundamentos en la Matemática. Tan grave fue el escándalo lógico que se desplegaron enormes esfuerzos por mantener el asunto en secreto y una terrible leyenda emergió sobre el que lo reveló a los extraños, el pitagórico Hipasos de Metaponto, que, según unos, pereció en el mar por impiedad, y, según otros, fue desterrado de la comunidad pitagórica y se le erigió una tumba como si hubiera muerto*.»

La imposibilidad de calcular de forma aritmética exacta la diagonal del cuadrado en función del lado, es decir la imposibilidad empírica y numérica de resolver el problema de la «*duplicación del cuadrado*» (diálogo de Platón el *Menón*, 82d–83e) implicaría que había que hacer algo distinto. El espíritu griego no se arredrará ante la dificultad y pasará al ataque. Renunciando a la exactitud aritmética y trascendiendo lo empírico replanteará el problema soslayando la presencia temible e inexorable del infinito mediante la construcción geométrica. La incalculabilidad aritmética de ciertas medidas, pronto de la casi generalidad de las medidas, ya que los inconmensurables aparecían en otros muchos campos de la Geometría, por ejemplo, en la relación entre lado y altura del triángulo equilátero o entre la circunferencia y el diámetro trajo la primera crisis de fundamentos en la Historia de la Matemática, pero fue la cuna de la Geometría griega a través de la emergencia de la demostración, uno de los componentes esenciales del *milagro griego* en Matemáticas.

La inconmensurabilidad entre la circunferencia y el diámetro es comentada por Aristóteles con estas palabras (*Metafísica*. Libro I, Cap.2, 983a):

> «*Sobre la inconmensurabilidad del diámetro respecto de la circunferencia a todos nos parece admirable que una cosa no sea medible por medio de otra que es divisible aún en partes muy pequeñas,* [...]. *Nada causaría más asombro a un geómetra que el ver que la relación del diámetro a la circunferencia resultaba conmensurable*.»

Las circunstancias concretas que rodearon el primer reconocimiento de la existencia de los inconmensurables son tan desconocidas como la fecha en que tuvo lugar el descubrimiento. Los análisis de las escasas fuentes históricas de la Geometría griega dieron lugar en la antigüedad a leyendas como las relatadas por Proclo y Jámblico, y en el pasado siglo los historiadores P.Tannery, H.G.Zeuthen, T.Heath, B.L.van der Waerden, S.Maracchia, W.Knorr, C.Eggers, R.Mondolfo, K. von Fritz, C.Boyer, y otros, han establecido diversas teorías polémicas y cronologías al respecto.

Aunque Proclo –en sus *Comentarios al Libro* I *de los Elementos de Euclides*–, atribuye al propio Pitágoras la cuestión inconmensurable cuando escribe que este filósofo «*descubrió la dificultad de los números irracionales*», suele admitirse que el hallazgo apareció hacia el año 480 a.C. por el pitagórico Hipasos de Metaponto. El descubrimiento pudo tener lugar al intentar reiteradamente de forma empírica encontrar una unidad que permitiera medir, de manera exacta, simultáneamente la diagonal y el lado del cuadrado –equivalentemente la hipotenusa y un cateto de un triángulo rectángulo isósceles– o bien la diagonal y el lado de un pentágono regular. Tras la publicación del artículo de Kurt von FRITZ, *The discovery of incommensurability by Hippasus of Metapontum* (Annals of Mathematics, 46, 242-64, 1945), parece imponerse la hipótesis del pentágono, como veremos más adelante.

Contextos matemáticos de la inconmensurabilidad de $\sqrt{2}$ y $\sqrt{5}$

Si el descubrimiento de la inconmensurabilidad hubiera sido a través de la diagonal del cuadrado, $\sqrt{2}$ sería la primigenia magnitud inconmensurable de la historia, mientras que, si hubiera sido a través de la sección áurea entre diagonal y lado del pentágono regular habría sido, como veremos, $\sqrt{5}$.

Veamos en un lenguaje actual una aproximación técnica matemática a lo que pudieron ser las primeras demostraciones de inconmensurabilidad del Pitagorismo, con base en el cuadrado y el pentágono regular, equivalentes, respectivamente, a la irracionalidad de las raíces $\sqrt{2}$ y $\sqrt{5}$.

La inconmensurabilidad de $\sqrt{2}$

- **Demostración aritmética de la inconmensurabilidad de $\sqrt{2}$**

  Sea p/q una fracción irreducible tal que $(p/q)^2=2$.

  Se verifica:

  $p^2/q^2=2$; $p^2=2q^2$,

  de modo que p^2 (y por tanto p) es un número par;

  es decir: $p=2s$,

  de donde $2q^2=p^2=(2s)^2=4s^2$.

  Así pues: $q^2=2s^2$,

  de modo que q^2 (y por tanto q) es un número par;

  es decir : $p=2r$.

El carácter par de p y q contradice la hipótesis de que p/q es una fracción irreducible.

En consecuencia no puede existir ningún segmento cuyo cuadrado sea 2.

El método indirecto por reducción al absurdo de esta demostración, hace improbable que ésta fuera la base del descubrimiento pitagórico original de los inconmensurables.

La demostración aritmética de la inconmensurabilidad de $\sqrt{2}$ exhibida, equivalente según el *Teorema de Pitágoras* a la inconmensurabilidad de la diagonal de un cuadrado con respecto al lado –que debe ser medida por un segmento cuyo cuadrado sea 2–, se ha interpolado en los textos apócrifos de *Los Elementos* de Euclides como proposición X.117.

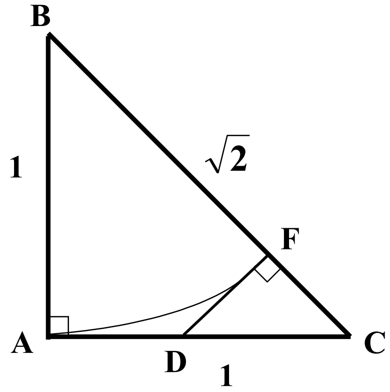
La demostración esta basada en la distinción entre lo par y lo impar y ya había sido aludida por Aristóteles (*Lógica*. *Analítica Primera*. Libro I, Cap. 23, 41a):

> «*Se demuestra que la diagonal del cuadrado es inconmensurable con los lados, mostrando que si se supone que es conmensurable, los números pares serán igual a los números impares*.»

El eminente matemático ingles G.H. Hardy escribe un auténtico panegírico de esta demostración en su conocida obra *Apología de un matemático*, donde describe su concepción de la Matemática (Nivola, Madrid, 1999. p.91):

> «[La demostración aristotélica de la irracionalidad de $\sqrt{2}$] *es un teorema simple, tanto en su idea como en su ejecución, pero no hay duda de que es un teorema de la mayor categoría. Conserva la frescura y el significado del momento de su descubrimiento; y los más de 2000 años transcurridos no lo han desgastado un ápice*.»

- **Demostración geométrica de la inconmensurabilidad de $\sqrt{2}$**



Supongamos que existe un segmento HK que divide a los segmentos AB (cateto) y a BC (hipotenusa),
es decir: $HK \mid AB$, $HK \mid BC$.
De la geometría de la figura se deduce:

- **AB = FB [radios]**
- **FD = AD [tangentes]**
- **FC = BC–AB (1)**
- **FD = FC [Δ(FDC) isósceles (<D=<B=<C)]**
- **DC = AC–AD = AC–FD = AC–FC (2)**

De (1) y (2) se deduce: $HK \mid FC$, $HK \mid DC$

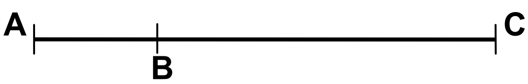
Este proceso se puede reiterar indefinidamente, con el resultado de que se van obteniendo triángulos isósceles que pueden llegar a ser «*tan pequeños como se quiera*», en los que el segmento fijo HK divide simultáneamente al cateto y a la hipotenusa, lo cual es manifiestamente imposible. Esto lleva a la conclusión de que no puede haber una unidad de longitud que mida simultáneamente el cateto y la hipotenusa del triángulo, es decir, estos dos segmentos no son conmensurables.

La inconmensurabilidad de $\sqrt{5}$

Hay otros caminos geométricos, quizá más acordes con los usos pitagóricos, por los que pudo llegar a desvelarse el fenómeno de la inconmensurabilidad. Es probable que la cuestión se suscitara con la consideración de la *sección áurea* y del *pentagrama místico* pitagórico.

Euclides introduce la noción de *sección áurea* en la Definición VI.3 de *Los Elementos*:

> «*Se dice que un segmento está dividido en media y extrema razón cuando el segmento total es a la parte mayor como la parte mayor es a la menor*.»



$$\frac{AC}{BC} = \frac{BC}{AB}$$

Tomando AB=1, BC=x, la razón áurea se escribirá: (x+1)/x = x/1. Al número x se le llama el «*número de oro*». Tradicionalmente se le representa por la letra griega ϕ. Así pues, ϕ es la solución positiva de la ecuación de la ecuación: $\phi^2 - \phi = 1$, es decir: $\phi = (1+\sqrt{5})/2$.

Veamos, como en el caso de $\sqrt{2}$, sendas orientaciones (aritmética y geométrica) de la inconmensurabilidad de $\sqrt{5}$ (*Euclides* XIII.6). La aritmética es equivalente a la inconmensurabilidad del *número de oro* ϕ, y la geométrica utiliza la geometría del *Pentagrama pitagórico*.

Como se sabe, si trazamos las cinco diagonales de un pentágono regular, estas diagonales determinan un segundo pentágono regular más pequeño, y a su vez las diagonales de este segundo pentágono forman un tercer pentágono regular que es más pequeño aún. Este proceso puede repetirse indefinidamente, con el resultado de que se van obteniendo pentágonos que pueden llegar a ser «*tan pequeños como se quiera*»

- **Demostración aritmética de la inconmensurabilidad de $\sqrt{5}$**

[Basta demostrar la inconmensurabilidad del número áureo: $\phi=(1+\sqrt{5})/2$]

Supongamos $\phi=p/q$ fracción irreducible [mcd(p,q)=1].

ϕ es solución de la ecuación $\phi^2 - \phi = 1$.

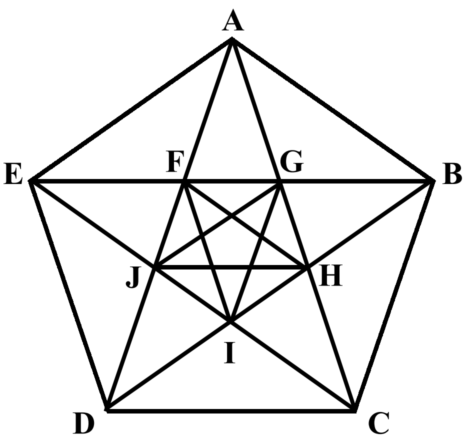
$\phi^2 - \phi = 1$, por tanto se verifica:

$(p/q)^2 - (p/q)=1$, de donde resulta: $p^2 - pq=q^2$.

Luego $p(p-q)=q^2$, es decir: p divide a q^2. Por tanto según un Teorema de Euclides (*Elementos*, VII.30) p también divide a q .

El último resultado contradice la hipótesis.

- **Demostración geométrica de la inconmensurabilidad de $\sqrt{5}$**



Supongamos que existe un segmento PQ que divide a la diagonal EB y al lado AB del primer pentágono, es decir: $PQ \mid EB$, $PQ \mid AB$.

De la geometría de los pentágonos resulta:

- **FBCD es un rombo, luego se verifica: FB=DC=AB.**
- **EFHJ es un rombo, luego se verifica: EF=FH.**

De las relaciones anteriores se obtiene:

- **FH=EF=EB–FB=EB–AB,**
- **FG=EB–2EF=EB–2(EB–AB)=2AB–EB.**

Luego $PQ \mid FH$, $PQ \mid FG$.

De modo que si un segmento fijo PQ divide a la diagonal y al lado del primer pentágono, también divide a la diagonal y al lado del segundo pentágono. Este proceso se puede reiterar indefinidamente, obteniéndose pentágonos que pueden llegar a ser «*tan pequeños como se quiera*», en los que el segmento fijo PQ divide simultáneamente a la diagonal y al lado, lo cual es manifiestamente imposible. Así pues, no puede haber una unidad de longitud que mida la diagonal y el lado de un pentágono, es decir, estos dos segmentos son inconmensurables.

Además resulta:

> **«*Las diagonales de un pentágono se cortan en proporción áurea siendo el segmento mayor igual al lado de pentágono*» (*Euclides*, XIII.8).**
>
> **$\Delta ABE \approx \Delta GAB \Rightarrow EB/AB=AB/BG$ [Euclides VI.4].**
>
> **$AB=EG \Rightarrow EB/EG=EG/GB$.**

Según algunos historiadores de la matemática ésta debió ser la primera aproximación histórica al fenómeno de la inconmensurabilidad.

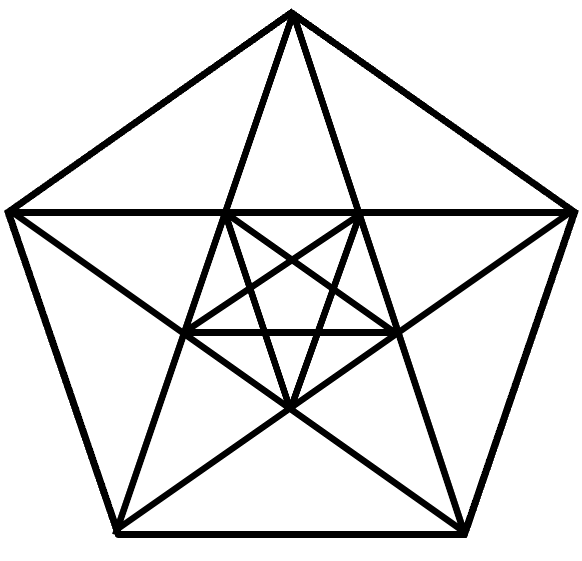
LA HIPÓTESIS DEL PENTÁGONO Y EL PENTAGRAMA EN EL DESCUBRIMIENTO PITAGÓRICO DE LA INCONMENSURABILIDAD

Kurt von Fritz. *The discovery of incommensurability by Hippasus of Metapontum* (Annals of Mathematics, 46, 242-64, 1945).

El descubrimiento de la inconmensurabilidad es uno de los más asombrosos y trascendentales logros de la primitiva matemática griega . (p. 242)

Sabemos que los pitagóricos usaban el pentagrama, es decir, el pentágono regular con los lados prolongados hasta el punto de intersección, como símbolo de reconocimiento. (p. 256).

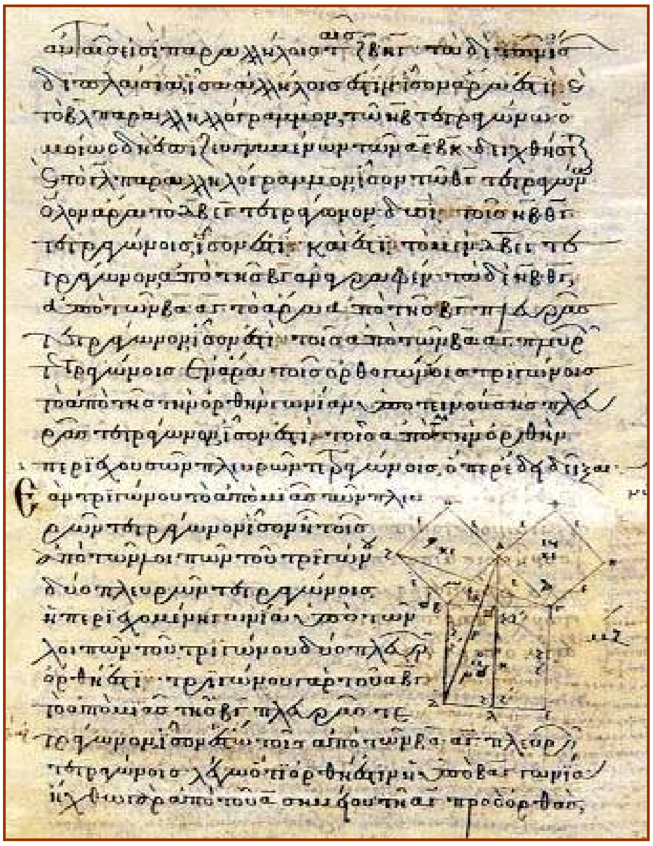
Hipasos debió intentar encontrar números y razones incorporados en el pentagrama y el pentágono regular [...] únicas figuras geométricas en las que la inconmensurabilidad puede ser fácilmente probada. Había un antiguo método, conocido por los artesanos como regla empírica muchos siglos antes del comienzo de la filosofía y de la ciencia en Grecia, a saber, el método de la sustracción recíproca, por el cual se halla la mayor medida común. Naturalmente no es posible descubrir la inconmensurabilidad en la forma como lo practicaban los artesanos, pero sí trazando todas las diagonales dentro del pentágono, que forman otro pentágono regular en el centro, con el que se puede practicar la misma operación, y así hasta el infinito, y por tanto reiterar de forma indefinida el proceso de sustracción recíproca, de modo que no puede haber una medida común de la diagonal y el lado del pentágono. Así pues, es aparente casi a primera vista que la relación entre la diagonal y el lado no puede ser expresada en números enteros, por grandes que sean. [...]. (p. 257).

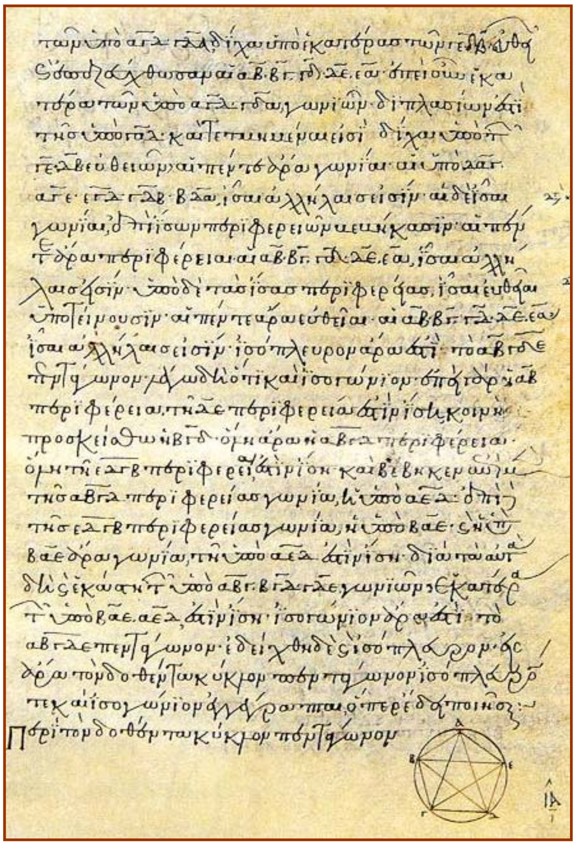


En el curso de la sustracción recíproca podemos ver que la diferencia entre la diagonal y el lado del pentágono más grande es igual a la diagonal del pentágono más pequeño, y la diferencia entre el lado del pentágono más grande y la diagonal del pentágono más pequeño es igual al lado del pentágono más pequeño, y a su vez la diferencia entre la diagonal del pentágono más pequeño y su lado es igual a la diagonal del siguiente pentágono más pequeño, y así sucesivamente hasta el infinito. Ya que cada nuevo pentágono regular se obtiene trazando diagonales, es evidente que el proceso de sustracción recíproca se puede seguir realizando indefinidamente, y por tanto no se puede encontrar ninguna medida común de la diagonal y el lado del pentágono regular se puede encontrar. (p. 258)

El descubrimiento de la inconmensurabilidad debió provocar una enorme impresión en los círculos pitagóricos porque de golpe destruía la creencia de que todo podía ser expresado en términos de números enteros, lo que constituía la base de toda la Filosofía pitagórica. Esta impresión es claramente reflejada en algunas leyendas que aseguran que Hipasos fue castigado por los dioses por haber hecho público el terrible descubrimiento. (p. 260).

TESOROS DE LA GEOMETRÍA PITAGÓRICA RELACIONADOS CON LA INCONMENSURABILIDAD





El *Teorema de Pitágoras* (Euclides, I.47) y el *Pentagrama místico* (Euclides, XIII.8) en los folios 26 recto y 66 recto del manuscrito ϕ-III-5 de El Escorial, uno de los más antiguos que se conservan (siglo XI).

La celebre frase del *Mysterium Cosmographicum* (1596) de Kepler: «*La Geometría tiene dos grandes tesoros, uno es el Teorema de Pitágoras y el otro es la Sección Áurea; si el primero es una joya de oro, el segundo viene a ser una piedra preciosa*», se convierte en emblemática al ser ambos tesoros los consignatarios históricos de la inconmensurabilidad.

1. **La Geometría como una de las *Artes Liberales* del *Quadrivium* pitagórico representada en un mosaico del suelo de la Catedral de Colonia. La Geometría presenta una ilustración del *Teorema de Pitágoras* queriendo dar a entender que se trata del Teorema más importante y fascinante de toda la ciencia geométrica.**
2. **El Pentagrama místico pitagórico en la Iglesia de San Juan de Castrogeriz (Burgos).**

CITAS SOBRE LOS INCONMENSURABLES

1. Pitágoras [...] investigó los teoremas de un modo inmaterial e intelectual y descubrió la dificultad de los números irracionales. **Proclo. *Comentario al Libro I de los Elementos de Euclides*.**
2. El descubrimiento de la inconmensurabilidad por Pitágoras debió causar, en Geometría, un verdadero escándalo lógico, y, para superarlo, se tendió a restringir tanto como fuera posible el empleo del principio de semejanza, esperando que se llegara a establecer sobre una teoría de la proporcionalidad independiente de la hipótesis de la conmensurabilidad **[La Teoría de la Proporción del Eudoxo del Libro V de Los Elementos de Euclides]. P.Tannery. *La géométrie grecque*. Gauthier-Villars. París,1887. p.98.**
3. El descubrimiento de la inconmensurabilidad es uno de los más asombrosos y trascendentales logros de la primitiva matemática griega [...]. El hallazgo debió provocar una enorme impresión en los círculos pitagóricos porque de golpe destruía la creencia de que todo podía ser expresado en términos de números enteros, lo que constituía la base de toda la Filosofía pitagórica. Esta impresión es claramente reflejada en algunas leyendas que aseguran que Hipasos fue castigado por los dioses por haber hecho público el terrible descubrimiento. **K.von Fritz. *The discovery of incommensurability by Hippasus of Metapontum*. Annals of Mathematics, 46, 242-64, 1945. pp.242, 260.**
4. Eudoxo está en la cumbre de las matemáticas griegas por su Teoría de las Proporciones. [...]. Eudoxo ha encontrado el primer método lógicamente satisfactorio, que Euclides ha reproducido en el Libro V de sus Elementos, para resolver los problemas de la continuidad, los enigmas del infinito y los dédalos de los números irracionales estos problemas. **E.Bell. *Les grands mathématiciens*. Payot. París, 1950, pp.36–37.**
5. El descubrimiento pitagórico de los irracionales mostró su incompatibilidad con su metafísica [...]. La inconmensurabilidad de la diagonal y el lado de un cuadrado planteaba a los pitagóricos una tremenda alternativa: de mantener su metafísica, mutilaban la geometría; de mantener la geometría anulaban su metafísica. **Arquímedes: *El Método*. Introd. y notas de J. Babini. Eudeba, Buenos Aires, 1966, p.14.**
6. El descubrimiento de números irracionales y magnitudes inconmensurables provocó una considerable consternación en las filas pitagóricas al dar un golpe mortal a su Filosofía que dependía de los números enteros. [...]. Tan grave fue el escándalo lógico que se desplegaron enormes esfuerzos por mantener el asunto en secreto y una terrible leyenda emergió sobre el que lo reveló a los extraños, el pitagórico Hipasos de Metaponto, que, según unos, pereció en el mar por impiedad, y, según otros, fue desterrado de la comunidad pitagórica y se le erigió una tumba como si hubiera muerto. **H.Eves. *Great Moments in Mathematics*. The math. Assoc. of America, 1977. Vol.1. Cap.6, p.53.**
7. Para los pitagóricos, que fueron sus autores, el descubrimiento de las magnitudes irracionales debió de ser, si no un escándalo, sí por lo menos una decepción. Demostrar el carácter informulable *(alogon)* de magnitudes fáciles de construir y cuya existencia espacial resultaba evidente, era poner fin a un gran sueño de Aritmética universal. **J.Itard.** La Ciencia helénica: Platón **(en *Historia general de las Ciencias*. Orbis. Barcelona, 1988, vol.1, Lib.1, cap.3, p.279). R.Taton (compilador).**
8. El sensacional e indeseado descubrimiento de los irracionales, que parecía obra de espíritus malignos destinada a destruir un sueño aritmético maravilloso, abriría más tarde el camino de vertiginosos descubrimientos matemáticos. [...]. El presunto castigo divino para quien divulgó el secreto de los irracionales es la más específicamente helénica de la leyendas. **E.Colerus. *Breve historia de las Matemáticas*. Doncel, Madrid, 1972. Vol.1, cap.1. pp 29, 30.**
9. La razón del escándalo desatado por la aparición de las magnitudes inconmensurables está en que la matemática pitagórica tenía como principio que «todo es número», o sea que «el número es la esencia de todas las cosas que existen», donde «número» es sólo número entero, por lo cual la imposibilidad de medición numérica venía a hacer estremecer los cimientos filosóficos de la doctrina pitagórica. **C.Eggers. *El nacimiento de la Matemática en Grecia*. Eudeba, Buenos Aires, 1995. Cap. 5, p.128.**

10. La principal contribución de Platón a la ciencia, en opinión de Popper, nace de su profunda comprensión del problema de los irracionales y su consiguiente sustitución de las concepciones aritméticas del Pitagorismo por una concepción geométrica. **W.Guthrie.** ***Historia de la Filosofía griega*. 1990. Vol 5. p. 298.**

11. Por desgracia para Pitágoras el teorema del triángulo rectángulo le condujo al descubrimiento de los inconmensurables, que parecía refutar toda su Filosofía. [...]. Esto convenció a los matemáticos griegos que la Geometría debía establecerse independiente de la Aritmética. **B.Russell.** ***Historia de la Filosofía occidental*. Austral. Madrid,1995. Vol.1. Lib.1. Cap.3. p.73**

12. Para el alma antigua el principio de lo irracional, esto es, la destrucción de la serie estatuaria de los números enteros, representantes de un orden perfecto del mundo, fue como un criminal atentado a la divinidad misma. [...]. La transformación de la serie discontinua de los números en una serie continua, pone en cuestión no sólo el concepto «antiguo» del número, sino hasta el concepto del mundo antiguo. **O.Spengler.** ***El sentido de los números* (en *La decadencia de Occidente*. Cap.I.1). Austral, Madrid, 1998. P.152.**

13. **[La demostración aristotélica de la irracionalidad de** $\sqrt{2}$ **]** es un teorema simple, tanto en su idea como en su ejecución, pero no hay duda de que es un teorema de la mayor categoría. Conserva la frescura y el significado del momento de su descubrimiento; y los más de 2000 años transcurridos no lo han desgastado un ápice. **G.H. Hardy.** ***Apología de un matemático*, Nivola, Madrid, 1999. p.91**

14. Según la tradición, el descubrimiento de la irracionalidad por los pitagóricos, por lo menos en cierto tiempo y en ciertos ambientes, fue considerado como un monstruoso conflicto entre las sugestiones de la experiencia y las de la deducción lógica. Acentúa también la tradición que tal descubrimiento habría sido revelado a los no iniciados de la secta pitagórica por Hipasos de Metaponto, el cual por este crimen habría sido matado por los dioses o por sus compañeros. **B.Levi.** ***Leyendo a Euclides*. Zorzal, Buenos Aires, 2001. Cap. 1. pp70–71.**

15. El lado y La diagonal de un cuadrado no admiten ninguna medida común. Si un número representa al uno, ningún número puede representa al otro. Son inconmensurables. Así pues, es imposible conocerlos numéricamente juntos. Y sin embargo, ante nuestros ojos, juntos, se muestran. Lo real, aquí, no es discutible, y excede manifiestamente la capacidad numérica. [...]. Esas magnitudes geométricas escapan a la numericidad. [...] Para reconstruir el edificio dañado, los griegos desarrollaron una teoría interna referente sólo a las magnitudes geométricas. Establecieron proporciones entre estas magnitudes, pero se negaron a llamarlas números. [...]. Será preciso aguardar casi dos milenios para que, por el camino real de una definición, estos entes se integren en el imperio de los números. **D.Guedj.** ***El imperio de las cifras y los números*. B.S.A. Barcelona, 1988. Cap.V, p.85.**

16. La supuesta conmensurabilidad de los segmentos era una cuestión crítica para los pitagóricos, no sólo porque empleaban esta idea en sus demostraciones sobre figuras semejantes sino también porque parecía apoyar su visión filosófica del papel central de los números enteros. [...]. El descubrimiento hizo trizas las demostraciones pitagóricas basadas en la conmensurabilidad de todos los segmentos. Deberían transcurrir casi dos siglos hasta que el matemático Eudoxo encontrara un modo de dirimir la cuestión de la semejanza mediante la conmensurabilidad. Además, el descubrimiento supuso un impacto perturbador a la supremacía de los números enteros, pues si no todas las cantidades eran conmensurables, los números enteros eran inadecuados para representar las razones de todas las longitudes geométricas. En consecuencia, el descubrimiento establecía firmemente la superioridad de la geometría respecto de la aritmética en todas las Matemáticas griegas a partir de entones. **W.Dunham.** ***Viaje a través de los genios*. Pirámide. Madrid, 1992. pp.31,32**

17. La aparición del inconmensurable debía forzosamente implicar no ya quiebra en la aritmética y la geometría, sino también quiebra en la ciencia y la filosofía. [...]. El descubrimiento por el pitagórico del irracional equivale para él a emergencia pura y simple de la sinrazón. [...]. La crisis abierta por el descubrimiento de la irracionalidad tuvo como consecuencia que la geometría fuera en parte privilegiada en detrimento de la aritmética. **V.Gómez Pin.** ***La tentación pitagórica*. Síntesis, Madrid, 1999. Cap. 2.3, pp.52,53,56.**

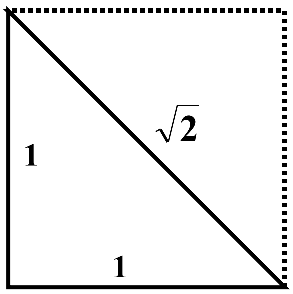
Consideraciones filosóficas sobre la inconmensurabilidad

Para los pitagóricos el gran sistema del mundo, el ser, la forma y la acción de todas las cosas son una consecuencia natural de los números. Estos determinan el nexo de unión de todas los entes y la mecánica del universo entero, son la base del espíritu y el único medio por el cual se manifiesta la realidad. Esta doctrina pitagórica se llama *misticismo numérico*, porque atribuye a los números, no sólo un carácter sagrado, sino también una realidad sustancial descriptiva tanto de los aspectos cualitativos como de los aspectos físicos de las cosas. Los pitagóricos vivieron imbuidos de un efervescente entusiasmo místico hacia los números, hasta el punto de que Filolao de Metaponto –el pitagórico favorito de Aristóteles y uno de los más influyentes sobre Platón– llegó a afirmar: «*Todo lo cognoscible tiene un número, pues no es posible que sin número nada pueda ser concebido ni conocido*.»

Pues bien, al número uno le conciben como el principio y la causa de todo. Es la verdadera *esencia de todas las cosas* y el fundamento de cuanto existe. Símbolo del Dios único, expresado en latín por *Solus* –de donde deriva la palabra Sol–. Símbolo de la razón suprema, asociada al concepto de Dios Creador, supremo paradigma del Bien y la Belleza. Generador de todos los números y de todas las dimensiones. Para Filolao «*el uno es el Padre de los Seres, Demiurgo del mundo, artífice de la permanencia de las cosas*.»

Para los pitagóricos todo procedía de la unidad y a ella se podía reconducir todo. De ello dependía la inteligibilidad de las cosas. El orden pitagórico se basaba en la finitud. Toda pluralidad como fruto de la unidad es finita, está formada de números enteros y también toda fragmentación o división de la unidad –un medio [1/2], un tercio [1/3],...– procede de ellos y por tanto de la unidad, y a ella revierten ya que dos veces un medio es igual a uno, tres veces un tercio es igual a uno, etc. De forma análoga a cualquier racional p/q se le puede hacer retornar a la unidad pitagórica mediante operaciones de fragmentación y adición.

Era natural, pues, la terrible inquietud que introduce en el mundo pitagórico la emergencia del inconmensurable como ser que se escapa al dominio de la unidad ya que ninguna operación entera con él es capaz de retornarle al origen de todo que es la unidad o mónada pitagórica. El inconmensurable se le llama irracional porque no se puede expresar como razón de dos enteros, pero sobre todo porque como algo ininteligible, está fuera del *Logos*, es –*alogon*–, es decir, representa la sinrazón.

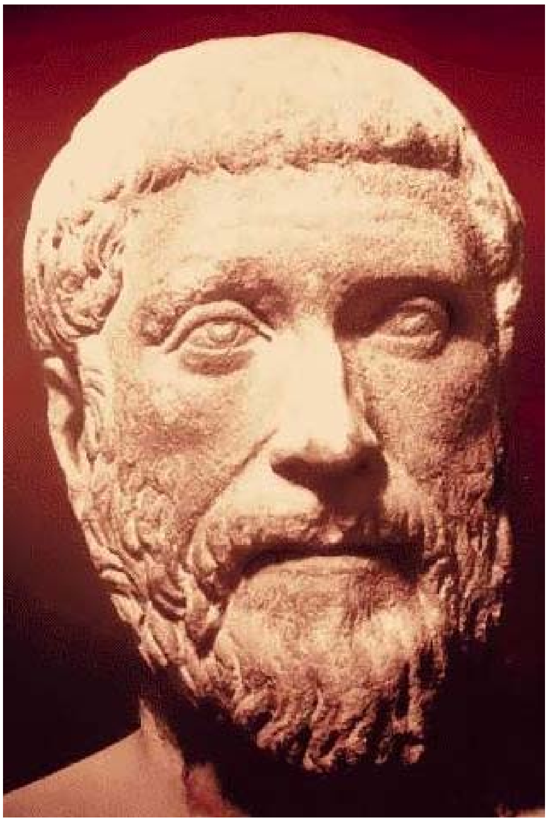


La consideración del cuadrado de lado la unidad y su diagonal conduce a que haya que concebir al ente $\sqrt{2}$ geométricamente inteligible, de lo contrario habría que poner en entredicho el *Teorema de Pitágoras* que es la base de multitud de teoremas geométricos. Pero los pitagóricos no conocían más números que los enteros y racionales, que tan bien explicaban su cosmología, lo que les impedía concebir otro tipo de número. Por tanto la naturaleza irracional de $\sqrt{2}$ ponía en entredicho las sagradas concepciones pitagóricas.

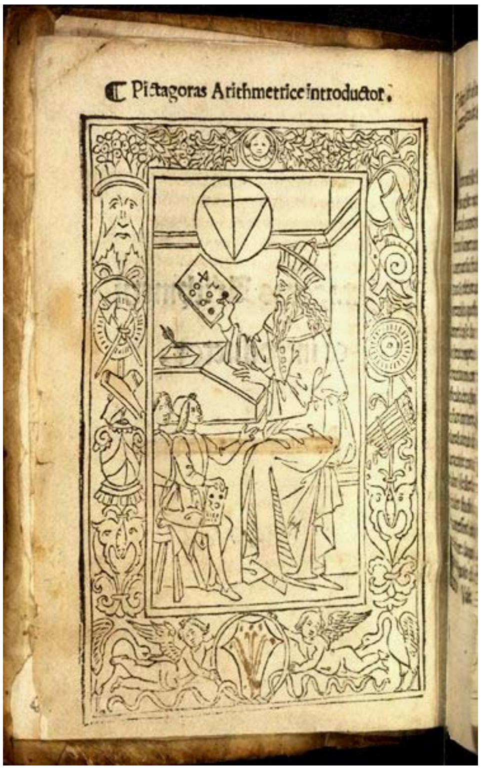
El ente $\sqrt{2}$ es ininteligible en la Aritmética racional pitagórica, porque su consideración como fracción de enteros conduce a una tremenda contradicción aritmética –$\sqrt{2}$ resulta ser p/q con p y q enteros pares y primos entre sí–, así que la mónada pitagórica es incapaz de engendrar $\sqrt{2}$, y ningún tipo de operación aritmética retorna $\sqrt{2}$ al origen, a la mónada. La entidad $\sqrt{2}$ se revela como irreductible al trato numérico pitagórico, pero es perfectamente representable e inteligible en el orden geométrico ya que tomando de forma convencional un determinado segmento de recta como unidad, cuatro de ellos se vinculan en un cuadrado, de modo que el temible $\sqrt{2}$ se obtiene como una mera construcción geométrica de una gran sencillez, la diagonal de un cuadrado, conocido el lado.

Así pues la unidad aritmética se revela impotente para medir la entidad $\sqrt{2}$ y debe ser la unidad geométrica –el segmento unidad– quien cumpla la función de medición; el contar aritmético cede por incapacidad ante la medida geométrica. El abismo entre lo discreto y lo continuo, entre finito e infinito, que ha creado la aparición del inconmensurable obliga a renunciar a medir siempre con exactitud y privilegiar la Geometría sobre la Aritmética.

LOS INCONMENSURABLES QUIEBRAN LA FILOSOFÍA PITAGÓRICA



Pitágoras. Museo Capitolino de Roma.



Portada de la *Aritmética* de F.Calandri (Florencia, 1492) representando a Pitágoras como maestro de Aritmética.

La cosmovisión pitagórica establecía que toda la naturaleza estaba regida por un orden matemático y acuñaba el término *Cosmos* para describir un universo armonioso y ordenado por unas leyes cognoscibles e inteligibles por el hombre a través de número, germen elemental que como «*esencia de todas las cosas*» era el principio generador en el macrocosmos y el microcosmos. Si el número es el instrumento radical de intelección del mundo –el físico y el espiritual–, la aparición del inconmensurable –elemento que al está fuera de la inteligibilidad– produce un disturbio radical en el orden numérico que resquebraja los cimientos aritméticos de la Filosofía pitagórica, que eran principios racionales basados en el número entero. El descubrimiento de los inconmensurables es un desafío lanzado por la naturaleza a la Aritmética que refuta la creencia pitagórica en la omnipotencia de los números. A este respecto son muy ilustrativas las reflexiones de V.Gómez Pin en su obra *La tentación pitagórica* (Síntesis, Madrid, 1999, Cap. 2.3, pp. 52–56):

> «*El Pitagorismo afirma con radicalidad que los números encierran respuesta a todos los interrogantes relativos tanto al orden y disposición de las cosas naturales como al orden y disposición del espíritu.* **[Para los pitagóricos]** *los números vienen a ser lo sagrado íntimamente vinculado a la razón, lo sagrado para quien no escinde confrontación al origen y deseo de saber: los números son lo sagrado porque sagrado es para el pitagórico lo que explica y los números se le aparecen muy poderosos como elemento de explicación.*
>
> *Se entiende así la conmoción que supondría el descubrimiento de fragmentos cuantitativos que no tenían sentido en el orden numérico conocido por los pitagóricos. La aparición de tales entidades debía forzosamente implicar no ya quiebra en la aritmética y la geometría, sino también quiebra en la ciencia y la filosofía como tales, en la confianza de que hubiera realmente orden natural y orden ciudadano sostenidos en principios racionales.* **[...].(p. 52).**
>
> *El descubrimiento por el pitagórico del irracional raíz cuadrada de dos equivale para él a emergencia pura y simple de la sinrazón. Y así el destino de ser ahogado que la leyenda evoca, no es el resultado de una condena por haber revelado el secreto, sino expresión de que, perdido el juicio, se sumerge por sí mismo en el mar del devenir.* **[...]. (p. 53).**
>
> *Esta imposibilidad* **[de expresar raíz cuadrada de dos en forma de fracción]** *dejó necesariamente atónito y acaso espantado al pitagórico. Pues no podía negar que* $\sqrt{2}$ *era un número, ya que entonces dejaría de tener valor general el Teorema de Pitágoras , ni podía admitir que lo fuera, pues se trataba entonces de un número contradictorio. Entiéndase bien: lo contradictorio es que se trate de un número irracional, pues el pitagórico no conocía más números que los racionales y su explicación del universo le impedía suponer que hubiera otros.* **[...]. (p. 55).**
>
> *La crisis abierta por el descubrimiento de la irracionalidad de raíz cuadrada de dos tuvo como consecuencia que la geometría fuera en parte privilegiada en detrimento de la aritmética. Pues irreductible a la aritmética racional,* $\sqrt{2}$ *es, sin embargo, perfectamente designable o representable en el orden geométrico* **[aplicando el *Teorema de Pitágoras*]** *sustentado en esa misma aritmética racional.* **[...].** *Cabría, pues, decir que donde el contar fracasa sí triunfa la medida.* **(p. 56).»**

La definición pitagórica de Proporción

En la Matemática actual las razones inconmensurables se expresan mediante números irracionales. Los babilonios y los egipcios habían trabajado con tales números, a base de aproximaciones, aunque sin la conciencia de la falta de exactitud, es decir, sin la constancia de la diferencia radical entre razones conmensurables e inconmensurables. En cambio para los griegos la palabra número significa «*número entero positivo*»; una fracción a/b indicaría no un número racional sino una relación entre los números enteros a y b, «*la razón*» entre a y b. En sentido actual sería un par ordenado de números.

Para los pitagóricos dos razones a/b, c/d, se dice que son «*proporcionales*»:

> a/b=c/d, cuando existen enteros p,q,m,n, tales que a=mp, b=mq, c=np, d=nq;

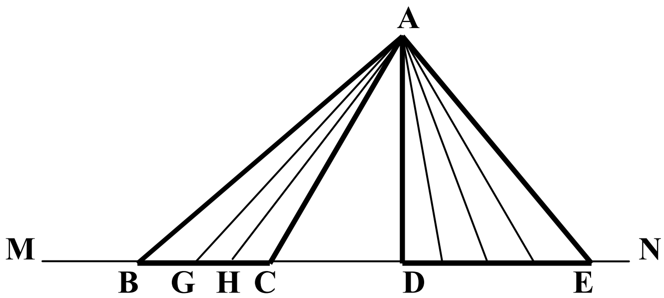
por ejemplo: 12/15=16/20, porque 12 contiene cuatro de las cinco partes de 15, al igual que 16 contiene cuatro de las cinco partes de 20.

A partir de esta base se desarrolló inicialmente la teoría pitagórica de la proporcionalidad. La visión de número como tamaño se aplicó a las magnitudes geométricas: longitudes, áreas y volúmenes, en la creencia de que dos segmentos de línea eran siempre conmensurables, es decir que existía una unidad común de la que ambos serían múltiplos. De esta forma la doctrina de razones enteras y proporciones se podía extender a longitudes, áreas y volúmenes de figuras simples como segmentos, rectángulos y paralelepípedos.

Con el descubrimiento de los inconmensurables quedaban afectadas y debían ser reconstruidas todas las pruebas pitagóricas de los teoremas que utilizaran proporciones. Por ejemplo para demostrar la Proposición VI.1 de *Los Elementos* de Euclides:

> «*Los triángulos que tienen la misma altura, son entre sí como sus bases*»,

los primeros pitagóricos actuarían de la siguiente manera:



Sean los triángulos ABC y ADE, con bases BC y DE sobre la recta MN. BC y DE tendrán alguna unidad común de medida; sea GH contenido p veces en BC y q veces en DE. Marquemos los puntos de división sobre BC y DE y unámoslos con el vértice A.

Los triángulos ABC y ADE quedan divididos respectivamente en p y q triángulos menores, que según la Proposición I.38 de *Los Elementos* («*los triángulos que tienen igual base y altura son equivalentes*») tienen el mismo área. Por tanto la razón de los triángulos ABC/ADE = p/q = BC/DE, como se quería probar.

Es evidente que la aparición de magnitudes inconmensurables invalida la prueba geométrica exhibida en esta proposición y en todas las pruebas pitagóricas en las que haya que comparar razones de magnitudes geométricas. Se explica, pues, el consiguiente secretismo de los pitagóricos sobre la cuestión irracional y la leyenda del castigo por su divulgación ante la amenaza apocalíptica que se cernía sobre la Matemática y la Filosofía pitagóricas. La aparición de la inconmensurabilidad sometió el pensamiento pitagórico a un doble desafío, uno filosófico ya que la irracionalidad atentaba contra el sincretismo aritmético-físico que establecía la preeminencia del número como esencia del Cosmos y otro matemático ya que a partir de entonces en Geometría era imposible medir siempre con exactitud.

Leyendas y conjeturas aparte, se comprende que el descubrimiento de las magnitudes inconmensurables produjera un escándalo lógico en todo el ámbito pitagórico, ya que exigía una revisión a fondo de los fundamentos de su Matemática y su Filosofía. A esta titánica empresa se enfocará la importante labor de Eudoxo de Cnido de la Academia platónica, que resolverá de forma brillante y rigurosa, aunque provisional –durante más de dos mil años–, la antinomia radical entre finito e infinito.

La crisis de los inconmensurables en la Academia platónica

Uno de las cuestiones más interesantes de la Historia de las Matemáticas, aparecida en el horizonte pitagórico medio y que de forma definitiva se consolida en la Academia platónica es el problema de la inconmensurabilidad como origen de la aparición de la demostración. Es absolutamente imposible constatar de forma perceptiva la inconmensurabilidad sobre una figura, es decir, la inconmensurabilidad no es comprobable de forma empírica sino de forma teórica, a través de un acto intelectual puro. Ninguna verificación geométrico–empírica inductiva puede convencer de que no siempre dos segmentos tienen una parte alícuota común. La inconmensurabilidad es un fenómeno que sólo puede concernir a los entes matemáticos ideales y sólo puede ser objeto de demostración, es decir, implica la existencia de demostración –a diferencia de otros resultados como el teorema de Pitágoras para el que hay cientos de pruebas visuales que «*muestran*» su validez–. Por extrapolación a toda la Matemática del fenómeno de la inconmensurabilidad, intrínsecamente vinculado, como vemos, a la demostración, ésta será a partir de entonces quien dará carta de naturaleza a la Matemática. Así pues, a partir del descubrimiento de los inconmensurables, la demostración deductiva, con base en los principios, se consideró necesaria y consustancial con la propia naturaleza de la Matemática, que renuncia a la experiencia física y a los datos aportados por los sentidos como base del conocimiento y establece un paradigma de actuación en Matemática que nunca ha sido sustituido hasta ahora.

En *Los Diálogos* de Platón se advierte la influencia del descubrimiento de los irracionales sobre la Educación y la Filosofía platónica de la ciencia. Teodoro de Cirene (discípulo de Protágoras) a quien Platón reconoce como maestro, demuestra la irracionalidad de las raíces cuadradas de los números naturales que no son cuadrados perfectos desde el 3 al 17, ambos incluidos (diálogo entre Sócrates y Teeteto, en *Platón*, *Teeteto*, 147d). En este *Diálogo* de Platón, Teeteto, además de ponderar a Teodoro como «*geómetra, astrónomo, calculador, músico y maestro en todo lo relativo a la educación*» da unas orientaciones hacia la continuación de su trabajo matemático relativo a los inconmensurables. Por eso se atribuye a Teeteto (según Proclo y Pappus) gran parte del contenido del Libro X de *Los Elementos* de Euclides que trata la clasificación y estudio en forma geométrica de las propiedades de cierto grupo de expresiones irracionales cuadráticas.

En el Libro VII de *Las Leyes* Platón censura –en boca de un ateniense que dialoga con el extranjero Clinias– la ocultación a los jóvenes griegos, en su educación, de la distinción entre magnitudes conmensurables e inconmensurables tachándola de «*ignorancia vergonzosa y ridícula*». Platón opina con una retórica exageración (*Leyes*, 819e–821a):

> «[...] *Se me ha revelado muy tardíamente nuestra habitual deficiencia en este campo de cosas; me quedé enormemente sorprendido y, viendo en ello* [en la citada ocultación] *menos una debilidad humana que una necedad propia de puercos de cría, sentí vergüenza no sólo de mí mismo, sino de toda la raza helena*. [...] *Son temas en los que la ignorancia es una deshonra*, *mientras que su conocimiento, como verdades elementales que son, no es ninguna proeza*. [...] *Son ciencias en las que deben aprender los jóvenes*, *porque ellas no ofrecen ni inconvenientes ni dificultades* [...]. *Será bueno que, por el momento, se incluyan como estudios obligatorios en nuestras leyes, a fin de que no haya en ellas lagunas* [...].»

También en el *Menón* (82b-85b) insiste Platón sobre el tema a propósito del problema de la *duplicación del cuadrado*. Curiosamente Platón utiliza el problema para sustentar la doctrina de la reminiscencia. Sócrates y un esclavo mantienen una conversación, en la que mediante una concatenación de preguntas de aquél, entrelazadas heurísticamente con las respuestas de éste, se resuelve el problema. Las primeras respuestas del esclavo, son de índole aritmética, pero resultando la imaginación aritmética inexacta, Sócrates reconducirá el diálogo induciendo un tratamiento exclusivamente geométrico. Como apuntan los *Diálogos* de Platón, y como veremos a continuación, una de las principales contribuciones de la Academia platónica a la Matemática nace de su profunda comprensión del problema de lo inconmensurable y su consiguiente sustitución de las concepciones aritméticas del Pitagorismo original por presupuestos geométricos.

PLATÓN Y LA ACADEMIA DE ATENAS
MATEMÁTICAS Y FILOSOFÍA

La Academia de Atenas. Fragmento de un fresco de la Biblioteca de El Escorial de P.Tibaldi. 1586.

No se conoce ninguna obra de Platón dedicada exclusivamente a la Matemática, pero en muchos de sus *Diálogos* –el *Menón*, las *Leyes*, el *Teeteto* y sobre todo la *República* y el *Timeo*– el filósofo desarrolla multitud de consideraciones extraídas de la Matemática, para establecer la aristocracia intelectual de esta ciencia. Platón ejerció un decisivo influjo en la Matemática de su tiempo y no sólo por sus elocuentes escritos, plagados de referencias matemáticas, sino sobre todo por sus lecciones y reflexiones orales en la Academia. Con su fundación en 387 a.C., Platón crea el centro más importante de irradiación matemática y filosófica de la Antigüedad, ejerciendo un magnífico mecenazgo de matemáticos, en una institución en la que la Matemática fue siempre considerada como fundamento de todo el saber humano y por tanto como propedéutica esencial para el estudio de la Filosofía.

la Academia platónica reglamentó la aplicación universal del *Método analítico*, en la investigación de problemas geométricos. Con su interés por la metodología del razonamiento y en general por los Fundamentos de la Matemática, Platón sería el primero en sistematizar las reglas de la demostración rigurosa y en comenzar una ordenación de los teoremas según una jerarquía lógica, iniciando un proceso de organización y estructuración deductiva de la Matemática que culminaría Euclides con *Los Elementos*. No sabemos si Platón empezó a establecer las bases axiomáticas pero lo que si se sabe es que desde Platón la demostración deductiva, a partir de los principios, se consideró necesaria y consustancial con la propia naturaleza de la Matemática, estableciendo un paradigma de actuación en Matemática que nunca ha sido relevado hasta ahora. Asimismo, *La Academia* de Platón se planteó ya de forma clara la cuestión de si un problema dado tenía solución o no sobre las bases de las verdades conocidas y de las hipótesis admitidas.

Entre los matemáticos más eminentes de *La Academia* debemos citar a Teeteto, Menecmo y Eudoxo. Teeteto realizó importantes contribuciones al estudio y construcción de los poliedros, los llamados *Cuerpos platónicos*, de modo que se le atribuye la paternidad de la mayor parte del Libro XIII de *Los Elementos* de Euclides. Menecmo, que fue durante un tiempo maestro de Aristóteles y de Alejandro Magno, es el descubridor de las secciones cónicas en relación con el problema de la *Duplicación del cubo*. Eudoxo resolvió, mediante el *Axioma de continuidad*, la *Teoría de la Proporción* y el *Método de exhaución*, la primera crisis de fundamentos en la Historia de la Matemática provocada por la aparición de la inconmensurabilidad en el mundo pitagórico. Los Matemáticos de la Academia también dieron diversas soluciones a los famosos problemas clásicos de la *Duplicación del cubo*, la *Trisección del ángulo*, la *Cuadratura del círculo* y la construcción de polígonos regulares, problemas seculares, cuya solución definitiva hubo de esperar más de dos mil años después de Platón.

LOS NÚMEROS Y LO IRRACIONAL
EN LA FILOSOFÍA MATEMÁTICA DE SPENGLER

El sentido de los números

(en *La decadencia de Occidente*. Cap.I.1). Austral, Madrid, 1998. pp.138–155

En el numero, como signo de la total limitación extensiva, reside, como lo comprendió Pitágoras, con la intima certidumbre de una sublime intuición religiosa, la *esencia* de todo lo real, esto es de lo producido, de lo conocido y, al mismo tiempo, limitado. (p.138).

Pitágoras concibió científicamente el numero antiguo como principio de un orden universal de las cosas palpables, como medida o magnitud. (p.139).

El circulo de los pitagóricos, hacia el 540 a.C., llegó a la concepción de que el número es la esencia de todas las cosas. Esto no solamente es un gran paso en el desarrollo de la matemática. Es más aún: es propiamente el orto de una matemática nueva, creada en las profundidades de la alma «*antigua*», teoría consciente de sí misma, que ya se había anunciado en problemas metafísicos y en tendencias de la forma artística. (p.147).

La afirmación pitagórica de que el número es la esencia de todas las cosas *aprehensibles por los sentidos* sigue siendo la más valiosa proposición de la Matemática antigua. En ella el número se define como medida, expresando así el sentimiento cósmico de un alma apasionadamente entregada al *ahora y al aquí*. Medir, en este sentido significa medir algo próximo y corpóreo. [...] El concepto pitagórico de la armonía numérica aunque deducido acaso de un música [...] es un sentimiento que trasladado al lo grande, es lo que crea el *cosmos*, en oposición al caos, el mundo exterior del alma «*antigua*», el orden armónico de todas las cosas singulares, de palpable presencia. La suma de esas cosas es justamente el *mundo entero*. Lo que media entre las cosas es el espacio cósmico. (pp.148– 149).

Para el pensamiento antiguo, para el sentimiento cósmico de los antiguos, la matemática no podía ser más que teoría de las relaciones de magnitud, medida y figura entre cuerpos sólidos. Cuando Pitágoras, movido por ese sentimiento, halló la formula decisiva, era para él el numero precisamente un símbolo óptico, no una forma en general o una forma abstracta; era el signo de la limitación de las cosas que abarcamos con la mirada. Toda la matemática de la antigüedad, sin excepción, concibió a los números como unidades de medida, magnitudes, distancias, superficies. No podía representarse otra especie de extensión. La matemática antigua es en ultima instancia estereometría. (pp.149–150).

Los números pertenecen exclusivamente a la esfera de lo extenso. Pero hay tantas maneras posibles de representarse el orden de lo extenso como existen culturas. El numero antiguo no es el pensamiento de relaciones espaciales sino de unidades tangibles, limitadas para los *ojos del cuerpo*. La «*Antigüedad*» por tanto no conoció más que los números «*naturales*»–positivos enteros–. (p.150).

Por eso la representación de los números irracionales, o como decimos nosotros fracciones decimales infinitas, ha sido siempre irrealizable para el espíritu griego. Dice Euclides que las distancias inconmensurables no se comportan como *números*. Y en realidad, si se analiza el concepto de número irracional, se ve que el concepto de *número* y el concepto de *magnitud* están en él perfectamente separados, porque los

números irracionales, por ejemplo π, no pueden ser nunca exactamente limitados o representados por una distancia. De aquí se sigue que para el número antiguo, que es justamente límite *sensible, magnitud conclusa* y nada más, la representación, por ejemplo, de la relación del lado del cuadrado con la diagonal, entra en contacto con una idea numérica totalmente distinta, muy extraña al sentimiento antiguo del universo y por lo tanto intolerable, idea que parece próxima al descubrir el arcano de la propia existencia. Este sentimiento produce un extraño mito griego de época posterior, según el cual el primero que sacó a la luz pública la noción de lo irracional perdió la vida en un naufragio «*porque lo inexpresable e inimaginable, debe siempre permanecer oculto*». Quien sienta el terror que se manifiesta en este mito –es el mismo terror que estremecía a los griegos de la época más floreciente ante la idea de ensanchar sus minúsculos estado-ciudades, convirtiéndolos en territorios públicamente organizados; ante las perspectivas de largas calles en línea recta y avenidas interminables; [...] ante la idea de salir del Mediterráneo con rumbos que ya de antiguo habían descubierto las naves egipcias y fenicias; es la misma antigua metafísica que los atenazaba al pensar en la disolución de lo tangible, lo sensible, lo presente, lo actual, con que la existencia antigua se había construido como una cerca protectora, allende la cual yacía no sabemos qué cosa inquietante, una sima, elemento primario de ese cosmos, creado y mantenido en cierto modo artificialmente–, quien comprenda ese sentimiento, ha comprendido también el sentido más hondo del número antiguo, la *medida opuesta a lo inmenso,* y ha logrado compenetrarse con el superior *ethos* religioso de esa limitación. (pp.150–151).

Para el alma antigua el principio de lo irracional, esto es, la destrucción de la serie estatuaria de los números enteros, representantes de un orden perfecto del mundo, fue como un criminal atentado a la divinidad misma. Este sentimiento se percibe claramente en el *Timeo* de Platón. La transformación de la serie discontinua de los números en una serie continua, pone en cuestión no sólo el concepto «*antiguo*» del número, sino hasta el concepto del mundo antiguo. Se comprende ahora que en la matemática antigua no fuesen posibles, no ya el cero como número –refinada creación de admirable energía que aniquila toda representación sensible y, para el alma india, que la concibió como base del sistema de posición, constituye la clave para desentrañar el sentido de la realidad–, pero ni siquiera los números negativos que nosotros nos representamos sin dificultad. (pp.152–153).

El sentir antiguo obedece a aquel terror ante lo irracional que les impidió concebir la nada como cero, como número, excluyendo de la contemplación cósmica las relaciones inconmensurables para conservar intacto el símbolo de la medida. (p.155).

El concepto de los números irracionales, de los número propiamente antihelénicos, deshace en su fundamento mismo la noción de número concreto y determinado. A partir de ese momento, ya no forman esos números una serie de magnitudes crecientes, discretas, plásticas, sino un *continuo* de una dimensión, en el cual cada corte –en sentido de Dedekind– representa un «*número*», aunque ya en realidad no puede dársele ese nombre. Para el espíritu antiguo no hay más que un número entre el 1 y el 3; para el espíritu occidental, hay una colección infinita. (p.170).

El número antiguo, entero, material, busca involuntariamente una relación que lo una con el nacimiento del hombre corpóreo [...]. Desde ese punto de vista se comprende el *mito*, del criminal descubrimiento del número irracional. El irracional, o, según nuestro modo de expresarnos, el uso de los decimales infinitos, viene a destruir el orden genético, el orden corporeo–orgánico, instituido por los dioses. (p.180).

La fundamentación de Eudoxo. *La Teoría de la Proporción*

El descubrimiento de magnitudes inconmensurables exigía una revisión de ciertos fundamentos de la Matemática pitagórica, ya que a partir de entonces las magnitudes geométricas no podían ser medidas mediante números. El inevitable carácter continuo que tienen impide que se puedan someter a las manipulaciones algebraicas como a los números.

Para conjurar la crisis de fundamentos había que soslayar el concepto infinitesimal de número irracional. Los griegos del siglo IV a.C. eran conscientes de la existencia de magnitudes geométricas que nosotros llamamos i*rracionales*, pero no las concebían como números.

Eudoxo de Cnido es uno de los matemáticos más importantes de la Academia platónica, que al Introducir la idea de «*tan pequeño como se quiera*», antecedente de nuestro proceso de «*paso al límite*», encuentra una escapatoria a los problemas planteados por el infinito y lo inconmensurable, mediante un recurso genial que desarrolla en tres estadios:

1. Una definición: igualdad de razones, *Euclides*, Definición V.5.
2. Un axioma: axioma de *Eudoxo–Arquímedes* o *axioma de continuidad*, *Euclides*, Definición V.4.
3. Un método: *el Método de Exhaución*, *Euclides*, Proposición X.1.

Como lo inexpresable era la razón entre dos cantidades inconmensurables, Eudoxo elimina la dificultad definiendo no la razón misma, sino la igualdad de razones de la siguiente forma (Definición V.5 de *Los Elementos* de Euclides):

> «*Se dice que una primera magnitud guarda la misma razón con una segunda magnitud, que una tercera magnitud con una cuarta magnitud, cuando cualesquiera equimúltiplos de la primera y la tercera exceden a la par, sean iguales a la par o sean inferiores a la par, que cualesquiera equimúltiplos de la segunda y la cuarta, respectivamente y tomados en el orden correspondiente.*»

Es decir si a,b son dos magnitudes geométricas del mismo tipo y c,d son también del mismo tipo (aunque no necesariamente del mismo tipo que a y b), Eudoxo define que las razones

a/b y c/d son proporcionales: $a/b=c/d$,

cuando para cualquier par de enteros positivos n y m, se tiene:

$na>mb$ y $nc>md$ ó $na=mb$ y $nc=md$, ó $na<mb$ y $nc<md$.

Como podemos apreciar, sorprende la similitud de la definición de Eudoxo de igualdad de razones con *las cortaduras* que utilizó Dedekind en el siglo XIX para la fundamentación del conjunto de los números reales.

Con base en esta definición, Eudoxo diseña una nueva *Teoría de la Proporción* que será muy alabada por G.H. Hardy en la citada *obra Apología de un matemático* (pp.98–99):

> «*Eudoxo construyó una profunda teoría que aparece descrita en el Libro V de Los Elementos de Euclides, y que es considerada por muchos matemáticos modernos como el logro más depurado de las Matemáticas griegas. Esta teoría es sorprendentemente moderna en espíritu, y puede ser considerada como el principio de la moderna teoría de números irracionales, que ha revolucionado el Análisis Matemático y ha tenido mucha influencia en la filosofía reciente*.»

La definición de Eudoxo de proporción generaliza la noción pitagórica de proporcionalidad de razones de enteros

1. **Si $a/b = c/d$ en sentido pitagórico, existen enteros p,q,m,n positivos, tales que $a=mp$, $b=mq$, $c=np$, $d=nq$.**
   Sean h, k, enteros positivos cualesquiera. Se tiene:
   $ha\ (>,=,<)\ kb \Rightarrow hmp\ (>,=,<)\ kmq \Rightarrow hp\ (>,=,<)\ kq \Rightarrow hnp\ (>,=,<)\ knq \Rightarrow hc\ (>,=,<)\ kd$.
   Por tanto se ha demostrado que $a/b = c/d$ sentido de Eudoxo.

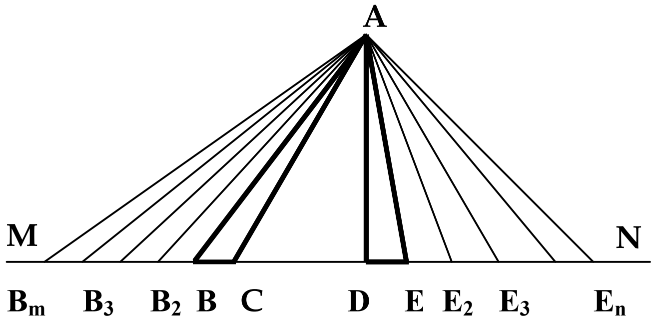
2. **Si $a/b = c/d$ en sentido de Eudoxo, donde a,b,c,d, son enteros positivos. Existen enteros, r,s, tales que: $ra = sb$, y por tanto: $rc = sd$.**
   Sea $h=\mathrm{mcd}(r,s)$, entonces: $r=qh$, $s=ph$, donde $\mathrm{mcd}(q,p)=1$. Ahora se verifica:
   $$ra = sb \Rightarrow qha = phb \Rightarrow qa = pb \Rightarrow \left\{\begin{matrix}\textit{Teorema de Euclides}\\ \textit{Elementos, VII.30}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix}a = p\alpha\\ b = q\beta\end{matrix}\right\} \Rightarrow \alpha=\beta=m \Rightarrow \left\{\begin{matrix}a = pm\\ b = qm\end{matrix}\right\}$$
   $$rc = sd \Rightarrow qhc = phd \Rightarrow qc = pd \Rightarrow \left\{\begin{matrix}\textit{Teorema de Euclides}\\ \textit{Elementos, VII.30}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix}c = p\chi\\ b = q\delta\end{matrix}\right\} \Rightarrow \chi=\delta=n \Rightarrow \left\{\begin{matrix}c = pn\\ d = qn\end{matrix}\right\}$$
   Por tanto se ha demostrado que $a/b = c/d$ en sentido pitagórico.

Veamos con esta nueva definición de proporcionalidad la demostración rigurosa de la Proposición VI.1 de *Los Elementos* de Euclides:

«*Los triángulos que tienen la misma altura, son entre sí como sus bases*»,

que se citó en un apartado anterior:

Sobre la recta CB, tracemos a partir de B, m-1 segmentos iguales a CB y unamos los puntos de división $B_2,B_3,...,B_m$ con el vértice A. De forma similar tracemos a partir de E n-1 segmentos iguales a DE y unamos los puntos de división $E_2,E_3,...,E_n$ con el vértice A. Se tiene $B_mC=m(BC)$, $AB_mC=m(ABC)$, $E_nD=n(ED)$, $AE_nD=n(AED)$.

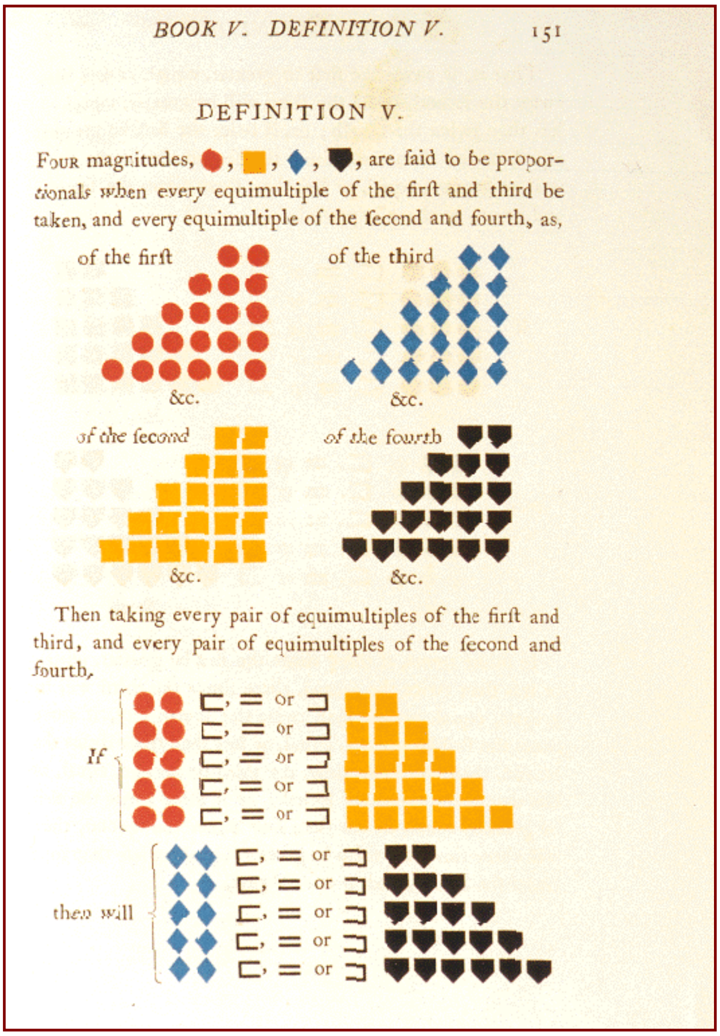


Ahora según la Proposición I.38 de *Los Elementos* y su consecuencia: «*de triángulos que tienen la misma altura tiene mayor área el que tiene mayor base*», se deduce que el triángulo AB_mC es mayor, igual o menor que el triángulo AE_nD según que m(BC) sea mayor, igual o menor que n(DE), por tanto según la definición de Eudoxo de proporción se tiene la tesis de la proposición ABC/ADE=BC/DE.

Se observa que no se menciona la naturaleza conmensurable o inconmensurable de las magnitudes geométricas; la definición de Eudoxo se aplica a ambos casos.

Esta prueba de la Proposición VI.1 de *Los Elementos* es una buena muestra de cómo a partir de la definición de Eudoxo las magnitudes geométricas pueden compararse a través de razones; y es sobre esta base que Eudoxo procedió a la demostración rigurosa de los resultados pitagóricos sobre proporciones del Libro VI de *Los Elementos* de Euclides, así como de los teoremas de Hipócrates y Demócrito sobre áreas de círculos y volúmenes de pirámides y conos que aparecen en el Libro XII de *Los Elementos* de Euclides.

La Definición V.5 de *Los Elementos* de Euclides en la edición visual de Oliver Byrne (Londres, 1847)


BOOK V. DEFINITION V. 151

DEFINITION V.

Four magnitudes, , , , , are ſaid to be proportionals when every equimultiple of the firſt and third be taken, and every equimultiple of the ſecond and fourth, as,

of the firſt &c. of the third &c.

of the ſecond &c. of the fourth &c.

Then taking every pair of equimultiples of the firſt and third, and every pair of equimultiples of the ſecond and fourth,

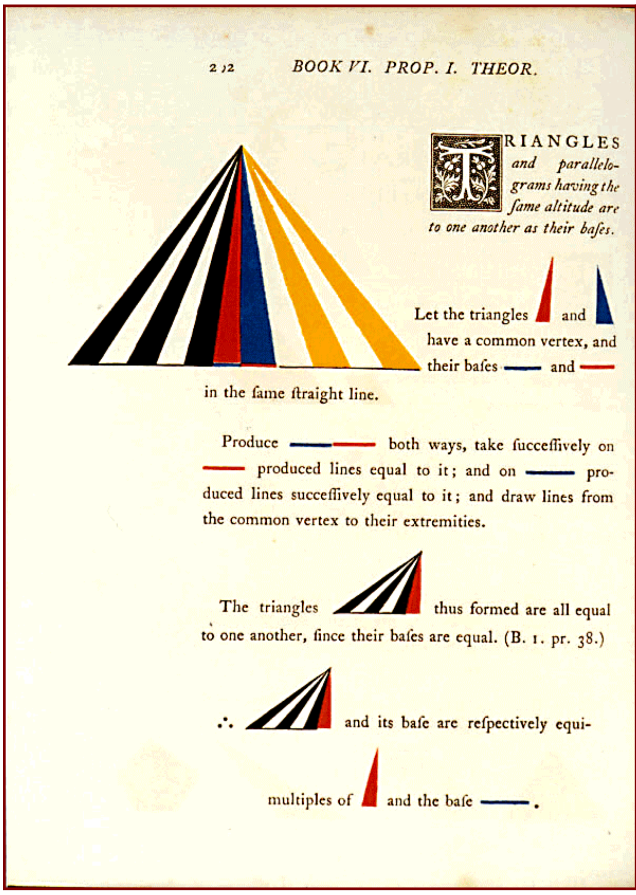
If [, = or]

then will [, = or]

La Definición V.5 de *igualdad de razones es el Principio Fundamental de la Teoría de la Proporción,* introducido por Eudoxo para superar la crisis de fundamentos que trajo el descubrimiento pitagórico de las magnitudes inconmensurables.

La definición de Eudoxo de proporción generaliza la noción pitagórica de proporcionalidad de razones de enteros invalidada por la aparición del irracional y es la base de los teoremas sobre figuras semejantes del Libro VI de *Los Elementos* de Euclides.

La definición de Eudoxo es también un antecedente histórico formal de «*las cortaduras*» que utilizó Dedekind en el siglo XIX para la fundamentación del conjunto de los números reales.


212 BOOK VI. PROP. I. THEOR.

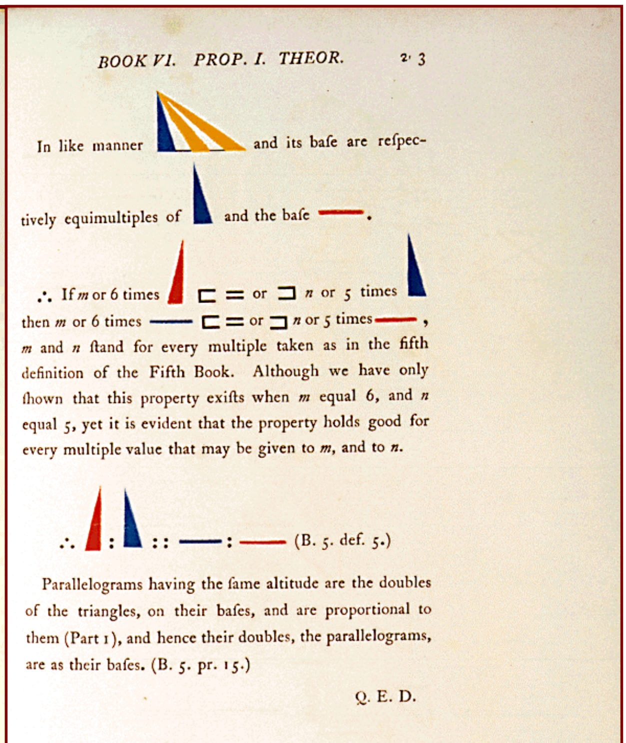
TRIANGLES *and parallelograms having the ſame altitude are to one another as their baſes.*

Let the triangles and have a common vertex, and their baſes and in the ſame ſtraight line.

Produce both ways, take ſucceſſively on produced lines equal to it; and on produced lines ſucceſſively equal to it; and draw lines from the common vertex to their extremities.

The triangles thus formed are all equal to one another, ſince their baſes are equal. (B. 1. pr. 38.)

∴ and its baſe are reſpectively equimultiples of and the baſe .


BOOK VI. PROP. I. THEOR. 213

In like manner and its baſe are reſpectively equimultiples of and the baſe .

∴ If *m* or 6 times [= or] *n* or 5 times then *m* or 6 times [= or] *n* or 5 times , *m* and *n* ſtand for every multiple taken as in the fifth definition of the Fifth Book. Although we have only ſhown that this property exiſts when *m* equal 6, and *n* equal 5, yet it is evident that the property holds good for every multiple value that may be given to *m*, and to *n*.

∴ : :: : (B. 5. def. 5.)

Parallelograms having the ſame altitude are the doubles of the triangles, on their baſes, and are proportional to them (Part 1), and hence their doubles, the parallelograms, are as their baſes. (B. 5. pr. 15.)

Q. E. D.

La Proposición 6.1 de *Los Elementos* de Euclides: «*Los triángulos que tienen la misma altura, son entre sí como sus bases*», en la edición visual de Oliver Byrne (Londres, 1847).

EUDOXO DE CNIDO, ENTRE PITÁGORAS Y EUCLIDES

ARTÍFICE DE LA SOLUCIÓN A LA CRISIS DE FUNDAMENTOS PRODUCIDA POR LA APARICIÓN DE LAS MAGNITUDES INCONMENSURABLES

P.Tannery. *La géométrie grecque*.

Gauthier-Villars, París,1887, pp.95–98.

Por su contribución de una importancia capital a la constitución de *Los Elementos* de Euclides [...] debemos conceder a Eudoxo de Cnido un rango entre los primeros genios de la antigüedad. [...].

En su origen [en la Geometría griega] se fundaba la correlación entre la Geometría y la Aritmética sobre la proporción geométrica en la hipótesis de la conmensurabilidad de todas las magnitudes, hipótesis ciertamente tan natural como falsa [tras el descubrimiento de las magnitudes inconmensurables], y, que, en la época en que Platón escribía las *Leyes*, estaba todavía muy extendida.

El descubrimiento de la inconmensurabilidad por Pitágoras debió causar, en Geometría, un verdadero escándalo lógico, y, para superarlo, se tendió a restringir tanto como fuera posible el empleo del principio de semejanza, esperando que se llegara a establecer sobre una teoría de la proporcionalidad independiente de la hipótesis de la conmensurabildad [La Teoría de la Proporción del Eudoxo del Libro V de *Los Elementos* de Euclides].

Es a Eudoxo a quien pertenece la gloria de haber creado esta teoría, objeto del Libro V de *Los Elementos* de Euclides; el rigor es incontestable, y, si lo embarazoso de su forma geométrica ha sido uno de los motivos para abandonarla, sería fácil despejarse de ella [de la forma geométrica], de modo que al hacerlo mantiene entonces sin ninguna desventaja la comparación con las exposiciones modernas, a menudo tan defectuosas.

Parece, por consiguiente que , entre Pitágoras y Euclides, La Geometría plana ha sufrido en su conjunto una revisión profunda, cuyo momento decisivo ha sido el trabajo de Eudoxo sobre las proporciones.

1. **Imagen atribuida a la efigie de Eudoxo, aunque no es seguro que sea tal porque también se atribuye a Ptolomeo. La confusión puede provenir de la importante dedicación de ambos matemáticos a la Astronomía.**
2. ***Tratado de las esferas* de Eudoxo. Papiro egipcio del Siglo II d.C. Museo de Louvre. París.**

El *Método de Exhaución* de Eudoxo

Prescindiendo del número irracional, Eudoxo opera con magnitudes que se pueden hacer menores que otras arbitrariamente prefijadas para lo que introduce lo que hoy llamamos el «*axioma de Eudoxo-Arquímedes*» o «*axioma de continuidad*», que aparece inocuamente como una definición en *Los Elementos* de Euclides (Definición V.4):

> «*Se dice que dos magnitudes tienen razón cuando se puede multiplicar una de ellas de modo que supere a la otra*.»

La asunción de Euclides fue considerada por Arquímedes como un principio o postulado, de ahí el nombre con el que ha pasado a la literatura Matemática. La importancia del axioma la ha remarcado Hilbert, en su obra *Los principios fundamentales de la Geometría*, donde le asigna un papel fundamental en la estructura de la Geometría. Arquímedes lo enuncia en el postulado V del Libro I de su obra *Sobre la Esfera y el Cilindro*.

> «*Dadas dos líneas, dos superficies o dos sólidos desiguales, si el exceso de una de estas figuras sobre la otra se añade a sí mismo un cierto número de veces, se puede superar una u otra de las figuras que se comparan entre sí.*»

Arquímedes repite el enunciado en la carta a Dositeo, que acompaña a su obra *Sobre la Cuadratura de la Parábola*:

> «[...] *Para demostrar este teorema he utilizado el siguiente lema: Si la diferencia entre dos magnitudes se añade sucesivamente a sí misma, llegará a ser mayor que un área dada. Los geómetras anteriores a mí* [Eudoxo, ...] *también se han apoyado en este lema para demostrar que los círculos son entre sí como la razón duplicada* [el cuadrado] *de sus diámetros y las esferas como la razón triplicada* [el cubo]*; que una pirámide equivale a un tercio de un prisma de la misma base y altura que la pirámide y un cono igual al tercio del cilindro de igual base y altura que el cono*, [...].»

Vemos como Arquímedes, con gran sagacidad, advirtió que el principio no debe ser una definición ni un teorema, sino un axioma, en el que, al igual que él mismo, se habría apoyado Eudoxo para abordar las cuestiones infinitesimales.

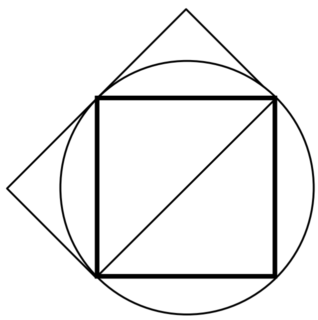
En la Geometría griega dada una figura curvilínea A, para determinar su área a(A) se busca una sucesión de polígonos $\{P_1,P_2,...,P_n,...\}$, que aproximen progresivamente el área de A. El método de exhaución se ideará para sustituir con absoluto rigor en la demostración de la magnitud de un área o volumen a la idea intuitiva de que el área de A es *el límite* de las áreas de los polígonos $\{P_1,P_2,...,P_n,...\}$. Se intenta demostrar que se puede encontrar un polígono en la sucesión $\{P_1,P_2,...,P_n,...\}$ cuyo área difiera del área de la figura A en una cantidad menor que otra prefijada. Simbólicamente dado $\varepsilon>0$ se debe encontrar un polígono P_n tal que la diferencia $a(A) - a(P_n)$ sea menor que ε para n suficientemente grande. A este respecto cumple un papel fundamental la Proposición X.1 de *Los Elementos* que Euclides demuestra aplicando el axioma de Eudoxo-Arquímedes:

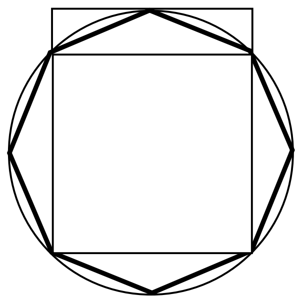
> «*Dadas dos magnitudes desiguales, si de la mayor se resta una magnitud mayor que su mitad y de lo que queda otra magnitud mayor que su mitad y se repite continuamente este proceso, quedará una magnitud menor que la menor de las magnitudes dadas*.»

Este resultado que es conocido como «*Principio de Eudoxo*» abre las puertas al «*Método de exhaución*», con el que Eudoxo demuestra rigurosamente los teoremas sobre el área del círculo, así como sobre los volúmenes de la pirámide y el cono, que habían sido enunciados por Hipócrates de Quíos y Demócrito, respectivamente, y que aparecen en *Los Elementos* de Euclides (Proposiciones XII.2, XII.5 y XII.10).

Inscribiendo un cuadrado en un círculo, la diferencia entre ambos es menor que la mitad del área del círculo. Considerando el octógono inscrito, se ve que la diferencia entre cada segmento circular y el triángulo isósceles que determina dos lados del octógono, es menor que la mitad del segmento circular.

inscribiendo un cuadrado en un círculo, la diferencia entre ambos es menor que la mitad del área del círculo. Si ahora se considera el octógono inscrito, se puede ver que la diferencia entre cada segmento circular (determinado por el cuadrado y el círculo) y el triángulo isósceles que determina dos lados del octógono, es menor que la mitad del segmento circular. Partiendo de un círculo y un cuadrado (por pequeño que sea), continuando el proceso anterior, se resta reiteradamente a una cantidad otra cantidad superior a su mitad (en primer lugar al círculo se le resta el cuadrado, en segundo lugar a los segmentos circulares resultantes los triángulos isósceles que determinan el octógono, y así sucesivamente); aplicando el *Principio de Eudoxo* suficientemente, alcanzaremos un polígono inscrito, cuya diferencia con el círculo es menor que el cuadrado pequeño prefijado.





Aplicando el *Principio de Eudoxo*, alcanzaremos un polígono inscrito, cuya diferencia con el círculo es menor que un cuadrado pequeño prefijado.

Simbólicamente, dado un círculo C y un número $\varepsilon>0$ se puede encontrar un polígono regular P inscrito en C tal que $a(C) - a(P)<\varepsilon$ («*Lema de exhaución del círculo*»).

Este resultado permite demostrar rigurosamente mediante el típico argumento de la doble reducción al absurdo el ya aludido teorema de Hipócrates (*Elementos* XII.2):

> «*Los círculos son entre sí como los cuadrados de sus diámetros*.»

En efecto, sean C y D círculos de diámetros c y d; el teorema enuncia que $a(C)/a(D)=c^2/d^2$. La demostración consiste en probar que cualquiera de las desigualdades: $a(C)/a(D)<c^2/d^2$, o $a(C)/a(D)>c^2/d^2$conduce a contradicción.

Supongamos que en vez de la igualdad se verifica $a(C)/a(D)<c^2/d^2$. Entonces $a(D)>[a(C)\cdot d^2]/c^2=h$. Sea $\varepsilon=a(D) - h$. Según el resultado anterior se puede encontrar un polígono Q inscrito en el círculo D tal que $a(D) - a(Q)< \varepsilon=a(D) - h$. Por tanto $a(Q)>h$. Sea P el polígono regular semejante a Q, inscrito en el círculo C. Ahora bien, según la Proposición XII.1 de *Los Elementos*:

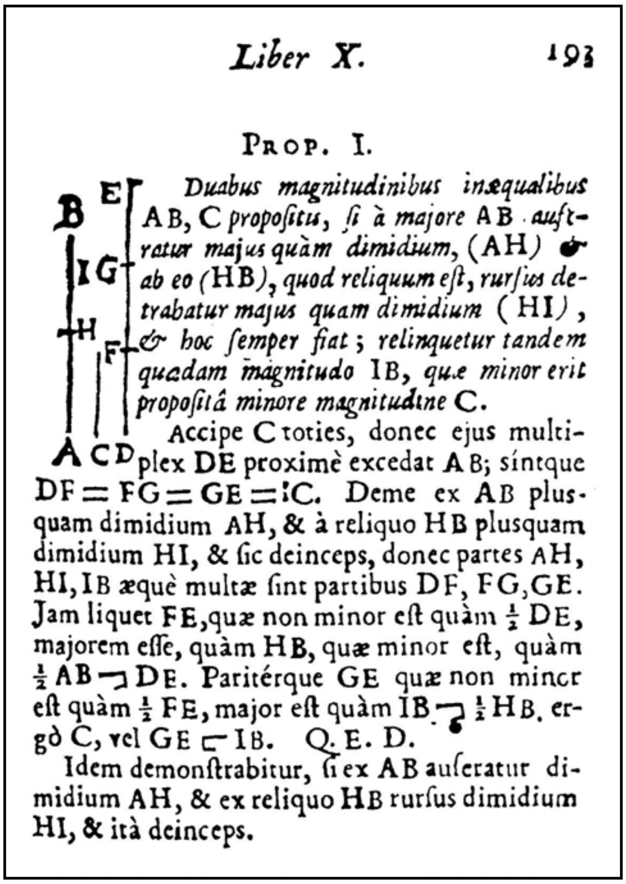
> «*los polígonos semejantes inscritos en círculos son entre sí como los cuadrados de los diámetros*»,

$a(P)/a(Q)= c^2/d^2=a(C)/h$. Se tiene $h/a(Q)=a(C)/a(P)>1$. Por tanto $h>a(Q)$ lo cual es una contradicción. Luego no es cierto que $a(C)/a(D)< c^2/d^2$.

Intercambiando los papeles entre los círculos se demuestra análogamente que no es cierto que $a(C)/a(D)>c^2/d^2$. De donde concluimos que la igualdad es cierta.

Aplicando también el lema de exhaución del círculo mediante polígonos inscritos, se puede demostrar, asimismo, mediante una doble reducción al absurdo, que al igual que para el prisma el volumen del cilindro es el producto del área de su base por su altura.

EL PRINCIPIO DE EUDOXO Y EL MÉTODO DE EXHAUCIÓN


Liber X. 193

PROP. I.

Duabus magnitudinibus inæqualibus AB, C *propositis, si à majore* AB *auferatur majus quàm dimidium,* (AH) *&* *ab eo* (HB), *quod reliquum est, rursus detrabatur majus quam dimidium* (HI), *& hoc semper fiat; relinquetur tandem quædam magnitudo* IB, *quæ minor erit propositâ minore magnitudine* C.

Accipe C toties, donec ejus multiplex DE proximè excedat AB; síntque DF = FG = GE = C. Deme ex AB plusquam dimidium AH, & à reliquo HB plusquam dimidium HI, & sic deinceps, donec partes AH, HI, IB æquè multæ sint partibus DF, FG, GE. Jam liquet FE, quæ non minor est quàm ½ DE, majorem esse, quàm HB, quæ minor est, quàm ½ AB ⊐ DE. Paritérque GE quæ non minor est quàm ½ FE, major est quàm IB ⊐ ½ HB. ergò C, vel GE ⊏ IB. Q. E. D.

Idem demonstrabitur, si ex AB auferatur dimidium AH, & ex reliquo HB rursus dimidium HI, & ità deinceps.


EUCLIDIS ELEMENTORUM Libri XV. breviter demonstrati, Operâ IS. BARROW, Cantabrigiensis, Coll. TRIN. Soc. Et prioribus mendis typographicis nunc demum purgati.

HIEROCL.

LONDINI, Typis J. Redmayne: Prostant autem apud J. Williams ad Insigne Coronæ in Cœmeterio D. Pauli

La Proposición X.1 de *Los Elementos* de Euclides (edición de I. Barrow, Londres, 1678). Esta cuidada edición en latín fue publicada por vez primera en 1655 y reeditada en numerosas ocasiones.

La Proposición I del Libro X es una de las más importantes de *Los Elementos*, ya que en ella se demuestra el *Principio de Eudoxo*, que es la base preliminar del *Método de Exhaución* –instrumento fundamental de la Geometría griega para la resolución a los problemas infinitesimales–, que al emplear un sistema indirecto de prueba, no requiere un proceso explícito de paso al límite.

El Método de Exhaución preside la obtención de los resultados euclídeos del Libro XII sobre círculos, esferas, pirámides, cilindros y conos. Arquímedes atribuyó la obtención de muchos de estos resultados a Demócrito y las demostraciones rigurosas de los correspondientes teoremas a Eudoxo, de quien Euclides adaptaría el material para la redacción de *Los Elementos*.

Con el *Método de Exhaución*, tanto Euclides –en el Libro XII de *Los Elementos*– como Arquímedes –en las obras *Sobre la Cuadratura de la Parábola*, *Sobre la Esfera y el Cilindro*, y otras– pudieron alcanzar, con todo rigor, los mismos resultados sobre cuadraturas y cubaturas que cuando se efectúan investigaciones propiamente infinitesimales.

E.Bell, en su obra *Les grands mathématiciens* (Payot. París, 1950, p.36) sitúa a Eudoxo «*por su Teoría de las Proporciones en la cumbre de las matemáticas griegas*» y sintetiza su labor como matemático con estas palabras (p.37):

> *«En el momento que abandonamos las figuras limitadas por líneas rectas o superficies planas, entramos de lleno en los problemas de la continuidad, los enigmas del infinito y los dédalos de los números irracionales. Eudoxo ha encontrado el primer método lógicamente satisfactorio, que Euclides ha reproducido en el Libro V de sus Elementos, para resolver estos problemas. En su método de exhaución, aplicado al cálculo de áreas y volúmenes, Eudoxo ha mostrado que no tenemos necesidad de suponer la "existencia" de "cantidades infinitamente pequeñas". Basta, para los fines que persiguen las Matemáticas, poder alcanzar una magnitud "tan pequeña como queramos" gracias a la división continua de una magnitud dada.»*

La mayor aportación de la Academia platónica a las cuestiones infinitesimales, y una de las más importantes en la Matemática en general, fue la brillante solución que le dio Eudoxo –el más importante de sus matemáticos– a la correspondiente crisis de fundamentos, con la *Teoría de la Proporción.* Realmente el trabajo de Eudoxo ha sido uno de los más influyentes en la Historia de la Matemática. Por una parte, su definición de igualdad de razones permitió salvaguardar el legado pitagórico mediante la reconstrucción de las pruebas de los teorema pitagóricos que involucraban proporciones, y por otra, s*u Método de Exhaución* se convirtió en un instrumento fundamental en la Geometría griega para la resolución a los problemas infinitesimales de cuadraturas y cubaturas.

Inconmensurables, Teoría de la Proporción y Método de exhaución

ARQUIMEDES: *El Método*. Introducción y notas de J. Babini.

Eudeba, Buenos Aires, 1966, pp.14-17.

A comienzo del siglo IV a.C. la matemática tenía mas de un siglo de existencia. Nacida a la sombra de la metafísica pitagórica fundada en la omnipresencia y omnipotencia del numero («*el numero es la esencia de todas las cosas*»), ya había andado mucho. Sin embargo, pronto mostró su incompatibilidad con aquella metafísica, pues se demostró que no había numero (racional) para expresar la relación entre elementos tan simples como la diagonal y el lado de un cuadrado, o el lado de un triángulo equilátero y el diámetro de su circunferencia circunscrita, y así sucesivamente. Este hecho planteaba a los pitagóricos una tremenda alternativa: de mantener su metafísica, mutilaban la geometría; de mantener la geometría anulaban su metafísica.

Mientras los pitagóricos se debatían en esta cuestión, los matemáticos encararon el problema desde el punto de vista técnico, y uno de ellos, Eudoxo de Cnido, encuentra una escapatoria. La solución de Eudoxo comprende una definición, un principio y un método. La definición de Eudoxo evita la dificultad que había presentado la razón entre cantidades inconmensurables, por carecer los griegos del concepto de nuestro «*numero irracional*», definiendo, no esa razón, sino la igualdad de razones; es decir, la proporción, de una manera tal de soslayar esa carencia. Para ello, mediante desigualdades y números enteros, logra definir la proporcionalidad, sean conmensurables o no las cantidades proporcionales. Esta definición de la proporcionalidad **[Euclides V.5]** es la que luego servirá de base a la teoría de la semejanza que aparece en los *Elementos* de Euclides **[Libro VI]**.

El principio de Eudoxo establece la condición para que dos cantidades tengan razón. Ese «*principio*», que figura entre las definiciones del libro V de los *Elementos* **[Euclides V.4]**, establece como tal condición que «*existe razón entre dos cantidades cuando un múltiplo de la menor supera a la mayor*», expresión en la que vuelven a aparecer números enteros y una desigualdad. Ahora bien, en su libro de la *Esfera y del Cilindro* **[y también en la carta a Dositeo que antecede a la obra *Sobre la Cuadratura de la Parábola*]** Arquímedes incluye esa proporción entre los postulados **[Postulado I.5]**, ya que no obstante la gran evidencia que el «*principio*» revela, su perspicacia matemática le advierte que no se trata de una definición, sino de una proposición de la cual debe partirse, es decir, de un postulado. La existencia de «*geometrías no arquimedianas*» demostradas este siglo **[en el siglo XX]** que ni cumplen con ese postulado, muestran claramente cuán acertada fue la ubicación que Arquímedes asignó a este «*principio*». en la construcción geométrica. Hoy, ese postulado es el importante «*Postulado de Continuidad*», a veces llamado «*Postulado de Arquímedes*» o «*Postulado de Eudoxo–Arquímedes*», en vista de su origen.

Tal postulado desempeña un papel fundamental en el «*método de exhaución*». Este método ideado por Eudoxo y aplicado por éste por primera vez, es el que en la geometría griega suple los actuales métodos infinitesimales. La primera observación importante que se formula es que no se trata de un método de descubrimiento sino de demostración, es decir, que supone conocido de alguna manera el resultado y ofrece un procedimiento riguroso para demostrarlo. De paso observemos como, ya en la época de Eudoxo, la matemática reflejaba su característica fundamental de poner el acento en el proceso deductivo, en la demostración, y no en el resultado.

Conocido, pues, de antemano el resultado, la demostración por el método de Eudoxo de que, por ejemplo, una cierta figura A es equivalente a una cierta figura B, consiste en una doble reducción al absurdo, probando que los supuesto de ser A mayor o menor que B conducen a contradicciones, de manera que no queda otra alternativa que A sea equivalente a B. Y es en esta demostración que juega su papel el postulado anterior, ya que la demostración exige que se pueda descomponer la figura en partes tales que una de ellas sea inferior a una figura dada, y esto se logra precisamente en virtud el postulado. Esta descomposición de la figura en partes cada vez más pequeña fue la causa por la cual un matemático renacentista dio al método el nombre de «*método de exhaución*», aunque en verdad tal descomposición «*no agota*» la figura, sino que solo llega la punto en que cierta figura es menor que una figura dada.

El método de exhaución, aplicado por Euclides en los *Elementos* en la demostración de unos pocos teoremas se convierte en manos de Arquímedes en el método riguroso con el cual determina sus muchísimas cuadraturas y cubaturas que hoy se logran más fácilmente mediante los métodos infinitesimales.

Así como el «*Principio de Eudoxo*», convertido por Arquímedes en postulado, es nuestro actual «*Postulado de Continuidad*», indispensable en el Análisis Infinitesimal, el método de exhaución es la traducción geométrica de la operación de «*paso al límite*», característica de los métodos infinitesimales. Así como en el método de exhaución se trata de llegar a una figura menor que una figura prefijada, la definición de límite exige precisar un valor menor que una cantidad prefijada.

Consecuencias sobre la naturaleza de la Geometría griega

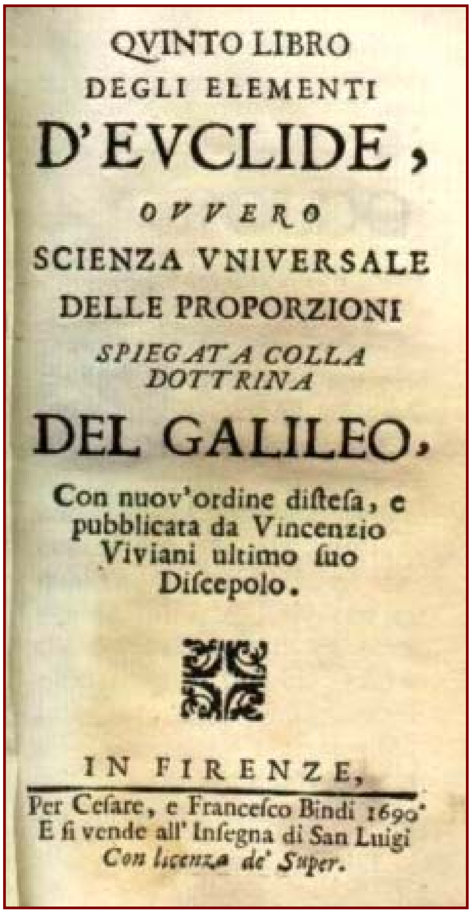
La tempestad provocada por el descubrimiento pitagórico de los irracionales propició «*el horror al infinito*», que caracteriza casi toda la Matemática griega y paraliza parcialmente su imaginación creadora, que pasaría a segundo plano, a la sombra del supremo rigor lógico impuesto por la escuela platónica, cuyo exponente más representativo es la figura de Euclides que estructura rígidamente la Matemática griega elemental en su enciclopédica obra *Los Elementos*. La crisis trajo consigo un refinamiento geométrico. Como reacción al lenguaje ingenuo de los pitagóricos, mezcla de brillantes ideas matemáticas, actitudes místicas y aforismos religiosos, se impondrá el severo rigor de *Los Elementos*. Pero el desarrollo de La Geometría al margen de la Aritmética, la ausencia de un Álgebra en sentido algorítmico y simbólico, y es más, la conversión de toda la Matemática en Geometría, con un estilo sintético de exposición que oculta la vía heurística del descubrimiento, fue el efecto más inmediato.

La solución de la crisis de los irracionales con la *Teoría de la Proporción* de Eudoxo, que quedó plasmada en el Libro V de *Los Elementos* de Euclides y constituyó a partir de entonces la médula de la Geometría griega, fue un magnífico éxito científico, pero tomó una forma geométrico-deductiva de acuerdo con la filosofía platónica. Cierto que en ese momento la crisis no podía solventarse con la definición de número irracional, ya que ello hubiera precisado un desarrollo considerable de las técnicas de la Aritmética de la computación, lo que no podía darse en un ambiente científico dominado por el idealismo platónico, que despreciando el estudio de la dimensión sensible de la realidad, rechazaba de forma elitista las aplicaciones prácticas por considerarlas corruptoras y degradantes. Si los científicos griegos no idearon un sistema de numeración manejable, mal podían prestar atención a las cuestiones calculísticas, que, además, eran objeto de una actividad, que llamaban *Logística*, de rango intelectual inferior a la Aritmética, de modo análogo que una actividad inferior que llamaban *Geodesia* se ocupaba de las aplicaciones prácticas de la Geometría.

Como consecuencia de la aparición de las magnitudes inconmensurables, los griegos no podían reconocer la existencia de números irracionales, lo que les dificultaba el tratamiento numérico de longitudes, áreas, volúmenes y ángulos. Esta limitación operacional junto a un deficiente sistema de numeración que utilizaba las letras del alfabeto para representar los números enteros, con la consiguiente dificultad para realizar las operaciones, impedía asignar a las figuras geométricas números que midieran sus longitudes, áreas y volúmenes y por tanto los griegos tenían que calcular directamente con las figuras, que se trataban como magnitudes. El abismo infranqueable que se había abierto entre número y magnitud continua impedía someter las magnitudes geométricas a manipulaciones algebraicas, como se hace con los números, lo que determinó la transformación del Álgebra oriental que los pitagóricos habían heredado de los babilonios en el *Álgebra Geométrica* del Libro II de *Los Elementos* de Euclides, en la que los números son sustituidos por segmentos de recta y las operaciones entre ellos se llevan a cabo mediante construcciones geométricas. Con gran habilidad en la práctica geométrica, los griegos hicieron de su *Álgebra Geométrica* un poderoso instrumento para la resolución de ecuaciones, mediante el método de la *Aplicación de las áreas*, de ascendencia pitagórica.

Una de las derivaciones más importantes de la crisis de fundamentos que provoca la aparición de los inconmensurables es de índole metodológico. La Filosofía platónica impone en la Matemática griega un dominante rigor por encima de cualquier otro valor, lo que cristaliza en la sistematización axiomático-deductiva de la geometría griega elemental en *Los Elementos* de Euclides, que establece un severo modelo de exposición y demostración en Matemáticas, que presidirá casi toda la producción Matemática posterior, o por lo menos la que nos ha llegado en los grandes tratados clásicos. Pero el respeto absoluto al paradigma estilístico euclídeo cercena considerablemente las posibilidades de expresión y oculta la vía del descubrimiento –*el ars inveniendi*–, quedando de manifiesto en exclusiva la vía apodíctica –*el ars disserendi*–. Además, es de advertir y lamentar que la rigidez de los cánones impuestos por esta forma de expresión provocaría el que, seguramente, una amplia y valiosa tradición Matemática griega quedara fuera de las grandes obras clásicas.

LOS INCONMENSURABLES EN *LOS ELEMENTOS* DE EUCLIDES


QVINTO LIBRO
DEGLI ELEMENTI
D'EVCLIDE,
OVVERO
SCIENZA VNIVERSALE
DELLE PROPORZIONI
SPIEGATA COLLA
DOTTRINA
DEL GALILEO,
Con nuov'ordine diſteſa, e
pubblicata da Vincenzio
Viviani ultimo ſuo
Diſcepolo.
IN FIRENZE,
Per Ceſare, e Franceſco Bindi 1690.
E ſi vende all'Inſegna di San Luigi
Con licenza de' Super.

Quinto libro degli Elementi d'Euclide, ovvero scienza universale delle proporzioni spiegata colla dottrina del Galileo, ... Libro V de la edición de Viviani de *Los Elementos* de Euclides (Florencia, 1690).

Euclides. Fragmento de un fresco de la Biblioteca de El Escorial de P.Tibaldi. 1586.

Los pitagóricos habían elaborado un gran desarrollo geométrico con multitud de teoremas –en particular sobre semejanza de figuras– que aplicaban proporciones, en la creencia de que dos magnitudes geométricas eran siempre conmensurables –es decir, había un segmento común que medía a ambas, y por tanto eran expresables su magnitud como cociente entre dos números enteros–. La aparición de los inconmensurables en el horizonte geométrico de la escuela pitagórica invalidaba las pruebas de todos los teoremas que utilizaban proporciones, de ahí la terrible confusión lógica que introdujo este fenómeno en la Geometría griega, que llegó a producir una crisis de fundamentos, sin precedentes en la Historia de la Matemática.

Es precisamente la necesidad de reconstruir las pruebas geométricas de los teoremas pitagóricos, a base de fundamentarlas en un nuevo rigor, lo que produce, como reacción ante la crisis, la aparición de *Los Elementos* de Euclides, donde la Matemática elemental de los griegos queda rígidamente estructurada con el severo rigor que impone el método axiomático. Así pues, uno de los objetivos principales de *Los Elementos* de Euclides debió ser la plasmación enciclopédica de la Geometría griega elemental en un Corpus geométrico, organizado de forma lógico-deductiva, que debía normativizar la forma definitiva en que debía de quedar el conocimiento matemático después de la aparición de los inconmensurables. En este sentido, el Libro V contendría el instrumento para llevar a cabo el programa euclídeo y por eso es uno de los más importantes de esta Biblia matemática.

Pero la revisión de los fundamentos traerá como secuela el desarrollo de la Geometría independiente de la Aritmética, la ausencia de un Álgebra en sentido algorítmico y simbólico y por tanto un enfoque exclusivamente geométrico de toda la Matemática griega

La solución de Eudoxo, de la Academia platónica, llamada *Teoría de la Proporción* –que al ser de naturaleza geométrica se aplica indistintamente a magnitudes conmensurables o inconmensurables como longitudes, áreas y volúmenes–, no es plasmada por Euclides en *Los Elementos* hasta llegar al Libro V, lo que le obliga a remodelar de forma muy ingeniosa la doctrina geométrica de los cuatro libros anteriores que es de origen pitagórico, sustituyendo las pruebas pitagóricas por demostraciones independientes de la citada teoría. El Libro V de *Los Elementos* proporcionaría, pues, una base lógica firme a todo resultado que en la Geometría griega tuviera que ver con proporciones –en particular las proposiciones pitagóricas sobre figuras semejantes del Libro VI, es decir, teoremas relativos a razones y proporciones que se presentan en el estudio de triángulos, paralelogramos y otros polígonos semejantes–. De esta forma pudo actualizarse con todo rigor y preservarse para la posteridad el legado geométrico pitagórico.

La influencia de los inconmensurables en el infinito de Aristóteles

La aparición de lo inconmensurable inaugura en el mundo griego los problemas infinitesimales asociados a la continuidad de los entes geométricos, que enfrenta la divisibilidad de los segmentos *ad infinitum* con la existencia atomística de partes intrínsecamente indivisibles, objeto de polémica entre los filósofos de la *Academia* posteriores a Platón y los del *Liceo* de Aristóteles, acerca de la constitución de la materia y la estructura del continuo.

Mientras la *Academia* platónica, dirigida por Xenócrates, defendía los indivisibles fijos, el Liceo, dirigido por Aristóteles, en sus especulaciones sobre la naturaleza del infinito, la existencia de indivisibles o infinitesimales y la divisibilidad de cantidades continuas, mantenía la continua divisibilidad de los entes geométricos (*Física*, Libro III, Cap.7, 207b):

> «*El continuo es infinitamente divisible*.»

La polémica entre la *Academia* y el *Liceo* ha tenido una gran repercusión ulterior en el desarrollo conceptual de la Matemática, inaugurando la dualidad Infinitesimales–Indivisibles, que establece la tradición cinemática representada por Arquímedes, Oresme, Galileo, Torricelli, Roberval, Barrow y Newton frente a la tradición atomística representada por Demócrito, Kepler, Cavalieri, Fermat, Pascal, Huygens y Leibniz.

Arístóteles considera toda magnitud finita, pero, como admite la infinita divisibilidad, rechaza el atomismo geométrico. La antinomia entre rechazo o admisión del infinito es resuelta acuñando los términos «*actual*» y «*potencial*». Un infinito «*en acto*», es decir, un todo constituido de una infinidad actual de cosas dadas, no puede ser pensado como inteligible; sin embargo si se puede pensar en una magnitud creciente por encima «*en potencia*» de todo límite, o en una serie de magnitudes cada vez más pequeñas que «*en potencia*» pueden hacerse más pequeñas que cualquier magnitud. Pero estas magnitudes, que no están dadas como una infinidad acabada, siendo susceptibles de prolongación «*tanto como se quiera*», puede decirse que son infinitas «*en potencia*». No obstante la doctrina aristotélica se hace confusa, por razones metafísicas, cuando se aplica al número, porque afirma el infinito extensivo del número, pero niega su divisibilidad indefinida. En efecto, hay un pasaje de la *Física* donde sintéticamente Aristóteles aplica la *Teoría de la potencia y el acto*, pero donde manifiesta el confusionismo aludido (*Física*, Libro III, Cap.7, 207a):

> «*El número, en un proceso de disminución hacia el mínimo, tiene un término; mientras, en un proceso de aumento, siempre se ve excedida cualquier cantidad que se tome. En las magnitudes, en cambio, ocurre todo lo contrario; pues en un proceso que tienda al mínimo, queda excedida negativamente toda magnitud; mientras que en un proceso de aumento no existe una magnitud infinita. La causa está en que el uno es un ser individual e indivisible, cualquiera que sea el ser uno, como por ejemplo, el hombre es un solo hombre y no muchos. Y el número es varias veces el uno y una cantidad determinada. De donde es necesario que se pare en el individuo. Pues el dos o el tres son parónimos, o números derivados, y lo mismo cualquier otro número. En efecto, en un proceso hacia el más, el número es siempre inteligible, ya que la magnitud se puede dividir indefinidamente por la mitad. Por esta razón existe el infinito en potencia, pero de ninguna manera en acto*.»

Para Aristóteles el infinito es como una ilusión del pensamiento que siempre puede traspasar potencialmente un límite prefijado, pero distingue la cuestión del infinitamente grande y el infinitamente pequeño en las magnitudes y en los números. En su exploración del infinito parece que para Aristóteles lo discreto y lo finito son objeto de la ciencia, reservando para la metafísica la virtualidad del continuo y del infinito.

La aplicación del infinito potencial a la división de un segmento de recta conducirá a los Infinitesimales, mientras que la aplicación de un infinito actual a la división de un segmento de recta en un número infinito de puntos introduce los Indivisibles, que sobre todo con Cavalieri se convirtieron en un poderoso soporte heurístico del Cálculo infinitesimal.

LOS INCONMENSURABLES Y EL INFINITO EN LA *FÍSICA* DE ARISTÓTELES

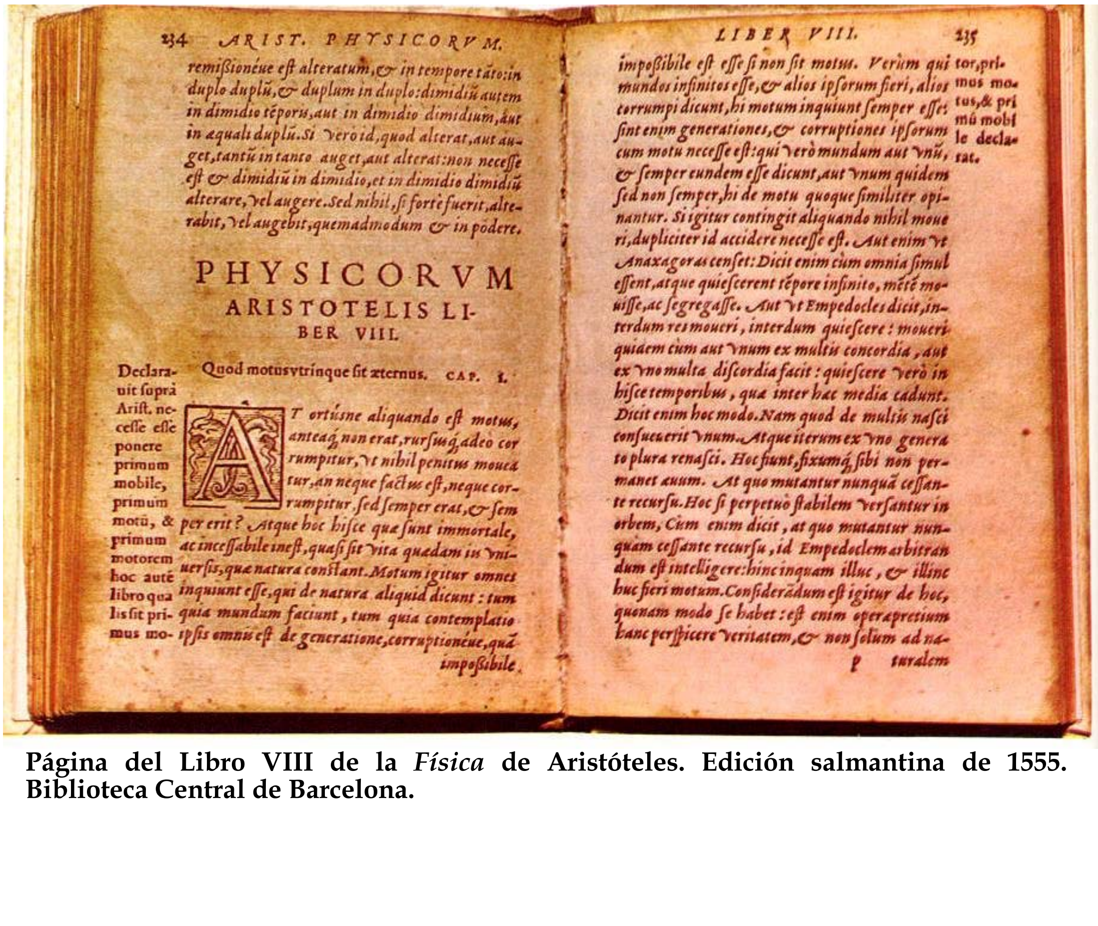
Aristóteles. Fragmento de la *Escuela de Atenas* de Rafael. Estancia de la Signatura. Vaticano.

La Teoría de magnitudes mediante la que Eudoxo resuelve de forma provisional pero rigurosa la crisis de los inconmensurables, tiene una gran influencia en la concepción que Aristóteles y *El Liceo* tienen sobre el infinito. De hecho en la *Física* donde expone su concepción sobre el infinito, la continuidad, la divisibilidad de magnitudes y el movimiento, Aristóteles conjuga el *Axioma de continuidad* con el *Principio de Eudoxo* cuando indica que al adicionar continuamente a una cantidad finita se sobrepasará toda otra cantidad finita y al sustraer continuamente de una cantidad se llegará a una cantidad menor que cualquier otra (*Física*, Libro VIII, Cap.10, 266b) :

> «*Sumando siempre algo al finito, sobrepasaremos todo finito; igualmente restándole algo, vendremos a caer por debajo de todo finito*.»

He aquí una descripción del infinito potencial en la Matemática, basado en la idea de «*tan grande o tan pequeño como se quiera*» del *Método de Exhaución* de Eudoxo, que destierra el infinito actual de la Matemática y que servirá ulteriormente de base a la noción de límite del Cálculo Infinitesimal. En palabras de Aristóteles (*Física*, Libro III, Cap.7, 208a) :

> «[...] *Los matemáticos actualmente no precisan del infinito en sus estudios, ni lo emplean en ellos, sino que conciben la existencia de una magnitud finita tan grande como se quiera* [...]»



234 ARIST. PHYSICORVM.

remissionéue est alteratum, & in tempore tãto: in duplo duplũ, & duplum in duplo: dimidiũ autem in dimidio tẽporis, aut in dimidio dimidium, aut in æquali duplũ. Si vero id, quod alterat, aut auget, tantũ in tanto auget, aut alterat: non necesse est & dimidiũ in dimidio, et in dimidio dimidiũ alterare, vel augere. Sed nihil, si fortè fuerit, alterabit, vel augebit, quemadmodum & in põdere.

PHYSICORVM ARISTOTELIS LIBER VIII.

Quod motus vtrinque sit æternus. CAP. I.

Declarauit suprà Arist. necesse esse ponere primum mobile, primum motũ, & primum motorem hoc autẽ libro qualis sit primus motor, primus motus, & primũ mobile declarat.

AT ortúsne aliquando est motus, anteaq; non erat, rursumq; adeò corrumpitur, vt nihil penitus moueatur, an neque factus est, neque corrumpitur, sed semper erat, & semper erit? Atque hoc hisce quæ sunt immortale, ac incessabile inest, quasi sit vita quædam iis vniuersis, quæ natura constant. Motum igitur omnes inquiunt esse, qui de natura aliquid dicunt: tum quia mundum faciunt, tum quia contemplatio ipsis omnis est de generatione, corruptionéue, quã impossibile

LIBER VIII. 235

impossibile est esse si non sit motus. Verùm qui mundos infinitos esse, & alios ipsorum fieri, alios corrumpi dicunt, hi motum inquiunt semper esse: sint enim generationes, & corruptiones ipsorum cum motu necesse est: qui verò mundum aut vnũ, & semper eundem esse dicunt, aut vnum quidem sed non semper, hi de motu quoque similiter opinantur. Si igitur contingit aliquando nihil moueri, dupliciter id accidere necesse est. Aut enim vt Anaxagoras censet: Dicit enim cùm omnia simul essent, atque quiescerent tẽpore infinito, mẽtẽ mouisse, ac segregasse. Aut vt Empedocles dicit, interdum res moueri, interdum quiescere: moueri quidem cùm aut vnum ex multis concordia, aut ex vno multa discordia facit: quiescere verò in hisce temporibus, quæ inter hæc media cadunt. Dicit enim hoc modo. Nam quod de multis nasci consueuerit vnum. Atque iterum ex vno generato plura renasci. Hoc fiunt, fixumq; sibi non permanet æuum. At quo mutantur nunquã cessante recursu. Hoc si perpetuò stabilem versantur in orbem, Cùm enim dicit, at quo mutantur nunquam cessante recursu, id Empedoclem arbitrandum est intelligere: hinc inquam illuc, & illinc huc fieri motum. Considerãdum est igitur de hoc, quonam modo se habet: est enim operæpretium hanc perspicere veritatem, & non solum ad na-

p turalem

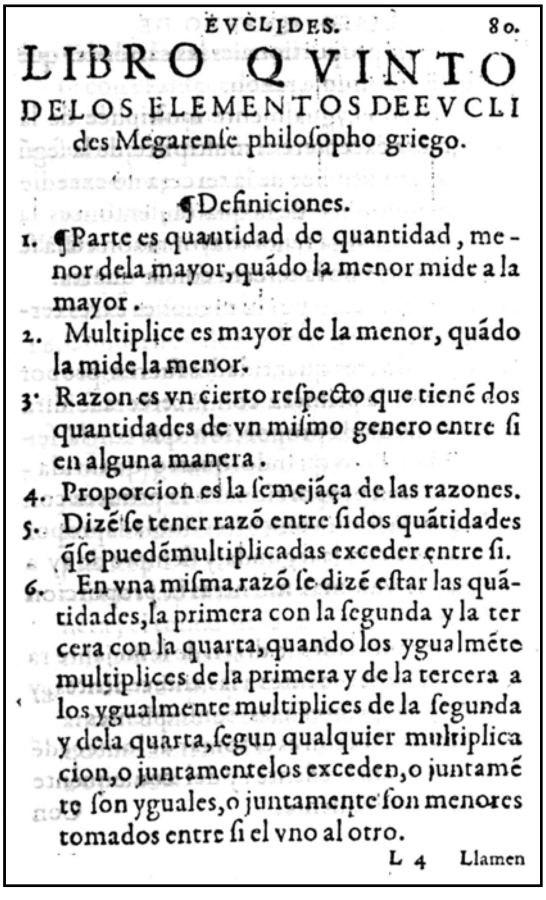
Página del Libro VIII de la *Física* de Aristóteles. Edición salmantina de 1555. Biblioteca Central de Barcelona.

La incidencia histórica del descubrimiento pitagórico de los inconmensurables y de la solución de Eudoxo, de la Academia platónica, a la consiguiente crisis de fundamentos de la Matemática griega que se resuelve en *Los Elementos* de Euclides

- **Geometría al margen de la Aritmética y del Álgebra.**
- **Conversión de toda la Matemática griega en Geometría.**
- **Limitación operacional que impide asignar a las figuras geométricas números que midan sus longitudes, áreas y volúmenes.**
- **Compilación de la Geometría griega elemental en *Los Elementos* de Euclides.**
- ***Teoría de la Proporción* de Eudoxo (Libros V, VI de *Los Elementos* de Euclides).**
- **Inauguración en el mundo griego de los problemas infinitesimales.**
- **Aparición de la idea de «*tan pequeño como se quiera*» del *Método de Exhaución* que produce resultados infinitesimales análogos al ulterior *cálculo de límites***
- ***Álgebra Geométrica. Aplicación de las áreas* (Libro II de *Los Elementos* de Euclides).**
- **Horror al infinito en la cultura griega.**
- ***Teoría de la Potencia el acto. Hilemorfismo* de Aristóteles.**
- **Énfasis en el rigor como supremo valor de la Matemática.**
- **Estilo sintético-apodíctico de exposición (*ars disserendi*) que oculta la vía heurística del descubrimiento (*ars inveniendi*) alcanzado por vía analítica o mecánica.**
- **El estilo axiomático deductivo de *Los Elementos* de Euclides se convierte en paradigma canónico de exposición y demostración (Obras de Arquímedes, Cónicas de Apolonio, ...)**


LOS SEIS LIBROS
PRIMEROS DELA GEOMETRIA
DE EVCLIDES.
Traduzidos en légua Eſpañola por Rodrigo çamorano Aſtrologo y Mathematico, y Cathedraticõ de Coſmographia por ſu Mageſtad en la caſa de la Contratació de Seuilla
Dirigidos al illuſtre ſeñor Luciano de Negrõ, Canonigo dela ſancta ygleſia de Seuilla.

Con licencia del Conſejo Real.
En Seuilla en caſa de Alonſo de la Barrera.
1576.
Eſta taſſado en


EVCLIDES. 80.

LIBRO QVINTO
DELOS ELEMENTOS DE EVCLIDES Megarenſe philoſopho griego.

¶Definiciones.

1. ¶Parte es quantidad de quantidad, menor dela mayor, quãdo la menor mide a la mayor.
2. Multiplice es mayor de la menor, quãdo la mide la menor.
3. Razon es vn cierto reſpecto que tienẽ dos quantidades de vn miſmo genero entre ſi en alguna manera.
4. Proporcion es la ſemejãça de las razones.
5. Dizẽ ſe tener razõ entre ſi dos quãtidades q ſe puedẽ multiplicadas exceder entre ſi.
6. En vna miſma razõ ſe dizẽ eſtar las quãtidades, la primera con la ſegunda y la tercera con la quarta, quando los ygualmẽte multiplices de la primera y de la tercera a los ygualmente multiplices de la ſegunda y dela quarta, ſegun qualquier multiplicacion, o juntamente los exceden, o juntamẽte ſon yguales, o juntamente ſon menores tomados entre ſi el vno al otro.

L 4 Llamen

1. **Portada de la primera edición en idioma castellano de *Los Elementos* de Euclides (Rodrigo Çamorano, Sevilla, 1576). En 1997 con motivo de la celebración en Salamanca de las VIII Jornadas de Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas, se hizo una edición facsimilar de esta edición. De ella proceden las ilustraciones.**

2. **Portada del Libro V de la edición de R.Çamorano. Contiene las primeras definiciones de la *Teoría de la Proporción* de Eudoxo, que resuelve la crisis del inconmensurable, pero como otras ediciones coetáneas, interpola entre la 3 y la 4 la siguiente : «4. *Proporción es la semejanza de las razones*», que está sacada de las obras de Aritmética, aunque Aristóteles ya había definido proporción, referida a números, como «*igualdad de las relaciones entre términos en número de cuatro por lo menos*», es decir: «*igualdad de razones*» (Ética a Nicómaco, LibroV, cap.3, 1131a). De esta forma las importantes definiciones V.4 (*axioma de continuidad* de Eudoxo–Arquímedes) y V.5 (igualdad de razones) quedan desplazadas al quinto y sexto lugar, respectivamente.**

Bibliografía

Bibliografía de Historia de la Ciencia y de la Matemática

1. ARQUÍMEDES: *El Método.* Introducción de J.Babini. EUDEBA, Buenos Aires, 1966. Introducción.
2. BELL,E.T.: *Les grands mathématiciens*. Payot. París, 1950. Cap.2.
3. BELL,E.: *Historia de las Matemáticas*. Fondo de Cultura Económica, México, 1985. Cap.1.
4. BOYER,C: *The History of the Calculus and its conceptual development*. Dover, NY, 1949. Cap.2.
5. BOYER,C.: *Historia de las Matemáticas.* Alianza Universidad, Madrid, 1986. Caps. 4,5,6,7.
6. BUNT, L.: *The Historical Roots of Elementary Mathematics*. Dover, New York, 1988. Cap. 3.10.
7. COLERUS,E.: *Breve historia de las Matemáticas*. Doncel, Madrid, 1972. Vol.1. Caps. 1,2.
8. DUNHAM,W.: *Viaje a través de los genios*. Ed. Pirámide. Madrid, 1992. Cap.1.
9. DURÁN,A.: *Historia de los conceptos del Cálculo*. Alianza Universidad. Madrid, 1996. Cap.2
10. EDWARDS,H.: *The Historical Development of the Calculus*. Springer-Verlag, New York, 1979. Caps. 1.3, 1.4, 1.5.
11. EVES,H.: *Great Moments in Mathematics*. The math. Assoc. of America, 1977. Vol.1. Caps. 5, 6.
12. EVES,H.: *An Introduction to the History of Mathematics*. CBS College Publishing, New York, 1983. Caps. 3.5, 3.7, 5.5.
13. FRITZ,K.: *The discovery of incommensurability by Hippasus of Metapontum*. Annals of Mathematics, 46, 242-64, 1945.
14. GARCÍA BACCA,J.D.: *Textos clásicos para la Historia de las ciencias.* Univer.C, Caracas, 1961.
15. GUEDJ, D.: *El imperio de las cifras y los números*. Ediciones B.S.A. Barcelona, 1988. Cap.V.
16. GUTHRIE,W.: *Pitágoras y los pitagóricos* (en *Historia de la Filosofía griega*). Vol.I. Gredos, Madrid, 1999.
17. GONZÁLEZ URBANEJA,P.M.: *Las raíces del Cálculo Infinitesimal en el siglo* XVII. Alianza Universidad, Madrid, 1992. Cap. 1.1.1.
18. GONZÁLEZ URBANEJA, P.M; VAQUÉ, J.: *El método relativo a los teoremas mecánicos de Arquímedes*. Pub. Univ. Autón. Barcelona, Ed. Univ. Politèc. Catalunya. Colección *Clásicos de las Ciencias.* Barcelona, 1993. Edición crítica en Español de esta obra de Arquímedes. Apéndice 1.
19. GONZÁLEZ URBANEJA, P.M; y VAQUÉ, J.: *Mètode d'Arquimedes sobre els teoremes mecànics dedicat a Eratòstenes*. Fundació Bernat Metge. Barcelona, 1997. Edició crítica en català d'aquesta obra d'Arquimedes. Cap. II.1.
20. GONZÁLEZ URBANEJA,P.M.: *Matemáticas y matemáticos en el mundo griego* (en *El legado de las Matemáticas: de Euclides a Newton*). pp.24-75.Universidad de Sevilla, 2000. Cap.1.
21. GONZÁLEZ URBANEJA,P.M.: *La aparición de los inconmensurables*. Mundo Científico, 220, pp.56-63, Barcelona, 2001.
22. GONZALEZ URBANEJA,P.M.: Legado y herencia de Pitágoras (en *APUNTES DE CPR*. Nº 10. pp. 16-21), Palencia, 2001.
23. GONZALEZ URBANEJA,P.M.: *Los orígenes de la Geometría Analítica*. Fundación Canaria *Orotava* de Historia de la Ciencia, Tenerife, 2003. Cap.2.
24. HEAT, T.L.: *A History of Greek Mathematics*. Dover, New York, 1981. Vol.1. Caps. 3,5,9,10.
25. KLINE, M.: *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días*. Alianza Universidad, Madrid, 1992. Vol.1. Caps. 3,4.
26. KNORR,W.: *The evolution of the Euclidian Elements*. D.R.P.Company. Londres, 1990. Caps. 1,2,3,4,6,7,8,9.
27. LEVI.B.: *Leyendo a Euclides*. Zorzal, Buenos Aires, 2001. Cap.1
28. LORIA,G.: *Histoire des sciences mathématiques dans l'antiquité hellénique*. Gauthier-Villars, París, 1929. Cap.2.
29. MAZA,C.: *Las matemáticas de la antigüedad y su contexto histórico*. Univ. Sevilla, 2000. Cap.6.3.
30. MILLÁN,A.: *Euclides*, *la fuerza del razonamiento matemático.* Nivola, Madrid, 2004
31. MONTESINOS,J. (Coordinador): *Historia de la Geometría griega*. Actas del Seminario *Orotava* de Historia de la Ciencia. Tenerife, 1992. Caps. 4, 5, 12.
32. MONTESINOS,J.: *Historia de la Matemática en la Enseñ. Secund*. Síntesis. Madrid, 2000. Cap.1.
33. MONTUCLA,J.F.: *Histoire des Mathématiques*.. Blanchard. París, 1968. Vol.1, Caps. 1.3.7, 1.3.9.
34. NOLLA,R.: *Estudis i activitats sobre problemes clau de la Història de la Matemàtica.* Departament d'Ensenyament, Generalitat de Catalunya. Barcelona, 2001. Cap. 1.2.3.
35. PÉREZ SANZ,A.: Serie de TVE "*EL UNIVERSO MATEMÁTICO*". (*Pitágoras: mucho más que un teorema)*. La Aventura del Saber, 2000.
36. REY,A.: *El apogeo de la ciencia técnica griega*. UTEHA, México 1962. Vol.2. Caps. 2, 3, 8.
37. REY PASTOR,J.; BABINI,J: *Historia de la Matemática*. Espasa-Calpe, B. Aires, 1951. Cap. 2.7.4.
38. REY PASTOR,J.; BABINI,J: *Historia de la Matemática*. Gedisa,. Barcelona, 1984. Vol.1. Cap. 3.3.
39. ROUSE BALL,W: *Histoire des Mathématiques***.** Libr. scientifique A.Hermann, París, 1906. Cap.2.
40. SMITH,D.E.: *History of Mathematics*. Dover. New York, 1958. Vol.2, cap. 4.4.

41. TANNERY,P.: *La géométrie grecque*. Gauthier-Villars. París,1887. Caps. 5,6.
42. TATON,R.: (compilador): *Historia general de las Ciencias*. Orbis. Barna, 1988. Vol.1. Lib.1, Cap.3.
43. THE OPEN UNIVERSITY: La aparición de la Matemática griega (en *Topics in History of Mathematics*). BBC, TV, Londres, 1987.
44. TOEPLITZ,O.: *The Calculus, a Genetic Approach*. University of Chicago Press, Chicago, 1963. Caps.1.1, 1.2, 1.3.
45. VERA,F: *Breve Historia de la Geometría*. Losada, Buenos Aires, 1963. Caps. 2,4.
46. WARUSFEL, A.: *Los números y sus misterios*. Martínez Roca. Barcelona, 1968. Cap.5.
47. WUSSING,H.: *Lecciones de Historia de las Matemáticas*. Siglo XXI, Madrid, 1989. Cap.3.2.5.

Bibliografía de Historia de la Filosofía y Filosofía de la Ciencia y de la Matemática

48. ARISTÓTELES: *Analítica Primera*, *Metafísica*, *Física* (en Obras). Aguilar, Madrid, 1967.
49. ARTMANN,B.: *Euclid–The Creation of Mathematics*. Springer, New York, 1996. Caps. 23,24.
50. BECKER,O.: *Magnitudes y límites del pensamiento matemático*. Rialp, Madrid, 1996. Caps. 1,3.
51. BRUNSCHVICG,L.: *Les étapes de la Philosophie Mathémat.* Blanchard, París, 1972. Caps. 3,4,5.
52. CAÑÓN,C.: *La Matemática, creación y descubrimiento*. Un.Pont. Comillas. Madrid,1993. Cap.1.II.
53. DANTZING,T.: *El número, lenguaje de la ciencia*. Hobbs sudamer., Buenos Aires, 1971. Cap. VII.
54. DIVERSOS AUTORES: *Historia del Pensamiento*. Ediciones Orbis, Barcelona, 1983. Vol.1.
55. EGGERS,C.: *El nacimiento de la Matemática en Grecia*. EUDEBA, Buenos Aires, 1995. Cap.6.
56. FOWLER,D.: *The Mathematics of Plato's Academia*. Oxford U.P. New York, 1999. Caps. 2.2, 8.3.
57. GARDIES,J.: *L'Héritage épistémologique d'Eudoxe de Cnide*. Librairie philosophique Vrin, París, 1988. Caps. 1,2,3,4.
58. GUTHRIE,W.: *Pitágoras y los pitagóricos* (en *Historia de la Filosofía griega*. Vol.I. Cap.IV). Gredos, Madrid, 1984.
59. GÓMEZ PIN,V.: *La tentación pitagórica*. Síntesis, Madrid, 1999. Cap. 2.3.
60. GONZALEZ URBANEJA,P.M.: *Pitágoras, el filósofo del número*. Nivola, Madrid,2001. Caps.3,5,6.
61. HARDY,G.: *Apología de un matemático*. Nivola. Madrid, 1999.
62. JÁMBLICO. *Vida Pitagórica*. Etnos, Madrid, 1991. Cap. XXXIV.246-247.
63. HILL,J.M.: *The Theory of Proportion*. The Mathematical Gazette, VI, 324–332, 360–368, 1912.
64. KNORR,J.M.: *Archimedes and the preeuclidean proportion theory*. Archives Internat. History. Sciences, 28, 183–244,1978.
65. KNORR.W.: *Aristotle and Incommensurability: Some Further Reflections*. Archive for History of Exacts Sciences, 24, 1-9, 1981.
66. LORENZO,J.: *Introducción al estilo matemático*. Tecnos, Madrid, 1971. Cap.1.
67. MILHAUD,G.: *Les Philosophes-Géométres de la Grèce*. Arno Press. New York, 1976. Cap. 1.2.
68. MONDOLFO,R: *El infinito en el pensamiento de la antigüedad clásica*. EUDEBA, Buenos Aires, 1971. Caps. 4, 5.
69. PLATÓN: *Teeteto*, *Leyes*, *Menón* (en Obras *Completas*). Aguilar, Madrid, 1969.
70. REALE,G.: *Historia del Pensamiento filosófico y científico.* Herder, Barna, 2001. Vol.1. Cap.II.2.
71. RUSSELL,B.: *Historia de la filosofía occidental*. Austral.Madrid,1995. Vol.1. Lib.1. Cap.3.
72. SERRES,M. (Compilador): *El Saber griego*. Akal, Madrid, 2000. Caps. 3.3, 3.11.
73. SPENGLER,O.: *La decadencia de Occidente*. Cap.I.1. Austral, Madrid, 1998.
74. SZABÓ,A.: *Les débuts des Mathématiques grecques*. Librairie Vrin, París, 1977. Cap.1.
75. THE OPEN UNIVERSITY: La aparición de la Matemática griega (en *Topics in History of Mathematics*). BBC, TV, Londres, 1987.
76. VEGA REÑÓN,L.: *La Trama de la Demostración*. Alianza Universidad, Madrid, 1990. Cap.1.
77. VERA,F: Fragmentos de textos y Comentarios sobre Pitágoras, Platón y Aristóteles (en *Científicos griegos*). Aguilar, Madrid, 1970.

Ediciones de *Los Elementos* de Euclides

78. ENRIQUES,F.: *Los Elementos de Euclides y la crítica antigua y moderna*. *Libros* I-IV. Instituto Jorge Juan (CSIC). Madrid. 1954.
79. EUCLIDES: *Los seis primeros libros de Los Elementos*. Traducción de Rodrigo Çamorano. Casa de Alonso de la Barrera. Sevilla, 1576. Nueva edición de 1999 de Ed. Universidad de Salamanca.
80. EUCLIDES: *Elementos*. Introd. de L.Vega, traduc. y notas de M.L.Puertas. Gredos. Madrid, 1996.
81. EUCLIDES: *Elementos*. Trad. y notas J.D. García Bacca. Univers. Nac.l Autón. de México, 1944.
82. HEAT,T.L.: *The thirteen books of The Elements*. 3 Vols. Dover. New York, 1956.
83. PEYRARD,F.: *Les Oevres d'Euclide*. C.F.Patris, París, 1819.
84. VERA,F.: *Los Elementos de Euclides* (en *Científicos griegos*). Aguilar, Madrid, 1970.