IES JAUME SALVADOR I PEDROL

6è CONTROL DE MATEMÀTIQUES B1B NOTA:

Nom:.. Data: ....

1.Defineix que és una successió i posa'n un exemple.

Veure llibre o apunts de classe.

2. $a_n = \dfrac{n^2}{n+1}$ **és l'expressió del terme general d'una successió. Calcula els termes *a_8* i *a_{100}*.**
Pots determinar l'expressió del terme *a_{n-1}* en funció de *n*?

$$a_8 = \frac{8^2}{8+1} = \frac{64}{9}$$
$$a_{100} = \frac{100^2}{100+1} = \frac{10000}{101}$$
$$a_{n-1} = \frac{(n-1)^2}{(n-1)+1} = \frac{n^2-2\text{n}+1}{n}$$

3. Determina la monotonia de les successions següents, aplicant-hi la definició, i determina, si existeixen, les fites superior i inferior de cadascuna de les successions.

$$a_n = n-n^2$$
$$a_{n+1} = n+1-(n+1)^2 = n+1-(n^2+2\text{n}+1) = n+1-n^2-2\text{n}-1 = -n^2-n$$
$$a_{n+1}-a_n = -n^2-n-(n-n^2) = -n^2-n-n+n^2 = -2\text{n} < 0 \Rightarrow a_n \quad \textit{és decreixent}$$

Com que a_n és decreixent, aleshores a_1 serà la fita superior, $K = a_1 = 1-1^2 = 0$. Aquesta successió no té fita inferior, ja que és decreixent i el valor de cada terme es va fent cada cop més petit.

$$b_n = \frac{n-1}{n}$$
$$b_{n+1} = \frac{(n+1)-1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$
$$b_{n+1}-b_n = \frac{n}{n+1}-\frac{n-1}{n} = \frac{n^2-(n+1)(n-1)}{n(n+1)} = \frac{n^2-(n^2-1)}{n(n+1)} = \frac{n^2-n^2+1}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)} > 0$$
$$\Rightarrow b_n \quad \textit{és} \quad \textit{creixent}$$

Com que b_n és creixent, aleshores la seva fita inferior serà el primer terme de la successió, $k = b_1 = \dfrac{1-1}{1} = 0$. Com que la successió és una fracció, on el numerador sempre és més petit que el denominador aleshores la fita superior serà *$K=1$*.

4. En una progressió geomètrica *$a_{12}=6561$* i *$a_8=81$*. Calcula *a_1*, *a_5*, *r* i *a_n*.

Per definició sabem que:

$$a_{12} = a_1 \cdot r^{11} \Rightarrow 6561 = a_1 \cdot r^{11}$$
$$a_8 = a_1 \cdot r^7 \Rightarrow 81 = a_1 \cdot r^7$$

Si dividim ambdues equacions obtenim:

$$\frac{6561}{81} = \frac{a_1 \cdot r^{11}}{a_1 \cdot r^7} = \frac{r^{11}}{r^7} \Rightarrow r^4 = 81 \Rightarrow r = 3$$

Ara, substituint la raó en qualsevol de les dues equacions anteriors trobarem a_1:

$$81 = a_1 \cdot 3^7 \Rightarrow a_1 = \frac{81}{3^7} = \frac{3^4}{3^7} = \frac{1}{3^3} \Rightarrow a_1 = \frac{1}{27}$$

Ara, ja només cal aplicar les definicions per trobar a_5 i a_n.

$$a_5 = \frac{1}{27} \cdot 3^4 = 3$$

$$a_n = \frac{1}{27} \cdot 3^{n-1}$$

5. Calcula la suma $\frac{1}{4} + 1 + 4 + ... + 4^7$, aplicant els coneixements de les progressions geomètriques.

Es tracta de la suma dels 9 primers termes d'una progressió geomètrica de raó 4 i que té com a primer terme $a_1 = \frac{1}{4}$. Per tant, aplicant la definició de la suma dels n primers termes d'una progressió geomètrica obtindrem:

$$S_9 = \frac{a_1 (r^n - 1)}{r - 1} = \frac{\frac{1}{4}(4^9 - 1)}{4 - 1} = \frac{\frac{1}{4}(4^9 - 1)}{3} = \frac{\frac{1}{4} \cdot 262143}{3} = \frac{262143}{4 \cdot 3} = \frac{262143}{12} = \frac{87381}{4}$$