

Els objectius de l'educació matemàtica

George Polya

El present escrit, que no ha estat editat, és una transcripció d'una conferència en vídeo en la que el professor Polya presentava als meus estudiants d'educació matemàtica les seves opinions sobre l'ensenyament de les matemàtiques a primària -- T.C. O'Brien

Traducció: Xavier Valls

Desitjo parlar-vos sobre l'ensenyança de les matemàtiques a l'escola primària. De fet la meua xerrada tindrà dues parts. En la primera part voldria parlar de la finalitat de l'ensenyament de les matemàtiques a l'escola primària. I en la segona part, com ensenyar-les.

Primera part

He de confessar que parlo d'aquestes coses com un "outsider". Sempre he estat interessat en l'ensenyament, però la majoria del temps, aproximadament mig segle, he ensenyat a la universitat, en diverses universitats. I en els últims quinze anys, principalment he estat interessat en l'ensenyament a l'escola secundària. Per tant us parlo com un foraster, però podeu trobar alguns punts en el que dic que us poden ser útils en la vostra professió.

Quina és la finalitat d'ensenyar matemàtiques a l'escola primària? És millor considerar la pregunta més general: Quina és la finalitat de l'escola? I la millor pregunta és: En general, la gent quina pensa que ha de ser la finalitat de l'escola? Primer hi ha el punt de vista del pares. El vostre veí el senyor Vidal té un fill, en Joan. No vol que en Joan sigui un marginat. Diu que si en Joan abandona l'escola mai tindrà una bona feina. Per tant la finalitat de l'escola segons el senyor Vidal, i tots els altres senyors Vidal entre el públic en general, és preparar per a una feina, preparar els nens per que es puguin guanyar la vida. Però quin és el punt de vista de la comunitat? És el mateix. La comunitat, la comarca, l'estat i la ciutat tots volen gent que es guanyi la vida i pagui impostos i no visqui del subsidi públic. Així la comunitat també desitja que l'escola prepari la gent jove per que tingui una feina.

Si els pares van un xic més enllà en el seu pensament, i la comunitat també, la finalitat pot canviar un xic. Pares raonables, un raonable senyor Vidal, vol que el seu fill Joan tingui una feina per a la qual estigui ben preparat. Guanyarà més i serà més feliç.

De la mateixa manera, aquesta també és la finalitat de la comunitat – que per una banda hi hagi feines i per l'altra gent, i s'hagi d'assignar a la gent aquetes feines de forma que en conjunt estiguin el millor ajustades i que produeixin el millor rendiment -. O millor encara, que el conjunt de felicitat sigui el màxim. Què pot fer l'escola per això? La qüestió està en que quan el nen va a l'escola no podem saber encara quina feina podrà venir més tard, ni per quina feina estarà ben preparat. Per tant que hem de fer? Hem de preparar als joves per tal de que puguin triar entre totes les possibles professions. Han de tenir una visió de tot el món al seu voltant per poder reconèixer per quines feines estan ben preparats. Podeu dir-ho de moltes formes. A mi m'agrada l'expressió següent: les escoles han de desenvolupar tots els recursos interns del nen.

Tanmateix a les escoles tenim dos tipus d'objectius. En tenim de bons i de més modestos. Les escoles han de proporcionar adults que puguin treballar - adults que puguin ocupar un lloc de treball -. Però un objectiu més elevat és desenvolupar tots els recursos del nen en creixement,

de manera que pugui ocupar el lloc de treball pel qual està millor equipat. Per això, l'objectiu més elevat, l'expresso d'aquesta manera: desenvolupar totes les capacitats interiors del nen.

I ara, què hem de dir de l'ensenyament de les matemàtiques? Les matemàtiques a la primària tenen un objectiu bo i modest, i això està molt clar a les escoles de primària. Un adult que sigui analfabet complet no trobarà un lloc de treball en una societat moderna. Tothom ha de ser capaç de llegir, d'escriure i de fer una mica d'aritmètica, i possiblement un xic més. Per tant, l'objectiu bo, però modest, de l'escola primària consisteix en ensenyar les habilitats aritmètiques - sumar, restar, multiplicar, dividir i potser un xic més, com ensenyar fraccions, percentatges, raons -, i potser fins i tot un xic més. Tothom ha de tenir una idea de com mesurar longituds, àrees i volums. Aquest és un objectiu bo i modest de les escoles de primària - transmetre aquests coneixements - i no ho hem d'oblidar.

No obstant això, tenim un objectiu més elevat. Volem desenvolupar totes les capacitats del nen en creixement. I allò amb la que les matemàtiques tenen més a veure és amb el pensament. Les matemàtiques són una bona escola per ensenyar a pensar. Però, que és pensar? El pensament que es pot aprendre amb les matemàtiques és, per exemple, la manipulació d'abstraccions. Les matemàtiques tracten amb nombres. Els nombres són una abstracció. Quan nosaltres resollem un problema pràctic, aleshores d'aquest problema pràctic primer l'hem de fer un problema abstracte. Les matemàtiques s'apliquen directament sobre abstraccions. Un xic de matemàtiques ha de permetre al nen, com a mínim, manipular abstraccions, manipular estructures abstractes. Estructura és ara una paraula de moda. No és una paraula dolenta. Hi estic bastant a favor.

Però hi ha un punt que encara és més important. Veieu, les matemàtiques no són un esport per espectadors. Entendre matemàtiques vol dir ser capaç de fer matemàtiques. I què vol dir fer matemàtiques? En primer lloc vol dir ser capaç de resoldre problemes matemàtics. Pels objectius més elevats dels que ara estic parlant, són algunes estratègies generals per resoldre problemes - tenir la actitud correcta pels problemes i ser capaç d'atacar tot tipus de problemes, no únicament els problemes molt senzills, que es poden resoldre amb les habilitats de primària, sinó problemes més complicats d'enginyeria, física, i d'altres, que seran desenvolupats més endavant a la escola secundària -. Però els fonaments s'han d'iniciar a l'escola primària. I per això crec que un punt essencial a l'escola primària consisteix en iniciar als nens en les estratègies de la resolució de problemes. No resoldre aquest o aquell tipus de problema, no fer únicament llargues divisions o coses per l'estil, sinó desenvolupar una actitud per a la resolució de problemes.

Segona part

Ensenyar no és una ciència; és un art. Si ensenyar fos una ciència hi hauria una manera d'ensenyar que seria la millor, i tothom hauria d'ensenyar d'acord amb aquesta. Com que ensenyar no és una ciència, hi ha una gran amplitud, per les diferències personals, i moltes possibilitats. En un antic manual anglès hi havia la següent frase, "Qualsevol que sigui el tema, el que el mestre realment ensenya és ell mateix". Per tant, quan us dic d'ensenyar això o allò, si us plau, agafeu-ho en l'esperit correcte. Agafeu dels meus consells tot allò que s'ajusti amb la vostra personalitat. Heu d'ensenyar vosaltres mateixos.

Hi ha tantes bones maneres d'ensenyar com bons mestres. Però deixeu-me explicar-vos quina és la meua idea sobre ensenyar. Potser el primer punt, que és àmpliament acceptat, és que l'ensenyament ha de ser actiu, o millor l'aprenentatge actiu. Aquesta és la millor expressió.

No podeu aprendre tot just llegint. No podeu aprendre tot just escoltant lliçons. No podeu aprendre tot just mirant pel·lícules. Heu d'afegir-hi l'acció de la vostra ment per tal d'aprendre alguna cosa. Podeu anomenar això el mètode socràtic donat que Sòcrates, fa més de dos mil anys, el va enunciar d'una manera molt acolorida. Va dir que la idea ha de néixer en la ment dels alumnes i el mestre ha d'actuar tot just com a llevadora. La idea ha de néixer en la ment dels alumnes de manera natural i la llevadora no ha d'interferir gaire, ni massa aviat. Però si el part és massa llarg, la llevadora ha d'intervenir. Aquest és un principi molt vell i hi ha un nom modern per ell - el mètode del descobriment -. L'alumne aprèn per la seva pròpia acció. L'acció més important d'aprendre una cosa és descobrir-la per un mateix. Aquesta serà la part més important en l'ensenyament perquè el que un ha descobert per un mateix perdurará més temps i s'entendrà millor.

Hi ha altres principis sobre ensenyar. Si no us agrada la paraula principis utilitzeu la paraula "regles d'or". L'aprenentatge ha de ser actiu. Una altra regla, també enunciada sovint per tots els grans educadors - per Sòcrates, Plató, Comènius, Montessori - és que hi ha determinades prioritats. Per exemple, les coses van primer que les paraules. Això s'ha enunciat moltes vegades i de moltes maneres, però deixeu-me citar a Kant, que va dir, "Tot coneixement humà comença amb intuïcions, continua després amb concepcions, i acaba amb idees". Deixeu-me traduir això dient-ho amb termes més senzills. Vull dir, "Aprendre comença amb accions i percepcions, continua amb paraules i conceptes, i ha d'acabar en bons hàbits mentals".

Aquest és l'objectiu general de l'ensenyament matemàtic: desenvolupar en cada alumne, tan com sigui possible, els bons hàbits mentals a l'atacar qualsevol tipus de problema.

Heu de desenvolupar tota la personalitat de l'alumne i l'ensenyament de les matemàtiques ha de desenvolupar el pensament. L'ensenyament de les matemàtiques pot també desenvolupar la claredat i la perseverança. Pot també, fins a un cert punt desenvolupar el caràcter però el més important de tots és desenvolupar el pensament.

El meu punt de vista és que la part més important del pensament que es desenvolupa en matemàtiques és l'actitud correcta a l'atacar problemes, al tractar amb problemes. Tenim problemes a la vida quotidiana, tenim problemes a la ciència, tenim problemes a la política. Tenim problemes a tot arreu. L'actitud correcta de pensar potser lleugerament diferent d'un domini a un altre, però tot just tenim un cap, i per tant és natural que, en definitiva, hi hagi un únic mètode general per atacar tot tipus de problemes. La meva opinió personal és que el punt més important de l'ensenyament de les matemàtiques és desenvolupar les estratègies per a la resolució de problemes.

Els dos principis de l'ensenyament actiu - la prioritat de l'acció i la percepció - són tinguts en compte per gairebé totes les tendències de l'ensenyament de les matemàtiques que s'utilitzen avui en dia i que tenen una certa influència.

Però potser la més desenvolupada en els últims temps és a Anglaterra. Hi ha una fundació anomenada Nuffield Foundation, que propaga la idea de l'ensenyament actiu i la prioritat d'acció i percepció en l'aprenentatge (Polya parla dels anys 60 del segle XX). El seu primer llibre té un bonic lema. Està basat en un proverbi xinès que diu, "Ho escolto i ho oblidó. Ho veig i ho recordo. Ho faig i ho entenc".

Així que "ho escolto i ho oblidó". El que tot just heu escoltat ho oblideu ràpid. Una bona advertència s'oblida ràpid. El que veieu amb els vostres propis ulls es recorda millor, però realment enteneu una cosa quan l'heu fet amb les vostres mans. Així que el lema és, "Ho escolto i ho oblidó. Ho veig i ho recordo. Ho faig i ho entenc".

Per tant les escoles, especialment les escoles de primària, estan avui en dia en evolució. Una fracció significativa, un deu o un vint per cent, ja tenen el nou mètode d'ensenyament que es pot caracteritzar de la següent manera comparat amb el mètode antic d'ensenyament: L'antic mètode és autoritari i centrat en el mestre; el nou mètode és permissiu i centrat en l'alumne. En temps passats el mestre estava en el centre de la classe, o al front de la classe. Tothom el mirava i escoltava el que deia. Avui cada alumne ha de ser el centre de la classe, i se li ha de permetre dur a terme qualsevol bona idea que li vingui al cap. Se li ha de permetre de seguir en el seu camí, cada un per ell mateix o en petits grups. Si un alumne té una bona idea en una discussió de la classe aleshores el mestre canvia els seus plans i considera la bona idea i la classe segueix aquesta idea.

Us vaig a donar un nom. És el d'una persona particularment activa en aquesta direcció i que és molt intel·ligent, molt bona. És Miss Edith Biggs. És una mestra especialment dotada que té un gran entusiasme i talent per aquest nou ensenyament permissiu i centrat en l'alumne.

En aquesta classe, permissiva i centrada en l'alumne, cada grup de nois fa alguna cosa més. Juguen (diguem que ells pensen que juguen, però en realitat aprenen). La mestra els hi dóna alguns materials. Juguen i desenvolupen les seves pròpies idees en el joc. Per exemple, un dels materials és paper quadriculat, i una gran quantitat de cubs, cubs d'un centímetre de costat gairebé un centenar. Així els nois juguen amb ells. És ensenyament actiu, és a dir, ensenyament per acció i percepció.

Deixeu-me donar-vos un exemple d'aquesta activitat. La classe discuteix sobre petits rectangles. Ha de venir - aquest és el punt més important - de l'acció i la percepció. Ha de venir de coses que els nois han vist i tocat prou vegades. Així tothom ha vist una habitació, i les parets d'una habitació normal són rectangles, o gairebé. Així s'aprèn el que és un rectangle. El terra d'una habitació normal és un rectangle, i qualsevol paret és un rectangle. El sostre és un rectangle. Un dels bons objectius d'ensenyar és, per tant, entendre la longitud i l'àrea. Per tant, mesureu la longitud dels costats d'un rectangle i arribeu a la idea del perímetre del rectangle. Després treballeu amb l'àrea d'un rectangle. Construïu un rectangle a partir de quadrats iguals, quadrats unitaris, i arribeu a la noció d'àrea.

De tota manera, ara sou en una classe que està un xic familiaritzada amb l'àrea i el perímetre dels rectangles. En el mateix full de paper dibuixeu rectangles amb el mateix perímetre - un perímetre de 20 - que se superposin. Trobem que hi ha 9 d'aquests rectangles; comencen amb amplada igual a 1 i altura 9, i després amplada 2 i altura 8, fins arribar a amplada 9 i altura 1.

Hi ha moltes coses a observar - acció i percepció -. A alguns dels nois els sorprendrà l'observació de que els vèrtexs de tots aquests rectangles es troben sobre una recta (feu un dibuix ordenant els rectangles de menor a major amplada, per veure-ho). Després s'adonaran de que un d'aquests rectangles té tots els costats iguals i podeu fer moltes preguntes sobre la figura. Un dels punts interessants és que el mestre no ha de fer les preguntes sinó que són els nois qui han de fer-les. Sabem que tots tenen el mateix perímetre. Tenen tots la mateixa àrea? Quin rectangle és el que té la més gran?

Aquí teniu una altra activitat amb rectangles. Un altre cop agafeu un paper quadriculat i retalleu diferents rectangles amb la mateixa àrea, posem per cas una àrea de 24 unitats. Superposeu-los en el mateix paper. Ara els vèrtexs oposats al vèrtex en que tots es superposen no estan sobre una recta. Tenim una curiosa línia corba.

Nois amb una certa imaginació poden unir aquests punts per formar la línia corba. Ara tenim una altra constatació. Aquest és un exemple d'activitat amb rectangles on els nois poden fer les seves tries. Fan les seves pròpies observacions i el mestre tot just ajuda un xic per aquí o per allà amb petites pistes. Si els nois no tenen cap tipus d'idees, aleshores el mestre ben preparat, que utilitza l'ensenyament centrat en els alumnes, pot donar algunes bones pistes.

Potser un punt en el que tant Miss Biggs com la Nuffield Foundation no posen prou èmfasi és el paper de conjecturar. Conjecturar ens ve de manera natural. Tothom prova de conjecturar i no s'ha d'ensenyar. El que s'ha d'ensenyar és a conjecturar de forma raonable. I especialment el que s'ha d'ensenyar és a no creure les pròpies conjectures, sinó a comprovar-les. I l'activitat dels alumnes començarà millor si comenceu per fer-los conjecturar.

Aquí teniu un altre exemple. Una activitat pot ser mesurar la llargada i l'amplada de la classe. Alguns nois es poden avorrir amb això si ja ho han fet amb algun mestre anterior. Podeu obtenir un xic més d'atenció si comenceu amb una conjectura. Podeu dir, "Em sembla que la classe és el doble de llarga que ample. És veritat?". Suposo que algun dels nois dirà, "No, és més llarga que el doble". Altres diran, "no, és més curta". Pocs diran, "Exactament". Després de que hagin conjecturat, faran la mesura amb molt més d'interès, perquè tothom està interessat en saber si la seva conjectura serà certa o no. Aquest és un cas molt especial de tàctica per a la resolució de problemes. Si aneu més enllà, us adonareu que conjecturar té un paper important. La solució d'un problema comença sempre de forma natural amb una conjectura - no sempre amb una bona conjectura -. Pel contrari, normalment la conjectura no és quasi mai completament bona. Està un xic fora del centre i l'art de resoldre problemes consisteix en gran part en corregir les vostres conjectures.

Us he donat algunes de les meves idees sobre com heu d'ensenyar matemàtiques. Hi ha les idees de l'aprenentatge actiu, la prioritat de l'acció i la percepció, i ensenyar amb una activitat que permeti als nois començar amb alguna conjectura. Espero que algun d'aquests punts sintonitzi amb alguns de vosaltres. Gràcies.