

## **ALGUNS DOCUMENTS DE GEORGE POLYA**

**Traducció de Xavier Valls**

Traducció del que G. Polya titula "la llista" en el seu llibre "COMO PLANTEAR Y RESOLVER PROBLEMAS" i un diàleg entre un professor i un alumne alhora de resoldre un problema, que constitueixen les qüestions que ens plantegem quan resollem un problema.

### **PER RESOLDRE UN PROBLEMA ÉS NECESSARI:**

#### **I. COMPRENCIÓ DEL PROBLEMA**

- Quina és la incògnita? Quines són les dades?
- Quines són les condicions? Són suficients per determinar la incògnita? Són insuficients? Són redundants? Són contradictòries?
- Fes un dibuix. Simbolitza el problema de forma adient.

#### **II. CONCEPCIÓ D'UN PLA**

- T'has trobat amb un problema semblant o plantejat d'una manera més o menys igual?
- Coneixes un problema que pugui estar relacionat amb aquest? Coneixes algun teorema que et pugui ser útil? Mira la incògnita i intenta recordar un problema que et sigui familiar i tingui la mateixa incògnita o una de semblant.
- Aquí tens un problema relacionat amb el teu i ja resolt. Pots utilitzar-lo? Pots utilitzar el seu resultat? Podries utilitzar el mateix mètode? Hauries d'introduir algun altre element que et permetés utilitzar aquest mètode?
- Pots enunciar el problema d'una altra forma? Pots plantejar-lo de nou d'una manera diferent?
- Si no pots resoldre el problema proposat, intenta resoldre primer algun problema semblant. Pots imaginar un problema anàleg que te sigui més fàcil? Un problema més general? Un cas particular? Un problema anàleg? Pots resoldre una part del problema? Considera una part de les condicions, descarta la resta, la incògnita, ara, és més fàcil de determinar?, com pot variar? Pots deduir de les dades algun element d'utilitat? Pots pensar en algunes altres dades que et permetin determinar la incògnita? Pots canviar la incògnita? Pots canviar la incògnita o les dades, o tots dos, de manera que la nova incògnita i les noves dades siguin més fàcils de relacionar?
- Has utilitzat totes les dades? Has utilitzat totes les condicions? Has tingut en compte tots el coneixements que fan referència al problema?

#### **III. EXECUCIÓ DEL PLA**

- Mentre portes a terme el pla per trobar la solució, comprova cada un dels passos.
- Pots veure que el pas és correcte. Pots demostrar-lo?

#### **IV. VISIÓ RETROSPECTIVA**

- Pots verificar la solució obtinguda? Pots verificar el raonament utilitzat?
- Pots obtenir el resultat de diferent forma? Pots veure'l d'un cop d'ull? Pots utilitzar el resultat o el mètode en algun altre problema?

## COM RESOLDRE UN PROBLEMA: Un diàleg

### Familiaritzar-se amb el problema

- *Per on he de començar?* Comença per l'enunciat del problema.
- *Què puc fer?* Intenta visualitzar el problema com un tot, tan clarament com puguis. De moment no et preocupis dels detalls.
- *Què hi guanyo fent això?* Comprendràs el problema, et familiaritzaràs amb ell, tenint present la intencionalitat del problema en la teva ment. L'atenció dedicada al problema pot estimular la teva memòria i preparar-la per captar els punts importants.

### Treballar per una millor comprensió

- *Per on he de començar?* Comença un altre cop per l'enunciat del problema. Comença quan aquest enunciat sigui tan clar i el tinguis tan ben gravat en la teva ment que el puguis perdre de vista sense por de perdre'l per complet.
- *Què puc fer?* Aïllar les principals parts del problema. La hipòtesi i la conclusió són les principals parts d'un "problema per demostrar"; la incògnita, les dades i les condicions són les principals parts d'un "problema per resoldre". Ocupa't de les parts principals del problema, considera-les una per una, torna-les a considerar, considera-les després combinant-les entre si, establint les relacions que hi pugui haver entre cada detall i els altres i entre cada detall i el conjunt del problema.
- *Què hi guanyo fent això?* Estàs preparant i aclarint detalls que probablement entraran en joc més tard.

### En busca d'una idea útil

- *Per on he de començar?* Comença per considerar les parts principals del problema. Comença quan aquestes parts estiguin, per tu, clarament disposades i concebudes, gràcies al teu treball previ, i quan consideris que la teva memòria "respon".
- *Què puc fer?* Considera el problema des de diferents punts de vista i busca punts de contacte amb els teus coneixements prèviament adquirits. Considera el problema des de diferents punts de vista. Subratlla les diferents parts, examina els diferents detalls, examina els mateixos detalls repetidament, però de diferent mode, combina entre si els detalls de diferents maneres, ataca'ls per diferents costats. Tracta de veure un nou significat a cada detall, una nova interpretació de tot el conjunt. Busca punts de contacte amb els teus coneixements adquirits prèviament. Intenta de recordar en què t'han ajudat abans en circumstàncies anàlogues. Tracta de reconèixer alguna cosa familiar en el que examines i de trobar alguna cosa útil en el que reconeixes.
- *Què puc trobar?* Una idea que et sigui útil, potser una idea decisiva que t'ensenyi de cop com arribar a la solució del problema.
- *Com pot ser útil una idea?* Fent-te veure el conjunt del problema o una part d'aquest. Et suggereix més o menys clarament com pots actuar. Les idees són més o menys terminants. És una sort tenir una idea sigui quina sigui aquesta.
- *Què puc fer amb una idea incompleta?* L'has de considerar. Si sembla encertada, l'has de considerar més a fons. Si sembla digna de confiança, has d'esbrinar fins on et pot dur i has de tomar a examinar la situació. La situació ha canviat gràcies a una

idea útil. Considera la nova situació des de diferents punts de vista i busca punts de contacte amb els teus coneixements previs.

- *Què hi guanyo tornant a fer això?* Pots tenir la sort de trobar alguna altra idea. Potser la nova idea et condueixi directament al camí de la solució. Potser necessitis encara alguna idea més. Àdhuc és possible que alguna d'aquestes idees et desviï del camí correcte. Tan mateix això, has d'alegrar-te per tota idea nova que surti, també per les de poca importància o confuses, i també per les idees suplementàries que afegeixin alguna precisió a una idea confusa o permetin la correcció d'una idea no tan afortunada. Àdhuc si, durant una estona no se't presenta una idea veritablement bona; considera't afortunat si la teva concepció del problema es fa més completa o més coherent, més homogènia o més equilibrada.

### **Execució del pla**

- *Per on he de començar?* Comença per la idea feliç que et condueix a la solució. Comença quan estiguis segur de tenir el punt de partida correcte i estiguis segur de poder superar els detalls menors que puguis necessitar.
- *Què puc fer?* Assegura't que tens una plena comprensió del problema. Fes en detall totes les operacions (algebraïques o geomètriques) que prèviament has reconegut com factibles. Comprova la validesa de cada pas, bé per un raonament formal, bé per un discerniment intuïtiu o per ambdós mitjans, si és possible. Si el problema és molt complex, pots distingir "grans" passos compostos de diversos "petits" passos. Comprova primer els grans passos i considera després els petits.
- *Què hi guanyo fent això?* Una presentació de la solució per la qual l'exactitud i la correcció de cada pas no ofereix cap dubte.

### **Visió retrospectiva**

- *Per on he de començar?* Per la solució, completa i correcta en tots els seus detalls.
- *Què puc fer?* Considerar la solució des de diferents punts de vista i buscar els punts de contacte amb els seus coneixements previs. Considerar els detalls de la solució i tractar de fer-los tan senzills com es pugui; torna'ls a examinar més extensament i tractar de condensar-los; captar a primer cop d'ull la solució completa. Variar, per millorar-les, tan les parts principals com les secundàries; millorar la solució en el seu conjunt de forma que es faci evident per ella mateixa i quedi gravada, de forma natural, en el conjunt de coneixements previs. Examinar amb atenció el mètode que ha portat a la solució, captar la seva raó de ser i la seva aplicació a altres problemes. Examinar amb atenció el resultat i buscar la seva aplicació a altres problemes.
- *Què hi guanyo fent això?* Pots trobar una solució millor i diferent, descobrir nous fets interessants. En tot cas, amb l'hàbit de considerar les solucions i examinar-les atentament, s'assoleixen una sèrie de coneixements correctament ordenats utilitzables en qualsevol moment, alhora que es desenvolupa l'aptitud en la resolució de problemes.

# Del llibre “Mathematical Discovery” de Gorge Polya

CAPÍTOL 5 (Traducció: Xavier Valls)

## PROBLEMES

*La resolució de problemes és la més gran característica i el tipus més peculiar de pensament voluntari.*

WILLIAM JAMES

### 5.1. Què és un problema?

En el que segueix, la paraula “problema” s’ha d’entendre en un sentit molt ampli. El nostre primer objectiu és posar de manifest aquest sentit.

Aconseguir menjar no és un problema normalment en la vida moderna. Si tinc gana a casa, agafo alguna cosa de la nevera, i vaig a un bar, una cafeteria o algun lloc similar si em trobo pel carrer. L’assumpte és diferent, tan mateix, quan a la nevera no hi ha res o estic pel carrer sense diners; en aquest cas, aconseguir menjar es converteix en un problema.

Generalment, un desig pot comportar un problema o no. Si el desig suggereix a la meva ment de forma immediata, sense cap dificultat, una acció obvia que permet aconseguir l’objecte desitjat, no hi ha problema. Si, tan mateix, no se m’acut cap acció, tenim un problema. En conseqüència, tenir un problema significa: *buscar de forma conscient alguna acció apropiada per aconseguir un fi clarament concebut, però que no es pot aconseguir de forma immediata*. Resoldre un problema significa trobar aquesta acció.

Un problema és un “gran” problema si té una gran dificultat, és simplement un “petit” problema si únicament té una petita dificultat. Com que un cert grau de dificultat pertany a la noció real d’un problema: on no hi ha dificultat, no hi ha problema.

Un típic problema consisteix en trobar el camí a un punt predeterminat en una petita regió coneguda. Podem fàcilment imaginar lo seriós que podria ser aquest problema pels nostres primitius antecessors que poblaven boscos primaverals. Aquesta pot ser o no la raó per la qual la solució de qualsevol problema se’ns presenta un xic com trobar un camí: un camí per passar per sobre una dificultat, un camí per vorejar un obstacle.

La major part del nostre pensament conscient està relacionat amb problemes. Quan no ens dediquem a meres distraccions o somniar deserts, els nostres pensaments estan dirigits cap algun fi, busquem camins i recursos per aquest fi, intentem pensar en alguna direcció seguint la qual podem aconseguir el nostre propòsit.

Resoldre problemes és la finalitat específica de la intel·ligència, i la intel·ligència és el do específic de l’home. La habilitat per voltar un obstacle, per agafar una via indirecta on no se’n presenta cap de directa, eleva l’animal llest sobre de l’obtús, eleva l’home molt per sobre dels animals més llestos, i els homes de talent per sobre els seus companys humans. Res no és més interessant per nosaltres éssers humans que l’activitat humana. L’activitat humana més característica és resoldre problemes, pensar en un propòsit, inventar objectes amb un fi desitjat. El nostre propòsit és entendre aquesta activitat - em sembla que aquest propòsit mereix una gran quantitat d’interès.

En el que precedeix, hem estudiat problemes matemàtics elementals, agrupant junts problemes abordables pel mateix mètode de resolució. Hem aconseguit d’aquesta manera

una certa base experimental i, d'aquesta base, intentarem ara pujar a una més gran generalitat, intentant abraçar, tan lluny com sigui possible, Fins i tot problemes no matemàtics. Proposar un mètode general aplicable a tot tipus de problemes pot semblar massa ambiciós, però és prou natural: donat que la varietat de problemes amb que podem enfrontar-nos és infinita, cada un de nosaltres té únicament un cap per resoldre'ls, i per tant naturalment desitgem un únic mètode per resoldre'ls.

## 5.2. Classificació de problemes

Un estudiant fa un examen escrit de matemàtiques; es tracta d'un estudiant dins de la mitjana, però ha treballat força per preparar-se per aquest examen. Després d'haver llegit un problema proposat, es pot preguntar: “Quin tipus de problema és aquest?” De fet, li seria profitós fer-se aquesta pregunta: si pot classificar el seu problema, reconèixer el tipus, situar-lo en tal i tal capítol de seu llibre de text, ha fet algun avenç: ara pot recordar el mètode que va aprendre per resoldre aquest tipus de problema.

El mateix és veritat, en un cert sentit, per a tots els nivells de resolució de problemes. La pregunta “Quin tipus de problema és aquest?” porta a la següent pregunta “Què es pot fer amb aquest tipus de problema” i aquestes preguntes es poden formular de forma profitosa fins i tot quan es fa recerca de primera línia.

I per tant pot ser útil classificar problemes, distingir problemes de diferent tipus. Una bona classificació hauria d'introduir unes tipologies tal que *el tipus de problema pugui suggerir el tipus de resolució*.

No ens posarem ara a fer una classificació detallada, o gairebé perfecta. Interpretant amb una certa laxitud una tradició que prové d'Euclides i els seus comentaristes, únicament desitgem caracteritzar dos tipus de problemes molt generals.

Els Elements d'Euclides contenen axiomes, definicions, i “proposicions”. Els seus comentaristes i algun dels seus traductors distingeixen dos menes de “proposicions”: el propòsit del primer tipus (el nom en llatí és “problema”) és construir una figura, el propòsit del segon tipus (el nom en llatí és “teorema”) és demostrar un teorema. Estenent aquesta distinció, considerarem dos tipus de problemes, problemes “per trobar” i problemes “per demostrar”. La finalitat d'un *problema per trobar* és trobar (construir, produir, obtenir, identificar,...) un determinat objecte, la incògnita del problema. La finalitat d'un *problema per demostrar* és decidir quan una determinada afirmació és certa o falsa, provar-la o refutar-la.

Per exemple, quan es pregunta “Què ha dit?” es proposa un problema per trobar. Mentre, quan es pregunta “Ha dit això?” es proposa un problema per demostrar.

Per més detalls sobre aquest dos tipus de problemes veieu les dues properes seccions.

## 5.3. Problemes per trobar

La finalitat d'un “problema per trobar” consisteix en trobar un cert objecte, la *incògnita* del problema, de forma que satisfaci la *condició* del problema que relaciona la incògnita amb les *dades* del problema. Anem a considerar dos exemples.

“Donats dos segments  $a$  i  $b$ , i l'angle  $\gamma$ , construir un paral·lelogram del qual els segments donats siguin costats adjacents formant l'angle  $\gamma$ ”.

“Donats dos segments  $a$  i  $b$ , i l'angle  $\gamma$ , construir un paral·lelogram del qual els segments donats siguin les diagonals formant l'angle  $\gamma$ ”.

En els dos problemes, les dades són les mateixes: els segments  $a$  i  $b$ , i l'angle  $\gamma$ . En els dos problemes, la incògnita és un paral·lelogram i per tant els nostres problemes no són *a priori* distingibles per la naturalesa de la incògnita. El que fa diferents els nostres dos problemes és la condició, la relació exigida entre la incògnita i les dades: naturalment, la relació d'un paral·lelogram amb els seus costats és diferent de la seva relació amb les seves diagonals.

La *incògnita* pot ser una categoria molt variada. En un problema de construcció geomètrica la incògnita és una figura, per exemple un triangle. Quan resollem una equació algebraica, la nostra incògnita és un nombre, una arrel d'aquesta equació. Quan preguntem “Què ha dit?” la incògnita pot ser una paraula, o una seqüència de paraules, una frase, o una seqüència de frases, un discurs. Un problema clarament enunciat ha d'especificar la categoria (el conjunt) al que la incògnita pertany; hem de saber d'entrada quin tipus d'incògnita se suposa que hem de trobar: un triangle, o un nombre, o una paraula, o ...

Un problema clarament enunciat ha d'especificar la *condició* que la incògnita ha de satisfer. En el conjunt d'objectes especificat pel problema al qual la incògnita ha de pertànyer, hi ha el subconjunt dels objectes que satisfan la condició, i qualsevol objecte pertanyent en aquest subconjunt s'anomena una *solució*. Aquest subconjunt pot contenir únicament un objecte: aleshores la solució és única. Aquest subconjunt pot ser buit: aleshores no hi ha solució. (Per observacions sobre el terme “solució” veure ex. 5.13.) Observem aquí que un problema per trobar pot agafar-se en diferents significats. Considerat en sentit estricte, el problema exigeix trobar (produir, construir, identificar, llistar, caracteritzar, ...) *totes* les solucions (el subconjunt complet abans mencionat). Considerat en un sentit més ampli, el problema pot demanar buscar una única (qualsevol) solució, o algunes solucions. A vegades n'hi ha prou en decidir l'existència d'un solució, és a dir, decidir si el conjunt de solucions és buit o no. És normal considerar problemes matemàtics en el sentit estricte a no ser que s'expliciti el contrari de forma clara, però per la majoria de problemes pràctics el “sentit estricte” tindrà poc sentit.

Quan tractem amb problemes matemàtics (a no ser que el context indiqui el contrari) utilitzarem la frase “les dades” per indicar tots els objectes (o el seu conjunt complet) donats (coneguts, admesos, ...) connectats amb la incògnita per la condició. Si el problema és construir un triangle a partir dels seus costats  $a$ ,  $b$ , i  $c$  les dades són els tres segments  $a$ ,  $b$ , i  $c$ . Si el problema és resoldre l'equació quadràtica

$$x^2 + ax + b = 0$$

les dades són els dos nombres donats  $a$ , i  $b$ . Un problema pot tenir únicament una dada, o fins i tot cap dada. Aquí en teniu un exemple: “Troba la raó de l'àrea d'un cercle a l'àrea d'un quadrat circumscrit”. La raó demanada és independent de la mida de la figura i per tant no és necessari donar la longitud del radi o cap dada d'aquest tipus.

Anomenarem la incògnita, la condició, i les dades les *parts principals* d'un problema per trobar. De fet, no podem de forma raonable esperar resoldre un problema que no hem entès. Encara més, per entendre un problema, hem de saber, i saber molt bé, qui és la incògnita, quines són les dades, i quina és la condició. I per això és convenient quan estem treballant amb un problema dedicar una atenció especial a les seves parts principals.

## 5.4. Problemes per demostrar

Hi ha un cert rumor que, en una certa ocasió, el Secretari “Fulano” va utilitzar una expressió extremadament aspra (que no reproduïrem aquí) referint-se al Congressista “Sutano”. Es tracta tot just d'un rumor al que no se li atribuïa molta credibilitat. La pregunta “Va dir això?” va inquietar a moltes persones, es va debatre a la premsa, es va mencionar en una comissió del congrés, i pot arribar als tribunals. Qui es prengui la pregunta de forma seriosa té un “problema per demostrar” en les seves mans: ha d'eliminar el dubte sobre el rumor, ha de provar la utilització de la pretesa expressió o refutar-ho, i la prova o la refutació s'ha de sustentar per la millor evidència possible.

Quan tenim un “problema per demostrar” matemàtic, hem d'eliminar el dubte sobre una afirmació matemàtica  $A$ , clarament enunciada, hem de provar  $A$  o refutar  $A$ . Un famós problema no resolt d'aquest tipus consisteix en provar o refutar la conjectura de Goldbach: Si l'enter  $n$  és parell i  $n > 4$ , aleshores  $n$  és suma de dos primers senars<sup>1</sup>.

L'afirmació de Goldbach (és únicament una afirmació, no sabem encara si és veritat o falsa) ha estat enunciada aquí de la *manera més usual* en que ho són les proposicions matemàtiques: consta de *hipòtesi* i *conclusió*; la primera part començant amb “Si” és la hipòtesi, la segona part començant amb “aleshores” és la conclusió<sup>2</sup>.

Quan hem de provar o refutar una proposició matemàtica enunciada de la manera més usual, la hipòtesi i la conclusió de la proposició s'anomenen les *parts principals* del nostre problema. De fet, aquestes parts principals mereixen una atenció especial. Per provar la proposició hem de descobrir un lligam lògic entre les parts principals, la hipòtesi i la conclusió; per refutar la proposició hem de mostrar (per un contra - exemple, si és possible) que una de les parts principals, la hipòtesi, no implica l'altra, la conclusió. Molts matemàtics, grans i menors, ha intentat eliminar el dubte sobre la conjectura de Goldbach, però sense èxit: encara que sigui necessari molt poc coneixement per entendre la hipòtesi i la conclusió, ningú ha estat capaç encara de lligar-les amb un argument estricte, i ningú ha estat capaç de produir un contra - exemple.

## 5.5. Els components de la incògnita, les clàusules de la condició

Si el nostre problema es tracta de construir una circumferència, hem de trobar, de fet, dues coses: el centre de la circumferència i el seu radi. Pot ser avantatjós subdividir la nostra feina: de les dues coses desitjades, el centre i el radi, podem intentar trobar-ne primer una i després l'altra.

Si el nostre problema consisteix a trobar un punt en l'espai i utilitzem geometria analítica, hem de trobar, de fet, tres nombres: les tres coordenades  $x$ ,  $y$ , i  $z$  del punt.

Segons el punt de vista que preferim, podem dir, en el nostre primer exemple, que hi ha dues incògnites o únicament una incògnita i, en el nostre segon exemple, hi ha tres incògnites o únicament una incògnita. Hi ha, tanmateix, encara un altre punt de vista que freqüentment és avantatjós: podem dir que, en tots dos exemples, hi ha únicament una

---

<sup>1</sup> MPR vol. 1, pp. 4-5.

<sup>2</sup> Hi ha proposicions matemàtiques que no es poden dividir de forma natural en hipòtesi i conclusió; veure HSI, p. 155, problemes per trobar, problemes per demostrar, 4. Heus aquí una proposició d'aquest tipus: “En la representació decimal del nombre  $\pi$  hi ha nou dígitos consecutius 9”. Provar o refutar aquesta proposició és un problema matemàtic ben definit - que sembla ser, fins ara, desesperadament difícil. “Un boig pot fer més preguntes de les que nou savis poden contestar”.

incògnita, però, en un cert sentit, està “subdividida”. Així, en el nostre primer exemple, la circumferència és la incògnita, però aquesta és una incògnita *bipartida* o de *dos components*; els seus *components* són el seu centre i el seu radi. De forma similar, en el nostre segon exemple, el punt és una incògnita *tripartida* o de *tres components*; els seus components són les seves tres coordenades  $x, y, i z$ . En general, podem considerar una incògnita *multipartida* o de *multi components*  $x$  que té  $n$  components  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

Una avantatge de la terminologia que acabem d'introduir és que, en certes discussions generals, necessitem no fer distinció entre problemes amb una incògnita i problemes amb varies incògnites: de fet, podem reduir el darrer cas al anterior considerant aquestes varies incògnites com components d'una incògnita. Per exemple, el que hem dit en la sec. 5.3 és aplicable essencialment també a problemes on hem de buscar varies incògnites, encara que aquest cas no ha sigut mencionat de forma explícita en la sec. 5.3. Veurem més endavant que la nostra terminologia és útil en diversos contextos.

Si el nostre problema és un problema per trobar, hi pot haver una avantatge subdividint la condició en diverses parts o *clàusules* com hem tingut oportunitat d'observar àmpliament. Resolent un problema de construcció geomètrica podem separar la condició en dues parts de tal manera que cada part doni un lloc geomètric per a la incògnita punt (capítol 1).

Resolent un “problema de paraula” per àlgebra, separem la condició en tantes parts com incògnites hi hagi, de tal manera que cada part estigui en una equació (capítol 2).

Si el nostre problema és un problema per demostrar, pot ser avantatjós subdividir la hipòtesi, o la condició, o totes dues, en un nombre apropiat de parts o clàusules.

## 5.6. Es busca: un procediment

Construint una figura en l'estil dels Elements d'Euclides, no som lliures de triar les nostres eines o instruments: se suposa que hem de construir la figura amb regla i compàs. Així, la solució del problema consisteix, de fet, en una seqüència d'*operacions geomètriques ben coordinades* que comencen amb les dades i acaben en la figura exigida: les nostres operacions són dibuixar línies rectes i circumferències, i determinar els seus punts d'intersecció.

Aquest exemple pot obrir els nostres ulls i, mirant amb més finesa, podem adonar-nos que la solució de molts problemes consisteix essencialment en un *procediment*, una via d'acció, un esquema d'operacions ben interrelacionades, un *modus operandi*.

Considereu el problema de resoldre una equació de segon (o tercer, o quart) grau. La solució consisteix en un esquema d'operacions *algebriques* ben coordinades que comencen amb les dades, els coeficients donats de l'equació, i acaben en les arrels exigides: les nostres operacions són sumar, restar, multiplicar, o dividir les quantitats donades, o prèviament obtingudes, o extreure arrels d'aquestes quantitats.

O considerem un problema “per demostrar”. La solució del problema, el resultat dels nostres esforços, és una demostració, és a dir, una seqüència d'operacions *lògiques* ben coordinades, de passos que comencen amb la hipòtesi i acaben en la conclusió desitjada del teorema: cada pas infereix algun punt nou apropiadament triat de les parts de la hipòtesi, de fets coneguts, o de punts prèviament inferits.

Els problemes no matemàtics tenen un aspecte similar. El constructor d'un pont ha d'organitzar, coordinar, posar en un esquema coherent una gran multiplicitat d'operacions: construint accessos, molls per als vaixells, aixecant bastides, servint ciment, rematxant les parts metàl·liques, etc. etc. Més encara, està obligat a interrelacionar aquestes operacions

amb altres d'una naturalesa molt diferent: amb transaccions financeres, legals, i fins i tot polítiques. Totes aquestes operacions depenen les unes de les altres: la majoria d'elles pressuposen que unes altres s'han realitzat prèviament.

O trieu el cas d'una història de misteri. La incògnita és l'assassí; l'autor intenta impressionar-nos amb la actuació del detectiu - heroi que projecta un esquema, una via d'acció que, començant amb les primeres indicacions, finalitza identificant i atrapant l'assassí.

L'objecte de la nostra recerca pot ser una incògnita de qualsevol naturalesa o el descobriment de la veritat sobre qualsevol tipus de qüestió; el nostre problema pot ser teòric o pràctic, seriós o insignificant. Per resoldre el nostre problema, hem de dissenyar un esquema coherent d'operacions, de lògica, matemàtiques, o amb materials ben concebuts que vagin des de la hipòtesi fins a la conclusió, des de les dades fins a la incògnita, des de les coses que tenim fins a les coses que desitgem.

### Exemples i comentaris sobre el Capítol 5

**5.1.** D'un prisma recte de base un quadrat, troba el volum  $V$ , donades la longitud  $a$  del costat de la base i l'altura  $h$  del prisma.

Qui és la incògnita? Qui són les dades? Quina és la condició?

**5.2.** Troba dos nombres reals  $x$  i  $y$  que verifiquin l'equació

$$x^2 + y^2 = 1$$

Qui és la incògnita? Qui són les dades? Quina és la condició? Descriu el conjunt de solucions.

**5.3.** Troba dos nombres reals  $x$  i  $y$  que verifiquin l'equació

$$x^2 + y^2 = -1$$

Descriu el conjunt de solucions.

**5.4.** Troba dos nombres enters  $x$  i  $y$  que verifiquin l'equació

$$x^2 + y^2 = 13$$

Descriu el conjunt de solucions.

**5.5.** Troba tres nombres reals  $x$ ,  $y$ , i  $z$  tal que

$$|x| + |y| + |z| < 1$$

(1) Descriu el conjunt de solucions.

(2) Modifica el problema substituint  $<$  per  $\leq$ , i descriu el conjunt de solucions per al problema modificat.

**5.6.** Enuncia el teorema de Pitàgores.

Quina és la hipòtesi? Quina és la conclusió?

**5.7.** Sigui  $n$  un enter positiu i  $d(n)$  el nombre de divisors de  $n$  (volem dir divisors enters positius incloent 1 i  $n$ ). Per exemple

6 té els divisors 1, 2, 3, 6;  $d(6) = 4$

9 té els divisors 1, 3, 9;  $d(9) = 3$

Considereu la proposició:

$d(n)$  és senars o parell depenent de si  $n$  és un quadrat o no.

Quina és la hipòtesi? Quina és la conclusió?

**5.8.** *Per demostrar o per trobar?* Són els dos nombres  $\sqrt{3}+\sqrt{11}$  i  $\sqrt{5}+\sqrt{8}$  iguals? Si no ho són, quin és el més gran?

Enunciat d'una forma més general, el problema es refereix a dos nombres  $a$  i  $b$ , ben definits per operacions aritmètiques, i ens demana decidir quina de les tres possibilitats

$$a = b, \quad a > b, \quad a < b$$

és realment certa.

Podem percebre diferents aspectes d'aquest problema.

(1) Primer, hem de demostrar o refutar la proposició  $a = b$ . Si es dóna el cas que aquesta proposició és falsa, hem de demostrar o refutar la proposició  $a > b$ . Podem realitzar aquestes dues accions també en ordre invers, o potser simultàniament; en qualsevol cas, tenim aquí dos problemes per demostrar, lligats l'un amb l'altre.

(2) Hi ha una notació molt utilitzada en diferents branques de les matemàtiques:  $\operatorname{sgn} x$  (que es llegeix “el signe de  $x$ ” o “signum  $x$ ”) definida a continuació:

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & \text{quan } x > 0 \\ 0 & \text{quan } x = 0 \\ -1 & \text{quan } x < 0 \end{cases}$$

El problema enunciat ens demana trobar el nombre  $\operatorname{sgn}(a-b)$ : és un problema per trobar.

No hi ha cap contradicció formal (no n'hi hauria d'haver si la nostra terminologia es concep de forma adequada): a (1) tenim un problema  $A$  que consisteix en dos problemes per demostrar lligats, simultàniament enunciats; a (2) tenim un problema  $B$ , que és un problema per trobar. No veiem aquests dos problemes  $A$  i  $B$ , enunciats en termes diferents, com *idèntics* - però són *equivalents*. (La utilització del terme “equivalent” està explicada en HSI, Problema auxiliar 6, pp. 155-156<sup>x</sup>, i tornarà a ser explicada un altre cop en el capítol 9).

Per altra banda, no hi ha cap inconvenient. Ben al contrari, pot ser molt útil veure dos aspectes diferents de la mateixa dificultat: un aspecte pot atraure'ns més que l'altre, pot mostrar un costat més accessible i per tant donar-nos la possibilitat d'atacar la dificultat per aquest costat més accessible.

**5.9. Més problemes.** Considera qualsevol problema (n'hi ha molts en els capítols anteriors), determina quan es tracta d'un problema “per trobar” o d'un “per demostrar”, i pregunta en conseqüència:

Qui és la incògnita? Qui són les dades? Quina és la condició?

Quina és la hipòtesi? Quina és la conclusió?

La intenció d'aquestes preguntes aquí és únicament familiaritzar-te amb les parts principals dels problemes. L'experiència pot ensenyar-te que aquestes preguntes, si es fan seriosament i es responen amb compte, són de gran ajuda en la resolució de problemes: centrant la teva atenció sobre les parts principals del problema, aprofundeixen la teva comprensió del problema i poden indicar-te la direcció correcta.

---

<sup>x</sup> He preferit donar com a referència la de la versió en castellà.

**5.10.** *El procediment de resolució pot consistir en una seqüència ilimitada d'operacions. Si se'ns demana resoldre l'equació*

$$x^2 = 2$$

la nostra feina es pot interpretar de diferents maneres. La interpretació pot ser: “Troba l'arrel quadrada positiva de 2 amb cinc xifres significatives”; en aquest cas quedem plenament satisfets al donar la resposta en nombre decimal 1.4142. Però, la interpretació pot ser també “Extreu l'arrel quadrada de 2” sense cap qualificació ni atenuant addicional, i aleshores no podem realitzar la nostra feina donant quatre, o qualsevol nombre de xifres després de la coma decimal: la resposta hauria de ser un *procediment*, un *esquema* d'operacions aritmètiques que pogués donar *qualsevol* nombre desitjat de xifres decimals.

Heus aquí un altre exemple: “Trobeu la raó de l'àrea del cercle a l'àrea del quadrat circumscrit”. La resposta és  $\pi/4$  si prenem el valor de  $\pi$  com admès. Leibnitz donava la resposta (expressava la raó  $\pi/4$ ) com una sèrie infinita

$$1/1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + 1/9 - 1/11 + \dots$$

Aquesta sèrie descriu, de fet, una seqüència il·limitada d'operacions aritmètiques que ens pot donar qualsevol nombre de xifres de l'expressió decimal de  $\pi$  (en teoria -a la pràctica el procediment és massa lent). “Encara que aquesta sèrie, com hem vist, no és apropiada per una aproximació ràpida, per contra per representar a la ment la raó del cercle al quadrat circumscrit, jo no crec que es pugui imaginar res més simple o més apropiat”, diu Leibnitz<sup>3</sup>.

**5.11.** *Quadrant el cercle.* Resolent un problema “per trobar” busquem un objecte, l'objecte “incògnita”, i molt sovint ens trobem que hem de buscar un procediment (una seqüència d'operacions) per obtenir aquest objecte -anomenem el procediment buscat, únicament en atenció d'una més clara diferenciació, la “incògnita operacional”. Una clara diferenciació és molt desitjable, aquí es pot il·lustrar amb un exemple històric.

Donat un radi d'un cercle, construir *amb regla i compàs* un quadrat que tingui exactament la mateixa àrea del cercle.

Aquesta és la forma concisa del famós antic problema de la “quadratura del cercle” que van crear els primers geòmetres grecs. Posem de manifest que el problema *prescriu la naturalesa del procediment* (de la “incògnita operacional”): hem de construir un costat del desitjat quadrat amb regla i compàs, dibuixant rectes i circumferències, utilitzant únicament punts donats o obtinguts per la intersecció de línies prèviament dibuixades. I, naturalment, començant dels dos extrems del radi donat, hem d'arribar als dos extrems d'un costat del quadrat desitjat en un *nombre finit* de passos.

Després de molts segles, en els que un nombre incommensurable de persones va intentar trobar la solució, es va demostrar (per F. Lindemann al 1882) que no existia solució: El quadrat que té la mateixa àrea al cercle donat indubtablement “existeix” (el seu costat es pot aproximar amb qualsevol grau de precisió per diferents processos infinits coneguts avui, un dels quals ve donat per la famosa sèrie de Leibnitz mencionada en ex. 5.10). Però, un procediment del tipus desitjat (consistent en una seqüència finita d'operacions amb regla i compàs) no existeix. Em demano si una clara distinció entre la figura desitjada i el procediment desitjat, entre l’“objecte incògnita” i la “incògnita operacional”, pot fer disminuir el nombre d'infortunats “quadradors” del cercle.

---

<sup>3</sup> *Philosophische Schriften*, editat per Gerhardt, vol. IV, p. 278.

**5.12. Seqüència i conseqüència.** En la construcció d'un pont, fixar una peça metàl·lica prefabricada en el lloc adequat és una operació important. pot ser essencial que de dues d'aquestes operacions una ha de precedir l'altra (quan la segona peça no pot ser fixada a no ser que la primera hagi estat fixada abans), però també pot ser indiferent (quan les dues peces són independents). Així, pot ser necessari o no observar una seqüència definida en la realització de dues operacions. D'igual forma, els passos d'una demostració són presentats successivament en una conferència o per escrit. Però, un pas pot precedir un altre en el temps sense precedir-lo en lògica. Hem de distingir entre seqüència i conseqüència. entre successió en el temps i concatenació lògica. (Tornarem en aquest important assumpte en el capítol 7).

**5.13. Una ambigüitat desafortunada.** La paraula “solució” té variis significats diferents, alguns dels quals són molt importants i mereixerien ser designats per un terme sense ambigüitat. A falta d'uns millors, proposo uns quants d'aquests termes (afegint-hi per cada un l'equivalent alemany).

*Objecte solució* (Lösungsgegenstand) és un objecte que satisfà la condició del problema. Si la finalitat del problema és resoldre una equació algebraica, un nombre que verifiqui l'equació, és a dir, una arrel de l'equació, és un objecte solució. Únicament un problema “per trobar” pot tenir un objecte solució. Una categoria (conjunt) a la qual l'objecte solució pertanyi ha de ser especificada d'antuvi en un problema clarament enunciat -hem de saber d'antuvi si busquem un triangle, o un nombre, o quina cosa no. De fet, aquesta especificació (la designació precisa d'un conjunt al qual la incògnita pertany) és una part principal del problema. “Trobar la incògnita” significa trobar (identificar, construir, produir, obtenir,...) l'objecte solució (el conjunt de tots els objectes solució).

*Procediment solució* (Lösungsgang) és el procediment (la construcció, l'esquema d'operacions, el sistema de conclusions) el qual finalitza trobant la incògnita d'un problema per trobar, o desfent el dubte sobre una afirmació proposada per un problema per demostrar. Així, “procediment solució” és un terme aplicable als dos tipus de problemes. Al principi del nostre treball, no coneixem el procediment solució, l'esquema apropiat d'operacions, però l'estem buscant amb l'esperança de que el coneixerem al final: aquest procediment és la finalitat a la nostra recerca, és efectivament, en un cert sentit, la nostra incògnita, és, diguem, la nostra “incògnita operacional”. (Cf. ex. 5.11.)

També podem parlar sobre el “treball de solució” (Lösungsarbeit) i el “resultat de solució” (Lösungsergebnis), però, de fet, intentaré no semblar massa ferragós i, excepte en alguns casos importants, deixaré per al lector el descobrir dins del context quin significat té la paraula “solució” en un cas donat: si vol dir l'objecte, el procediment, el resultat del treball, o el treball mateix<sup>4</sup>.

**5.14. Dades i incògnita, hipòtesi i conclusió.** Els Elements d'Euclides tenen un peculiar sòlid estil que alguns poden inclinar-se a anomenar solemne i d'altres pedant. Totes les proposicions estan frasejades d'acord amb un patró i, en aquest fraseig, les dades i la incògnita d'un problema per trobar estan tractades com si fossin similars, o paral·leles, a la hipòtesi i la conclusió d'un problema per demostrar<sup>xv</sup>, respectivament. De fet, hi ha, com veurem més endavant, una certa similitud o paral·lelisme entre aquestes parts principals dels dos tipus de problemes, que tenen alguna importància des del punt de vista del

---

<sup>4</sup> Cf. HSI, p. 192; Términos antiguos y nuevos, 8.

<sup>xv</sup> Tot just diu problema.

“problem-solver”<sup>xx</sup>, i per tant des del punt del vista del nostre tema. Però, és inadmissible i analfabet embolicar els termes dada i hipòtesi o els termes incògnita i conclusió i aplicar qualsevol d'aquests termes al tipus de problema pel qual és improp. És dolent que l'ús inadmissible i analfabet d'aquests termes importants es doni a vegades fins i tot per escrit.

**5.15. Comptant les dades.** Un triangle està determinat per tres costats, o per dos costats i un angle (l'angle format), o per un costat i dos angles, però no està determinat per tres angles: 3 dades independents són necessàries per determinar un triangle. (Veieu també ex. 1.43 i 1.44). Per determinar un polinomi de grau  $n$  en una variable (en  $x$ )  $n+1$  dades independents són necessàries: els  $n+1$  coeficients de l'expressió del polinomi en potències de  $x$ , o els  $n+1$  valors que pren el polinomi en els punts  $x = 0, 1, 2, \dots, n$ , o a qualsevol  $n+1$  punts donats diferents, i així successivament. Hi ha una gran quantitat de tipus importants d'objectes matemàtics que per determinar-los es requereix un nombre definit de dades independents. En conseqüència, quan estem resolent un problema per trobar, és freqüentment avantatjós *comptar les dades*, i comptar-les aviat.

**5.16.** Per determinar un polígon amb  $n$  costats

$$(n-1)+(n-2) = (n-3)+n = 3+2(n-3) = 2n-3$$

dades independents són necessàries. Què et suggereixen aquestes quatre expressions per al mateix nombre?

**5.17.** Quantes dades són necessàries per determinar una piràmide la base de la qual és un polígon de  $n$  costats?

**5.18.** Quantes dades són necessàries per determinar un prisma (que pot ser oblic) la base del qual és un polígon de  $n$  costats?

**5.19.** Quantes dades són necessàries per determinar un polinomi de grau  $n$  en  $v$  variables? (Els seus termes són de la forma  $cx_1^{m_1}x_2^{m_2}\dots x_v^{m_v}$  on  $c$  és un coeficient constant i  $m_1+m_2+\dots+m_v \leq n$ ).

---

<sup>xx</sup> No trobo cap nom pel que hauria de traduir com “resolutor” de problemes, que no m'agrada gens.

# Del llibre “Mathematical Discovery” de Gorge Polya

## CAPÍTOL 14 (Traducció: Xavier Valls)

### **SOBRE APRENDRE, ENSENYAR I APRENDRE A ENSENYAR<sup>5</sup>**

*El que heu estat obligats a descobrir per vosaltres mateixos  
deixa una empremta en la vostra ment que podeu tornar a  
utilitzar quan sigui necessari.*

G. C. LICHTENBERG: *Aphorismen*.

*Tot coneixement humà comença amb intuïcions, continua  
amb concepcions, i finalitza amb idees.*

I. KANT: *Crítica de la Raó Pura*.

*He escrit de manera que l'aprenent sempre pugui veure  
l'íntim rerafons de les coses que aprèn, fins i tot de manera  
que les arrels de la invenció hi apareguin, i per tant de tal  
manera que l'aprenent pugui entendre-ho tot com si ell  
mateix ho hagués inventat.*

G. W. VON LEIBNITZ: *Escrits Matemàtics*.

#### **14.1. Ensenyar no és una ciència**

Us explicaré algunes de les meves opinions sobre el procés d'aprendre, sobre l'art d'ensenyar, i sobre la formació d'ensenyants.

Les meves opinions són el resultat d'una llarga experiència. Aquestes opinions personals podrien ser irrellevants i no m'atreiria a fer-vos perdre el temps explicant-vos-les, si ensenyar pogués estar completament regulat per fets científics i teories. Aquest, tanmateix, no és el cas. Ensenyar no és en absolut, segons la meva opinió, únicament una branca de la psicologia aplicada, no ho és en el moment present.

Ensenyar està correlacionat amb aprendre. L'estudi experimental i teòric d'aprendre és una branca de la psicologia cultivada extensament i intensa. Però hi ha una diferència. Estem principalment interessats amb situacions d'aprenentatge complexes, tal com aprendre àlgebra, o aprendre a ensenyar, i amb els seus efectes educatius a llarg termini. Tanmateix, els psicòlegs dediquen la major part de la seva atenció, i fan el seu millor treball sobre situacions simplificades a curt termini. Així la psicologia de l'aprenentatge pot donar-nos pistes interessants, però no pot pretendre proveir-nos de criteris fonamentals sobre els problemes de l'ensenyament.<sup>6</sup>

---

<sup>5</sup> Sect. 14.1-14.7 van ser presentades com un discurs al 46è. Annual Meeting of the Mathematical Association of America a Berkeley i imprés prèviament: On Learning, Teaching, and Learning Teaching. *American Mathematical Monthly*, 70, 1963, pàgs 605-619.

<sup>6</sup> E. R. Hilgard, *Theories of Learning*, 2ª edició, Appleton-Century-Crofts, New York, 1956. Cf. pàgs 485-

## 14.2 La finalitat d'ensenyar

No podem jutjar l'actuació del mestre si no sabem quina és la seva intenció. No podem discutir de forma significativa sobre ensenyar, si no ens posem d'acord fins a un cert punt sobre quina és la finalitat d'ensenyar.

Deixeu-me ser un xic més específic. Estic interessat amb les matemàtiques del currículum de secundària i tinc una idea antiquada sobre la seva finalitat: primer i per sobre tot, s'ha d'ensenyar en aquesta gent jove a PENSAR.

Aquesta és la meua veritable convicció; pots no estar-hi completament d'acord, però suposo que hi estàs d'acord fins a un cert punt. Si no veieu "ensenyar a pensar" com una finalitat de primer ordre, la veus com una finalitat de segon ordre - i aleshores tenim suficient terreny per la següent discussió.

"Ensenyar a pensar" vol dir que el mestre de matemàtiques no ha d'impartir únicament informació, sinó que ha d'intentar també desenvolupar l'habilitat dels alumnes per utilitzar la informació subministrada: ha d'emfasitzar coneixements, actituds útils, hàbits mentals desitjables. Aquesta finalitat pot necessitar una més ampla explicació (tot el meu treball imprès sobre ensenyament es pot veure com una explicació més ampla) però aquí n'hi haurà prou posant de relleu únicament dos punts.

Primer, el pensar amb el que ens interessem no és el somniar despert sinó "pensar amb un propòsit" o "pensar de forma voluntària" (William James) o "pensar productiu" (Max Wertheimer). Aquest "pensar" pot estar identificat, si més no en una primera aproximació, amb "la resolució de problemes." De totes maneres, segons la meua opinió, una de les principals finalitats del currículum de matemàtiques de secundària consisteix en desenvolupar l'habilitat dels alumnes per resoldre problemes.

Segon, el pensament matemàtic no és purament "formal"; no està únicament relacionat amb axiomes, definicions, i demostracions rigoroses, sinó que hi ha moltes altres coses que hi pertanyen: generalitzar de casos observats, arguments inductius, arguments per analogia, reconèixer un concepte matemàtic, o extreure'l d'una situació concreta. El mestre de matemàtiques té una oportunitat excel·lent per donar a conèixer als seus alumnes tot aquest important conjunt de processos de pensament "informal", i crec que ha d'utilitzar aquesta oportunitat millor, i molt millor, del que ho fa avui. Enunciat de forma incompleta però concisa: ensenyem a demostrar naturalment, però ensenyem també a conjecturar.

## 14.3 Ensenyar és un art

Ensenyar no és una ciència, sinó un art. Aquesta opinió ha estat expressada per tanta gent tantes vegades que em sento un xic incòmode repetint-la. Si, tanmateix, deixem el camí fàcil de la generalització i ens centrem en casos particulars apropiats, podem veure alguns trucs del nostre ofici des d'un punt de vista instructiu.

Òbviament ensenyar té molt en comú amb l'art teatral. Per exemple, heu de presentar a la vostra classe una demostració que coneixeu de sobres havent-la presentat tantes vegades durant els anys anteriors en el mateix curs. No podeu estar realment excitat amb aquesta demostració - però, si us plau, no ho mostreu a la vostra classe; si sembleu avorrit, tota la classe estarà avorrida. Simuleu estar excitat amb la demostració quan la iniciu, simuleu tenir idees brillants quan avanceu, simuleu estar sorprès i excitat quan la demostració

finalitza. Heu d'actuar un xic pel bé dels vostres alumnes els quals poden aprendre, ocasionalment, més de les vostres actituds que de la matèria presentada.

He de confessar que actuar una mica m'agrada, especialment ara que sóc vell i poques vegades trobo alguna cosa nova en matemàtiques; puc trobar una mica de satisfacció representant com vaig descobrir aquest o aquell punt en el passat.

De forma menys obvia, ensenyar té coses en comú també amb la música. Naturalment, sabeu que el mestre no en té prou amb dir les coses una vegada o dues vegades, sinó tres o quatre o més vegades. Però, repetint la mateixa frase varies vegades sense cap pausa ni cap canvi pot ser terriblement avorrit i fer fracassar els vostres propis propòsits. Bé, podeu aprendre dels compositors com fer-ho millor. Una de les principals formes musicals és el "tema amb variacions". Transposant aquesta forma de la música a l'ensenyança podeu començar dient la vostra frase de la manera més simple; després la repetiu amb un petit canvi; després la troneu a repetir amb un xic més de color, i així; podeu acabar retornant a la simple formulació original. Una altra forma musical és el "rondó". Transportant el rondó de la música a l'ensenyança, podeu repetir la mateixa frase essencial varies vegades amb petits canvis o sense cap canvi, però entre dues repeticions podeu inserir-hi material il·lustratiu apropiat que contrasti. Espero que la propera vegada que escolteu un tema amb variacions de Beethoven o un rondó de Mozart podreu reflexionar com millorar la vostra manera d'ensenyar.

Ara i sempre, ensenyar es pot acostar a la poesia, i ara i sempre es pot acostar a la grolleria. Puc explicar-vos una petita història sobre el gran Einstein? Vaig escoltar una vegada a Einstein com parlava a un grup de físics en una reunió. "Per què tenen tots els electrons la mateixa càrrega?" va dir. "Bé, per què totes les petites boles en els excrements de cabra tenen la mateixa mida?" Per què Einstein va dir aquestes coses? Únicament per fer aixecar les celles als esnobs? No tenia aversió a fer això, crec. Però, probablement, anava més enllà. No penso que aquesta observació sentida per casualitat d'Einstein fos gaire innocent. De totes maneres, vaig aprendre alguna cosa d'aquesta: Les abstraccions són importants; utilitza tots els mitjans per fer-les més tangibles. No hi ha res que sigui massa bo o massa dolent, massa poètic o massa trivial per aclarir les teves abstraccions. Com va dir Montaigne: La veritat és una cosa tan gran que no podem menysprear cap mitjà que ens hi pugui conduir. Per tant, si l'esperit et porta a ser un xic poètic, o un xic groller, a classe, no tingueu un sentit d'inhibició equivocat.

#### **14.4 Tres principis d'aprendre**

Ensenyar és un ofici que té una gran quantitat de petits trucs. Cada bon mestre té les seves pròpies estratagemes i cada bon mestre és diferent de qualsevol altre bon mestre. Tot truc eficient per ensenyar ha d'estar correlacionat d'alguna manera amb la naturalesa del procés d'aprendre. No sabem massa sobre els processos d'aprendre, però fins i tot un tosc resum d'algunes de les característiques més obvies pot donar un xic de llum sobre els trucs del nostre ofici. Deixeu-me exposar aquest tosc resum sota la forma de tres "principis" d'aprendre. La seva formulació i combinació és de la meua collita, però els "principis" per ells mateixos no són de cap manera nous; han estat establerts i restablerts de varies maneres, s'han obtingut de l'experiència dels anys, aprovats pel judici de grans homes, i també suggerits pels estudis psicològics sobre l'aprenentatge. Aquests "principis d'aprendre" poden també ser considerats com "principis d'ensenyar", i aquesta és la clau per considerar-los aquí, com ja veurem més endavant.

(1) *Aprenentatge actiu*. Ha estat dit per molta gent de moltes maneres diferents que l'ensenyament ha de ser actiu, no purament passiu o receptiu; merament llegint llibres o escoltant classes o veient pel·lícules sense afegir cap acció de la vostra pròpia ment amb prou feines podeu aprendre alguna cosa i segur que no podeu aprendre gaire.

Hi ha una altra opinió sovint expressada (i molt relacionada): *La millor manera d'aprendre alguna cosa és descobrir-ho un mateix*. Lichtenberg (un físic alemany del segle divuit, millor conegut com escriptor d'aforismes) hi afegeix un punt interessant: *El que heu estat obligats a descobrir per vosaltres mateixos deixa una empremta en la vostra ment que podeu tornar a utilitzar quan sigui necessari*. No tan acolorit però potser més àmpliament aplicable, és el següent enunciat: *Per aprendre de forma eficient, l'aprenent ha de descobrir per ell mateix una fracció del material a aprendre tan gran com sigui possible sota les circumstàncies donades*.

Aquest és el *principi d'aprenentatge actiu* (Arbeitsprinzip). És un principi molt antic: posa de manifest la idea del "mètode Socràtic".

(2) *Millor motivació*. L'aprenentatge ha de ser actiu, ho hem dit. Però l'alumne no actuarà si no té cap motiu per actuar. Ha de ser induït a actuar per algun estímul, per l'esperança d'algun premi, per exemple. L'interès del material per ser après hauria de ser el millor estímul per aprendre i el plaer de l'activitat mental intensa hauria de ser el millor premi per aquesta activitat. Però, on no podem obtenir el millor hem d'intentar obtenir el segon millor, o el tercer millor, i motius no tan intrínsecs per aprendre no han de ser oblidats.

*Per aprendre de forma eficient, l'alumne ha d'estar interessat en el material que ha d'aprendre i trobar plaer en l'activitat d'aprendre. Però, a part d'aquest millor motiu per aprendre, n'hi ha d'altres també, alguns dels quals són desitjables*. (El càstig per no aprendre hauria de ser el menys desitjable dels motius).

Anomenem aquest enunciat el *principi de millor motivació*.

(3) *Fases consecutives*. Comencem amb una frase de Kant freqüentment citada: *Tot coneixement humà comença amb intuïcions, continua amb concepcions, i finalitza amb idees*. La traducció utilitza els termes "coneixement, intuïció, idea". No estic segur (qui ho podria estar?) de poder dir quin era el sentit exacte que Kant volia donar al utilitzar aquests mots. Però us demano permís per presentar la meua lectura de la dita de Kant:

*L'aprenentatge comença amb acció i percepció, continua amb paraules i conceptes, i ha de finalitzar amb hàbits mentals desitjables*.

Si us plau, per començar considereu els termes d'aquesta frase en algun sentit que pugueu il·lustrar de forma concreta sobre la base de la vostra experiència. (Induir-vos a pensar sobre la vostra experiència personal és un dels efectes desitjats). "Aprendre" us ha de recordar una classe amb vosaltres mateixos en ella com estudiant o com a mestre. "Acció i percepció" us ha de suggerir manipular i veure coses concretes com pedres, o pomes, o regletes Cuisenaire; o regle i compàs; o instruments en un laboratori; i tot això.

Aquesta interpretació concreta dels termes pot fer-se més fàcil i més natural quan pensem amb algun material elemental. Però després d'una estona podem percebre fases similars en el treball dedicat a dominar material més complex i més avançat. Distingim tres fases: Les fases d'*exploració*, *formalització* i *assimilació*.

Una primera fase d'*exploració* està més a prop de l'acció i de la percepció i té lloc en un nivell més intuïtiu i més heurístic.

Una segona fase de *formalització* s'eleva cap a un nivell més conceptual, introduint terminologia, definicions i proves.

La fase de l'assimilació ve després: hi ha d'haver un intent per percebre el "sentit íntim" de les coses, el material après ha de ser mentalment digerit, absorbit dintre del sistema del coneixement, en el conjunt de la perspectiva mental de l'aprenent; aquesta fase prepara el terreny d'una banda per a les aplicacions, i de l'altra per a majors generalitzacions.

Resumint: *Per un aprenentatge eficient, una fase exploratòria ha de precedir la fase de verbalització i formació dels conceptes i, de forma eventual, el material après ha de combinar-se i contribuir per una actitud mental integral del aprenent.*

Aquest és el principi de fases consecutives.

### 14.5 Tres principis d'ensenyar

El mestre ha de saber sobre les formes d'aprendre. Ha d'evitar formes deficientes i treure profit de les formes eficients d'aprendre. Per tant ha de fer un bon ús dels tres principis que acabem de considerar, el principi d'aprenentatge actiu, el principi de millor motivació, i el principi de fases consecutives; aquests principis d'aprendre són també principis d'ensenyar. Tanmateix, hi ha una condició: per poder mantenir aquests principis, el mestre no els ha de conèixer purament i exclusiva d'oïdes, sinó que els ha d'entendre de forma íntima sobre la base de la consideració adequada de la seva pròpia experiència personal.

(1) *Ensenyament actiu*. El que el mestre diu a la classe no és trivial, però el que els alumnes pensen és mil vegades més important. Les idees s'han de fer néixer en la ment dels alumnes i el mestre ha d'actuar únicament com una llevadora.

Aquest és un precepte Socràtic clàssic i la manera millor adaptada d'ensenyar en aquest és el diàleg Socràtic. El mestre de secundària té un gran avantatge sobre el professor d'universitat en el sentit de que pot utilitzar la forma dialogada de manera molt més extensiva. Desafortunadament, fins i tot en l'ensenyament secundari, el temps és limitat i s'ha de donar un temari preestablert de forma que no tot aquest pot ser transmès de manera dialogada. Però el principi és: *deixa als alumnes descobrir per ells mateixos tan com sigui possible* sota les circumstàncies donades.

Es pot fer molt més del que es fa usualment, n'estic segur. Deixeu-me donar-vos ara tot just un petit truc: deixeu als alumnes *contribuir de forma activa a la formulació* del problema que després han de resoldre. Si els alumnes han participat proposant el problema després treballaran en aquest d'una forma molt més activa.

De fet, en el treball d'un científic, la formulació del problema pot ser la millor part d'un descobriment, la solució sovint necessita menys profunditat i originalitat que la formulació. Per tant, permetent participar en la formulació, no únicament els motiveu per treballar més, sinó que els hi ensenyeu una actitud mental desitjable.

(2) *Millor motivació*. El mestre s'ha de veure com un venedor: vol vendre un xic de matemàtiques als joves. Ara bé, si el venedor es troba amb resistència a les vendes i els seus possibles clients no volen comprar, no ha de donar tota la culpa en aquests. Recordeu, el client sempre té raó en principi, i a vegades té raó a la pràctica. El noi que refusa aprendre matemàtiques pot tenir raó; pot no ser ni mandrós ni estúpid, únicament estar més interessat en alguna altra cosa - hi ha moltes coses interessants al nostre voltant. És el vostre deure com a mestre, com a venedor de coneixement, convèncer a l'alumne que les matemàtiques són interessants, que la qüestió que s'està discutint és interessant, que el problema que se suposa que ha de fer mereix el seu esforç.

Per tant, el mestre ha de tenir molt present la tria, la formulació, i una presentació desitjable del problema que proposa. El problema ha d'aparèixer significatiu i rellevant des del punt

de vista dels alumnes; ha d'estar relacionat, si és possible, amb l'experiència diària dels alumnes, i ha d'estar introduït, si és possible, per un petit joc o una petita paradoxa. O el problema pot sortir d'algun coneixement molt familiar; pot tenir, si és possible, algun punt d'interès general o de forma eventual d'ús pràctic. Si volem estimular l'alumne per un esforç genuí, li hem de donar alguna raó que el faci creure que aquesta feina mereix el seu esforç. La millor motivació és l'interès de l'alumne en la seva feina. Però hi ha altres motivacions que no es poden menystenir. Deixeu-me recomanar un petit truc pràctic. Abans que els alumnes facin un problema, deixem-los *conjecturar el resultat*, o part del resultat. El noi que expressa una opinió es compromet; el seu prestigi i la seva autoestima depenen un xic del resultat, està impacient per saber si la seva conjectura serà certa o falsa, i per tant estarà activament interessat en la seva feina i en el treball de la classe - no s'adormirà ni es portarà malament.

De fet, en el treball d'un científic, la conjectura gairebé sempre precedeix la prova. Per tant, deixant als nostres alumnes conjecturar el resultat, no únicament els motivem per treballar més, sinó que els hi ensenym una actitud mental desitjable.

(3) *Fases consecutives*. Una gran dificultat amb la majoria de problemes dels llibres de text de secundària és que són gairebé tots exemples de simples rutines. Un exemple rutinari és un exemple de poca amplitud; il·lustra i ofereix pràctica en l'aplicació tot just d'una regla isolada. Aquests exemples rutinaris poden ser útils i fins i tot necessaris, no els menystinc, però en ells no hi apareixen dues fases importants de l'aprenentatge: la fase exploratòria i la fase d'assimilació. Totes dues fases intenten connectar el problema que estem tractant amb el món que ens envolta i amb altre coneixement, la primera abans, l'última després, de la solució formal. Però el problema rutinari està òbviament connectat amb la regla que il·lustra i està amb prou feines connectat amb res més, per tant no obtindrem cap profit buscant altres connexions. Contrastant amb aquests problemes rutinaris a secundària s'han de presentar més problemes estimulants com a mínim de tant en tant, problemes amb un ric substrat que donin lloc a exploracions suplementàries, i problemes que permetin captar el treball d'un científic.

Heus aquí un consell pràctic: si el problema que voleu discutir amb la vostra classe és adequat, deixeu als vostres alumnes fer una exploració preliminar: això pot aguditzar les seves ganes per la solució formal. I reserveu un xic de temps per una discussió retrospectiva de la solució final; això pot ajudar en la solució de problemes posteriors.

(4) Després d'aquesta molt incompleta discussió, he d'aturar l'explicació dels principis d'ensenyament actiu, millor motivació, i fases consecutives. Crec que aquests principis han de penetrar fins als més petits detalls del treball diari del mestre i fer-lo un mestre millor. Crec també que aquests principis han de penetrar el plantejament de tot el currículum, i el plantejament de cada capítol de cada curs.

Estic lluny de dir que heu d'acceptar aquests principis. Aquests principis provenen d'un cert punt de vista, d'una certa filosofia, i podeu tenir una filosofia diferent. Però, en l'ensenyament com moltes altres coses, no té molta importància el que és o no és la vostra filosofia. És més important si teniu una filosofia o no. I és molt més important si intenteu viure d'acord amb la vostra filosofia o no. Els únics principis de l'ensenyament que detesto profundament són aquells que només serveixen a la gent per fer xerrameca.

## 14.6 Exemples

Els exemples estan millor que els preceptes; deixeu-me donar uns exemples - prefereixo molt més els exemples que parlar de forma genèrica. Estic interessat principalment amb ensenyament a nivell secundari, i voldria presentar-vos alguns exemples en aquest nivell. Sovint trobo satisfaccions tractant exemples a nivell secundari, i us puc dir perquè: intento tractar-los de forma que recordin en algun aspecte la meua pròpia experiència matemàtica; estic reconstruint el meu treball passat a escala reduïda.

(1) *Un problema elemental*. La forma fonamental de l'art d'ensenyar és el diàleg Socràtic. En una classe elemental de secundària, potser a primer d'ESO, el mestre pot començar el diàleg de la següent manera:

"Quina hora és al migdia a Barcelona?"

‘Però, mestre, tothom ho sap això’ pot dir un noi espavilat, o fins i tot ‘Però mestre, esteu boig: les dotze en punt’.

"I quina és l'hora al migdia a Lleida?"

‘Les dotze en punt - naturalment, no les dotze de la nit’.

"I quina és la hora al migdia a Nova York?"

‘Les dotze en punt’.

"Però em penso que Barcelona i Nova York no tenen el migdia a la mateixa hora, i vosaltres dieu que tots dos tenen el migdia a les dotze en punt!"

‘Bé, Barcelona té el migdia a les dotze amb el sistema horari del meridià de Greenwich, i Nova York a les dotze del sistema horari del seu meridià’.

"I en quin sistema horari es troba Lleida, el de Greenwich o el de Nova York?"

‘El de Greenwich, naturalment’.

"Tenen la gent de Barcelona i Lleida el migdia al mateix instant?"

"No sabeu la resposta? Bé, intenteu conjecturar: el migdia es produeix abans a Barcelona o a Lleida, o es produeix exactament al mateix instant als dos llocs?"

Què us sembla la meua idea d'una conversa Socràtica amb nois d'un nivell de primer d'ESO? De qualsevol forma, podeu imaginar la resta. Amb preguntes apropiades el mestre, imitant Sòcrates, ha d'obtenir algunes conclusions dels alumnes:

(a) Hem de distingir entre migdia "astronòmic" i migdia convencional o "legal".

(b) Definicions dels dos migdies.

(c) Comprensió del "temps estàndard": Com i perquè la superfície de la Terra està subdividida en sistemes horaris?

(d) Formulació del problema: "En quin instant del sistema horari de Greenwich té lloc el migdia de Barcelona?"

(e) L'única dada específica per resoldre el problema és la longitud de Barcelona (amb una aproximació suficient per primer d'ESO).

El problema no és tan fàcil. L'he provat en dos classes; en les dues classes els participants eren mestres de secundària. Una classe va trigar uns 25 minuts en trobar la solució, l'altra 35 minuts.

(2) He de dir que aquest petit problema de secundària elemental té diverses avantatges. La seva principal avantatge pot ser que posa de manifest una operació mental essencial que està desgraciadament negligida en els problemes dels llibres de text: *reconèixer el concepte matemàtic essencial en una situació concreta*. Per resoldre el problema, els alumnes han de reconèixer una *proporcionalitat*: l'instant de la posició més elevada del Sol en una població de la superfície de la Terra canvia proporcionalment a la longitud de la població.

De fet, en comparació amb la gran quantitat de terribles problemes artificials dels llibres de text de secundària, el nostre problema és perfectament natural, un problema "real". En els problemes seriosos de les matemàtiques aplicades, la *formulació* apropiada del problema és sempre una feina important, i sovint la més important; el nostre petit problema que es pot proposar a un nivell elemental de secundària posseeix precisament aquesta característica. Un altre cop, els problemes seriosos de les matemàtiques aplicades poden portar a accions pràctiques, per exemple, a adoptar un millor procés de manufacturació; el nostre petit problema pot explicar als alumnes de secundària elemental per què el sistema de 24 zones horàries, cada una amb un horari estàndard uniforme, va ser adoptat. En conjunt, crec que aquest problema, si es treballa amb una certa habilitat pel mestre, pot ajudar al futur científic o enginyer a descobrir la seva vocació, i pot també contribuir a la maduresa intel·lectual d'aquells alumnes que no hauran d'utilitzar matemàtiques professionalment. Observeu també que aquest problema il·lustra alguns petits trucs mencionats en el que precedeix: els alumnes contribueixen activament a la formulació del problema [cf. secc 14.5]. De fet, La fase exploratòria que porta a la formulació del problema és molt important [cf. secc 14.5 (3)]. Després, els alumnes són animats a conjeturar un punt essencial de la solució [cf. secc 14.5 (2)].

Deixo per més endavant el segon problema

## 14.7 Aprenent a ensenyar

Queda encara un altre tema per discutir i és un tema important: la formació del mestre. Discutint aquest tema, em trobo en una posició confortable: estic pràcticament d'acord amb punt de vista "oficial". (M'estic referint aquí a les "Recommendations of the Mathematical Association of America for the training of mathematical teachers", *American Mathematical Monthly*, **67** (1960), 982-991. Per raons de brevetat, em prenc la llibertat d'anomenar aquest document com les "recomanacions oficials"). Em centraré tot just en dos punts. En aquests dos punts he dedicat una gran quantitat de treball i de reflexió en el passat i pràcticament totes les meves classes dels últims deu anys.

Per dir-ho d'una manera tosca, un dels dos temes que tinc al cap està relacionat amb els cursos de "matèria", l'altre amb els cursos de "mètodes".

(1) *Matèria*. És un fet desgraciat, però àmpliament reconegut, que els coneixements de la seva matèria dels nostres mestres de matemàtiques de secundària és, per terme mig, insuficient. Hi ha, per descomptat, alguns mestres de secundària ben preparats, però n'hi ha d'altres (n'he trobat alguns) dels quals puc admirar la seva bona voluntat però dels quals la seva formació matemàtica no és admirable. Les recomanacions oficials dels cursos de matèria podent no ser perfectes, però no hi ha cap dubte que la seva acceptació donaria com a resultat una millora substancial. Desitjo dirigir la vostra atenció sobre un punt que, em consta, s'ha d'afegir a les recomanacions oficials.

El nostre coneixement sobre qualsevol tema està format per informació i saber fer. Saber fer és l'habilitat per utilitzar informació; naturalment, no hi ha saber fer sense un xic de pensament independent, originalitat, i creativitat. Saber fer en matemàtiques consisteix en la traça per fer problemes, per trobar proves, per criticar arguments, per utilitzar el llenguatge matemàtic amb una certa fluïdesa, per reconèixer conceptes matemàtics en situacions concretes.

Tothom està d'acord que, en matemàtiques, el saber fer és més important, o fins i tot molt més important, que la simple possessió de la informació. Tothom està d'acord en que a l'escola secundària s'ha de donar als alumnes no solament continguts en matemàtiques sinó saber fer, independència, originalitat, creativitat. Però gairebé ningú demana aquestes boniques coses pel mestre de matemàtiques - no és curiós? Les recomanacions oficials no diuen res sobre el saber fer del mestre. L'alumne de matemàtiques que treballa en el seu doctorat ha de realitzar investigació, però fins i tot abans d'arribar en aquest nivell ha pogut trobar alguna oportunitat pel treball independent en seminaris, seminaris de problemes, o en la preparació d'una tesina. Però cap d'aquestes oportunitats s'ofereix al futur mestre de matemàtiques - no es diu res sobre cap tipus de treball independent o treball de recerca en les recomanacions oficials. Si, tanmateix, el mestre no ha tingut cap experiència en treball creatiu d'algun tipus, com pot ser capaç d'inspirar, liderar, ajudar, o fins i tot reconèixer l'activitat creadora dels seus alumnes? Un mestre que ha adquirit tot el que sap de matemàtiques purament de forma receptiva en comptades ocasions pot proporcionar l'aprenentatge actiu als seus alumnes. Un mestre que mai no ha tingut una idea brillant en la seva vida probablement reprimirà al alumne que en té una en lloc d'encoratjar-lo. En la meua opinió, aquí hi ha la pitjor llacuna en la qüestió del tema de coneixement del mestre mig de secundària: no té cap experiència de treball matemàtic actiu i, per tant, realment no domina el material de secundària que se suposa ha d'ensenyar.

No tinc la panacea per oferir, però he intentat una cosa. He introduït i repetidament dirigit un *seminari de resolució de problemes* per mestres. Els problemes que s'han tractat en aquest seminari no requereixen coneixements molt més profunds dels de secundària, però requereixen un cert grau, i de tant en tant un alt grau, de concentració i criteri - i, en un cert grau, la seva solució és treball "creatiu". He intentat establir el meu seminari de forma que els alumnes siguin capaços d'utilitzar la majoria del material ofert en les seves classes sense grans canvis; que puguin adquirir un cert domini de les matemàtiques de secundària; i de forma que puguin fins i tot tenir una certa oportunitat per practicar l'ensenyament (ensenyant - se mútuament en petits grups). Cf. vol. 1, pàg. 210-212.

(2) *Mètodes*. Del meu contacte amb milers de mestres de matemàtiques he obtingut la impressió que els cursos de "mètodes" són sovint rebuts amb molt poc entusiasme.

Tanmateix també són rebuts de la mateixa forma, pels mestres, els cursos usuals proposats pels departaments de matemàtiques. Un mestre amb qui vaig tenir una conversa íntima sobre aquests temes va trobar una expressió caricaturesca per un sentiment generalitzat: "Els departaments de matemàtiques ens ofereixen bistecs durs que no podem mastegar i les escoles d'educació sopa insípida sense carn".

De fet, hem d'assumir alguna vegada un xic de coratge i discutir públicament la qüestió: Són els cursos de mètodes necessaris? Són útils en algun sentit? Hi ha més possibilitats d'obtenir la resposta en una discussió oberta que amb una queixa generalitzada.

Hi ha certament bastants preguntes pertinents. Es pot ensenyar a ensenyar? (Ensenyar és un art, com molts de nosaltres creiem - es pot ensenyar un art?) Existeix alguna cosa com el mètode per ensenyar? (El que el mestre ensenya no és mai millor del que el mestre és - ensenyar depèn del conjunt de la personalitat del mestre - hi ha tants bons mètodes com hi ha bons mestres). El temps assignat a la formació de mestres està dividit entre cursos de matèria, cursos de mètodes i pràctiques d'ensenyar; hem d'esmerçar menys temps en els cursos de mètodes? (Molts països europeus hi esmercen molt menys temps).

Espero que gent més jove i més vigorosa que jo mateix entomi aquestes preguntes algun dia i les discuteixi amb una ment oberta i amb dades pertinents.

Estic parlant únicament sobre la meua pròpia experiència i les meues pròpies opinions. De fet ja he contestat implícitament la principal pregunta sorgida; crec que els cursos de mètodes poden ser útils. De fet, el que he presentat fins ara era una mostra d'un curs de mètodes, o més aviat una guia d'alguns temes que, en la meua opinió, un curs de mètodes per mestres de matemàtiques ha de tractar.

De fet, totes les classes que he donat a mestres de matemàtiques es proposaven com a cursos de mètodes en algun sentit. El nom de la classe mencionava algun tema, i el temps estava realment dividit entre aquest tema i els mètodes: potser nou dècimes parts pel tema i una dècima part pels mètodes. Si era possible, la classe estava dirigida en forma de diàleg. Algunes qüestions metodològiques hi eren introduïdes incidentalment, per mi mateix o per l'auditori. Però l'obtenció d'algun fet o la solució d'un problema anava normalment seguida d'una curta discussió de les seves implicacions pedagògiques. "Podeu utilitzar això en les vostres classes?" preguntava a l'auditori. "en quin estadi del currículum podeu utilitzar això? Quins punts necessiten un compte particular? Com intentaríeu comunicar-ho?" I preguntes d'aquesta naturalesa (especificades de forma apropiada) eren proposades regularment també en els exàmens per escrit. El meu principal treball era, tanmateix, triar aquests problemes (com els dos que he presentat) de manera que poguessin il·lustrar de forma impactant algun patró d'ensenyament.

(3) Les recomanacions oficials anomenaven cursos de "mètodes", cursos de "curriculum-study" i no eren molt eloqüents amb aquests. Però podeu trobar-hi un excel·lent recomanació, crec. Hi ha alguna cosa amagada; heu de posar dos i dos junts, combinant l'última frase en "curriculum study courses" i les recomanacions pel Level IV. Però és prou clar: Un instructor universitari que ofereix un curs de mètodes per mestres de matemàtiques ha de saber matemàtiques com a mínim fins a un nivell d'un Master's degree. M'agradaria afegir: també ha de tenir una mica d'experiència, potser modesta, de recerca matemàtica. Si no té aquesta experiència de quina manera podrà conduir, el que pot ser la cosa més important pels futurs mestres, l'esperit del treball creatiu.

Heu sentit fins ara prou reminiscències d'un home vell. Algun benefici concret podeu obtenir d'aquesta xerrada si penseu una mica en la següent proposta que és el resultat de la discussió precedent. Proposo que els següents dos punts s'afegeixin a les recomanacions oficials de l'Association:

I. *La formació de mestres de matemàtiques ha d'oferir experiència en treball independent ("creatiu") en el nivell apropiat en forma d'un Seminari de Resolució de Problemes o de qualsevol altra forma convenient.*

II. *Cursos de mètodes s'han d'oferir únicament amb una connexió estreta sigui amb els cursos de matèria o amb la pràctica d'ensenyar i, si és factible, únicament per instructors experimentats tant en recerca matemàtica com en ensenyament.*

## **14.8 L'actitud del mestre**

Com ja he dit, les meues classes adreçades a mestres eren, en algun sentit, cursos de mètodes. En aquestes classes apuntava a punts d'ús pràctic immediat en la labor diària del mestre. Tanmateix, de forma inevitable, he hagut d'expressar repetidament la meua visió de la labor diària del mestre i de l'actitud mental del mestre. Els meus comentaris tendien a proposar un conjunt de normes i de forma eventual els vaig condensar en "Deu Manaments per Mestres". Desitjo afegir alguns comentaris a aquests deu manaments.

Al formular aquestes regles, tinc al cap els participants a les meves classes, mestres que ensenyen matemàtiques a secundària. De totes maneres, aquestes regles són aplicables a qualsevol situació d'ensenyament, a qualsevol tema per ensenyar a qualsevol nivell. Especialment a secundària, tanmateix, el mestre de matemàtiques té més i millors oportunitats per aplicar-ne algunes que el mestre d'altres matèries: i això es refereix en especial a les regles 6, 7 i 8.

En quina autoritat reposen aquests manaments? Estimat company mestre, no acceptis cap autoritat a part de la teva pròpia experiència ben digerida i el teu propi judici ben ponderat. Intenteu veure de forma clara quin significat té el consell en la vostra situació particular, proveu el consell a les vostres classes, i jutgeu-lo després d'haver-lo assajat. Considerem ara les deu regles d'una en una, fent atenció especial a la feina del mestre de matemàtiques.

#### DEU MANAMENTS PER ALS MESTRES

1. Estar interessat per la vostra matèria.
2. Saber la vostra matèria.
3. Tenir coneixements sobre les diferents formes d'aprendre: La millor manera d'aprendre qualsevol cosa és descobrir-la un mateix.
4. Proveu de llegir les cares dels vostres alumnes, intenteu de veure les seves expectatives i dificultats, poseu-vos en el seu lloc.
5. No els hi doneu únicament informació, sinó també "saber fer", actituds mentals, l'hàbit del treball metòdic.
6. Deixeu-los aprendre conjecturant.
7. Deixeu-los aprendre demostrant.
8. Estar a l'aguait d'aquelles característiques del problema que s'està treballant que poden ser útils en la resolució de problemes posteriors - intenteu posar de manifest el patró general en que es fonamenta la situació concreta present.
9. No donar tot el vostre secret de cop - deixar als alumnes conjecturar abans d'explicar-lo - deixar-los trobar per ells mateixos tan com sigui possible.
10. Suggestir-ho, no forçar-los a empassar-s'ho.

(1) Hi ha tot just un únic mètode infal·lible per ensenyar: si el mestre està avorrit pel seu tema, tota la seva classe estarà infal·liblement avorrida pel tema.

Amb això n'hi ha prou per fer evident el primer i més important manament pels mestres: *Estar interessat per la vostra matèria.*

(2) Si un tema no té interès per tu, no l'ensenyis, perquè no seràs capaç d'ensenyar-lo de forma acceptable. L'interès és un *sine qua non*, una indispensable condició necessària: però, per ella mateixa, no és una condició suficient. Cap quantitat d'interès, cap mètode d'ensenyar o qualsevol altra cosa us permetrà explicar clarament un punt als vostres alumnes que tu mateix no entens clarament.

Amb això n'hi ha prou per fer obvi el segon manament pels mestres: *Saber la vostra matèria.*

Tots dos, interès per, i coneixement de, el tema són necessaris pel mestre. Poso interès en primer lloc perquè amb interès genuí teniu una bona oportunitat per adquirir el coneixement necessari, mentre que un xic de coneixement aparellat amb una manca d'interès pot fàcilment convertir-vos en un mestre excepcionalment dolent.

(3) Podeu treure un gran profit llegint un bon llibre o escoltant una bona conferència sobre psicologia de l'aprenentatge. Però llegir i escoltar no són absolutament necessaris, i no són tampoc suficients; heu de *conèixer les vies d'aprendre*, heu d'estar amb íntima relació amb el procés d'aprendre de l'*experiència* - de l'experiència dels vostres propis estudis i de l'observació dels vostres alumnes.

Acceptar el rumor com evidència per principi és dolent; donar crèdit a la xerrameca com a principi és pitjor. Hi ha un cas en el que no en podeu quedar satisfet únicament amb el rumor i la xerrameca, hi ha un principi de l'aprenentatge del que heu de prendre consciència guanyant-vos-el: el principi de l'aprenentatge actiu.<sup>7</sup> Intenteu veure com a mínim el seu punt central: *La millor manera d'aprendre qualsevol cosa és descobrir-la per un mateix.*

(4) Fins i tot amb un xic d'autèntic coneixement i interès i amb una certa comprensió del procés d'ensenyar podeu ser un mestre pobre. La situació és inusual, ho admito, però no tan rara; alguns de nosaltres ens hem trobat amb un mestre de totes maneres bastant competent que era incapaç d'establir "contacte" amb la seva classe. De manera que ensenyar per un doni com a resultat aprendre per l'altre, hi ha d'haver alguna forma de contacte o connexió entre el mestre i l'alumne: el mestre ha de ser capaç de veure la situació de l'alumne; ha de ser capaç de subscriure la causa de l'alumne. D'aquí el proper manament: *Proveu de llegir les cares dels vostres alumnes, intenteu de veure les seves expectatives i dificultats, poseu-vos en el seu lloc.*

La resposta dels alumnes a les vostres ensenyances depenen dels seus coneixements previs, del seu punt de vista, i dels seus interessos. Tanmateix, tingueu present i considereu el que saben i el que no saben, el que volen saber i el que no els importa saber, el que haurien de saber i quines coses no és tan important que sàpiguen.

(5) Les quatre regles anteriors contenen el que és essencial pel bon ensenyament. Formen conjuntament una espècie de condició necessària i suficient: si teniu interès en, i coneixement de, el tema i si, a més a més, podeu veure la situació de l'alumne i què ajuda o dificulta el seu aprenentatge, sou ja un bon mestre o ho sereu aviat; podeu necessitar únicament un xic d'experiència.

Falta explicar algunes de les conseqüències de les regles anteriors, especialment aquelles conseqüències que fan referència al mestre de secundària.

El coneixement consisteix d'una part amb "informació" i de l'altra part amb "saber fer". Saber fer és destresa; és habilitat per manejar informació, per utilitzar-la per un propòsit

---

<sup>7</sup> Veure secc 14.4 (1), 14.5 (1).

donat; saber fer es pot descriure com un grapat d'actituds mentals apropiades; saber fer és en última instància l'habilitat de treballar metòdicament.

En matemàtiques, saber fer és la habilitat de resoldre problemes, de construir demostracions, i d'examinar de forma crítica solucions i demostracions. I, en matemàtiques, saber fer és molt més important que la simple possessió de la informació. Per tant, el següent manament té una importància especial pel mestre de matemàtiques: *No els hi doneu únicament informació, sinó també "saber fer", actituds mentals, l'hàbit del treball metòdic.* Donat que saber fer és més important en matemàtiques que la informació, pot ser més important en la classe de matemàtiques com ensenyeu que el què ensenyeu.

(6) Primer conjectura, després demostra, així és com es produeix la majoria de les vegades un descobriment. Podeu saber això (de la vostra pròpia experiència, si és possible), i podeu saber, també, que el mestre de matemàtiques té una oportunitat excel·lent per mostrar el paper de la intuïció en el descobriment i per tant imprimir en els seus alumnes una actitud de la ment d'importància fonamental. Aquest últim punt no és tan apilament conegut com hauria de ser-ho i, per aquesta raó, necessita una atenció particular. Desitjo que no desatendreu els vostres alumnes en aquest respecte: *Deixeu-los aprendre conjecturant.* Alumnes ignorants i imprudents tenen tendència de respondre amb conjectures "folles". El que hem d'ensenyar és, evidentment, no a fer conjectures folles, sinó a fer conjectures "fonamentades", "raonables". Conjecturar de forma raonable està basat en la utilització de forma prudent de la evidència inductiva i de l'analogia, i en últim terme abraça tots els procediments del *raonament plausible* que tenen un paper en el "mètode científic".<sup>8</sup>

(7) "Les matemàtiques són una bona escola de raonament plausible". Aquest enunciat resumeix l'opinió que subratlla la regla precedent; no sona gens familiar i té un origen molt recent; de fet, crec que puc reclamar reconeixement per aquest.

"Les matemàtiques són una bona escola pel raonament demostratiu". Aquest enunciat sona molt familiar - alguna forma d'aquest és probablement tan vella com les mateixes matemàtiques. De fet, molt més és cert: les matemàtiques "is coextensive" amb el raonament demostratiu, que predomina les ciències fins allà on els seus conceptes estan edificats sobre nivell lògic - matemàtic suficientment abstracte i definit. Per sota d'aquest elevat nivell no hi ha lloc per un raonament demostratiu real (que està fora de lloc, per exemple, en les qüestions quotidianes). A més (no hi ha cap necessitat d'argumentar un punt tan àmpliament acceptat), el mestre de matemàtiques ha de familiaritzar tots els seus alumnes des del més elementals nivells amb raonament demostratiu: *Deixeu-los aprendre demostrant.*

(8) El saber fer és la part més valuosa del coneixement matemàtic, molt més valuosa que la simple possessió de la informació. Però com hem d'ensenyar el saber fer? Els alumnes només el poden aprendre per imitació i pràctica.

Quan doneu la solució d'un problema, *subratlleu* de forma convenient les *característiques instructives* de la solució. Una característica és instructiva si val la pena imitar-la, és a dir, si es pot utilitzar no solament en la resolució del problema actual, sinó també en la resolució d'altres problemes - quan més sovint s'utilitzi, més instructiva. Subratlleu les característiques instructives no únicament alabant-les (cosa que pot tenir l'efecte contrari amb alguns alumnes) sinó amb el vostre *comportament* (un xic d'actuació està molt bé si teniu un xic de talent teatral). Una característica ben subratllada pot convertir la vostra solució en un *model de solució*, en un impressionant *patró* que per imitació d'aquest

---

<sup>8</sup> Veieu capítol 15.

l'alumne podrà resoldre molts altres problemes. Per tant la regla: *Estar a l'aguait d'aquelles característiques del problema que s'està treballant que poden ser útils en la resolució de problemes posteriors - intenteu posar de manifest el patró general en que es fonamenta la situació concreta present.*<sup>9</sup>

(9) Desitjo ara indicar un petit truc de classe que és fàcil d'aprendre i que tot mestre ha de conèixer. Quan comenceu a discutir un problema, deixeu que els vostres alumnes conjecturin la solució. L'alumne que ha concebut una conjectura, o que fins i tot ha enunciat la seva conjectura, es compromet: ha de seguir el desenvolupament de la solució per veure si la seva conjectura és certa o no - i per tant ha de mantenir-se atent.

Aquest és un cas molt especial de la següent regla, en la qual està contingut, i explica, algunes parts de les regles 3 i 6: *No donar tot el vostre secret de cop - deixar als alumnes conjecturar abans d'explicar-lo - deixar-los trobar per ells mateixos tan com sigui possible.* De fet, el valor d'aquesta regla es degut a Voltaire que la va expressar de forma més enginyosa: "Le secret d'être ennuyeux c'est de tout dire" ("El secret per ser pesat consisteix en dir-ho tot").

(10) Un alumne presenta un llarg càlcul que ocupa varies línies. Mirant l'última línia, m'adono que el càlcul és erroni, però em refreno a dir-ho. Prefereixo seguir el càlcul amb l'alumne, línia per línia: "Has començat molt bé, el primer càlcul és correcte. La següent línia també és correcta; Has fet això i allò. La propera línia és correcta. Però, que creus d'aquesta línia?" L'error es troba en aquesta línia i si el descobreix ell mateix, té l'oportunitat d'aprendre alguna cosa. Si, tanmateix, d'entrada dic: "Això està malament" l'alumne es pot molestar i després no escoltar res del que digui posteriorment. I si li dic "Això està malament" d'entrada massa sovint, l'alumne acabarà per odiar-me a mi i a les matemàtiques i tots les meus esforços es perdran en tot el que al alumne fa referència. Estimat company mestre, eviteu dir "Esteu equivocats". Digueu en el seu lloc, si és possible: "Això està bé, però, ..." Si ho feu així, no sou hipòcrita, tot just sou humà. Heu de procedir així, està contingut de forma implícita en la regla 3. Però podem fer el consell més explícit: *Suggerir-ho, no forçar-los a empassar-s'ho.*

Les nostres dues últimes regles, 9 i 10, tendeixen en la mateixa direcció. El que conjuntament suggereixen és deixar als alumnes tanta llibertat i iniciativa com sigui possible dintre de les condicions d'ensenyament existents. Pressionat pel temps, el mestre de matemàtiques està sovint temptat de pecar contra l'esperit d'aquestes regles, el *principi d'ensenyament actiu*. Pot corre cap a la solució d'un problema sense donar prou temps als alumnes per plantejar - se de forma seriosa el problema. Pot donar un concepte o formular una regla massa ràpid, sense una preparació suficient amb material apropiat, abans que els alumnes puguin sentir la necessitat per aquest concepte o per aquesta regla. Pot cometre el famós error de *deus ex machina*: pot introduir alguna estratagema (per exemple, un recta auxiliar inesperada en una prova geomètrica) que porta al resultat de forma correcta, però que els alumnes no podrien veure en tota la seva vida com és humanament possible descobrir un truc com aquest que apareix directament del no res.

Hi ha massa temptacions per violar aquest principi. Tanmateix, remarcarem algunes més de les seves facetes.

*Deixeu als vostres alumnes fer les preguntes; o feu – els - hi aquelles preguntes de forma que ells mateixos se les puguin fer.*

---

<sup>9</sup> Voleu més detalls? Llegiu tot el llibre.

*Deixeu als vostres alumnes donar les respostes; o doneu - els - hi aquelles respostes de forma que ells mateixos se les puguin donar.*

De qualsevol forma eviteu respondre preguntes que ningú no ha proposat, ni vosaltres mateixos.