UNITAT 3

RESOLUCIÓ DE SISTEMES MITJANÇANT DETERMINANTS

Pàgina 54

Determinants d'ordre 2

- **Resol cada un dels següents sistemes d'equacions i calcula el determinant de la matriu dels coeficients:**

a) $\begin{cases} 2x + 3y = 29 \\ 3x - \ \ y = \ \ 5 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 5x - 3y = \ \ 8 \\ -10x + 6y = -16 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 4x + \ \ y = 17 \\ 5x + 2y = 19 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 9x - 6y = \ \ 7 \\ -6x + 4y = 11 \end{cases}$ **e)** $\begin{cases} 18x + 24y = 6 \\ 15x + 20y = 5 \end{cases}$ **f)** $\begin{cases} 3x + 11y = 128 \\ 8x - \ \ 7y = \ \ 46 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} 2x + 3y = 29 \\ 3x - \ \ y = \ \ 5 \end{array}\right\}$ $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -11 \neq 0$

Solució: $x = 4, \ \ y = 7$

b) $\left.\begin{array}{l} 5x - 3y = \ \ 8 \\ -10x + 6y = -16 \end{array}\right\}$ $\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -10 & 6 \end{vmatrix} = 0.$ *Solució:* $x = \frac{8}{5} + \frac{3}{5}\lambda, \ \ y = \lambda$

c) $\left.\begin{array}{l} 4x + \ \ y = 17 \\ 5x + 2y = 19 \end{array}\right\}$ $\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$

Solució: $x = 5, \ \ y = -3$

d) $\left.\begin{array}{l} 9x - 6y = \ \ 7 \\ -6x + 4y = 11 \end{array}\right\}$ $\begin{vmatrix} 9 & -6 \\ -6 & 4 \end{vmatrix} = 0.$ *Incompatible*

e) $\left.\begin{array}{l} 18x + 24y = 6 \\ 15x + 20y = 5 \end{array}\right\}$ $\begin{vmatrix} 18 & 24 \\ 15 & 20 \end{vmatrix} = 0$

Solució: $x = \frac{1}{3} - \frac{4}{3}\lambda, \ \ y = \lambda$

f) $\left.\begin{array}{l} 3x + 11y = 128 \\ 8x - \ \ 7y = \ \ 46 \end{array}\right\}$ $\begin{vmatrix} 3 & 11 \\ 8 & -7 \end{vmatrix} = -109 \neq 0.$ *Solució:* $x = \frac{1402}{109}, \ \ y = \frac{886}{109}$

Pàgina 55

Resolució de sistemes 2 × 2 mitjançant determinants

■ **Resol, aplicant-hi $x = \dfrac{|A_x|}{|A|}$ i $y = \dfrac{|A_y|}{|A|}$, els següents sistemes d'equacions i comprova'n la solució:**

a) $\begin{cases} 3x - 5y = 73 \\ 4x + 2y = 2 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 5x + 4y = 33 \\ 7x - 11y = 13 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} 3x - 5y = 73 \\ 4x + 2y = 2 \end{array}\right\}$ $|A| = \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 26;$ $|A_x| = \begin{vmatrix} 73 & -5 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 156;$

$|A_y| = \begin{vmatrix} 3 & 73 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -286;$

Per tant: $x = \dfrac{156}{26} = 6;$ $y = \dfrac{-286}{26} = -11$

b) $\left.\begin{array}{l} 5x + 4y = 33 \\ 7x - 11y = 13 \end{array}\right\}$ $|A| = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 7 & -11 \end{vmatrix} = -83;$ $|A_x| = \begin{vmatrix} 33 & 4 \\ 13 & -11 \end{vmatrix} = -415;$

$|A_y| = \begin{vmatrix} 5 & 33 \\ 7 & 13 \end{vmatrix} = -166;$

Per tant: $x = \dfrac{-415}{-83} = 5;$ $y = \dfrac{-166}{-83} = 2$

Extensió del resultat a sistemes 3 × 3

■ **Com creus que seria la solució d'un sistema de tres equacions amb tres incògnites segons la regla anterior? Posa les fórmules corresponents i aplica-les a la resolució dels sistemes següents. Comprova'n les solucions.**

a) $\begin{cases} 3x - 2y + z = 20 \\ x + 3z = 14 \\ y - z = -4 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x - y + z = 1 \\ x - 2y = 2 \end{cases}$

Les fórmules són:

$A_x = \begin{pmatrix} c_1 & a_{12} & a_{13} \\ c_2 & a_{22} & a_{23} \\ c_3 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix};$ $A_y = \begin{pmatrix} a_{11} & c_1 & a_{13} \\ a_{21} & c_2 & a_{23} \\ a_{31} & c_3 & a_{33} \end{pmatrix};$ $A_z = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & c_2 \\ a_{31} & a_{32} & c_3 \end{pmatrix}$

a) $\begin{cases} 3x - 2y + z = 20 \\ x + 3z = 14 \\ y - z = -4 \end{cases}$

$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -10;$ $|A_x| = \begin{vmatrix} 20 & -2 & 1 \\ 14 & 0 & 3 \\ -4 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -50;$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} 3 & 20 & 1 \\ 1 & 14 & 3 \\ 0 & -4 & -1 \end{vmatrix} = 10; \ |A_z| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 20 \\ 1 & 0 & 14 \\ 0 & 1 & -4 \end{vmatrix} = -30;$$

Per tant: $x = \dfrac{-50}{-10} = 5$; $y = \dfrac{10}{-10} = -1$; $z = \dfrac{-30}{-10} = 3$;

a) $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x - y + z = 1 \\ x - 2y \quad\;\; = 2 \end{cases}$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 2;$$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 8;$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2; \ |A_z| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = -4$$

Per tant: $x = \dfrac{8}{2} = 4$; $y = \dfrac{2}{2} = 1$; $z = \dfrac{-4}{2} = -2$;

Pàgina 57

1 Calcula el valor d'aquests determinants:

a) $\begin{vmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{4} & \mathbf{7} \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{11} \\ \mathbf{3} & \mathbf{33} \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} \mathbf{373} & \mathbf{141} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{vmatrix}$ **d)** $\begin{vmatrix} \mathbf{7} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-2} \end{vmatrix}$

a) $3 \cdot 7 - 4 \cdot 1 = 17$

b) 0, perquè la segona fila és proporcional a la primera.

c) 0, perquè la segona fila només té zeros.

d) $7 \cdot (-2) = -14$

2 Calcula:

a) $\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} \boldsymbol{a^2} & \boldsymbol{b^2} \\ \boldsymbol{a^3} & \boldsymbol{b^3} \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{vmatrix}$ **d)** $\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{ac} & \boldsymbol{bc} \end{vmatrix}$

a) $a \cdot d - b \cdot c$

b) $a^2 \cdot b^3 - a^3 \cdot b^2 = a^2 \cdot b^2(b - a)$

c) 0, perquè la segona fila només té zeros.

d) $a \cdot b \cdot c - b \cdot a \cdot c = 0$, o també observeu que la segona fila és proporcional a la primera.

Pàgina 58

1 Calcula els determinants següents:

a) $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \\ 9 & 6 & 8 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 9 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \\ 9 & 6 & 8 \end{vmatrix} = -114$ b) $\begin{vmatrix} 9 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3$

2 Troba el valor d'aquests determinants:

a) $\begin{vmatrix} 0 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 10 & 47 & 59 \\ 0 & 10 & 91 \\ 0 & 0 & 10 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 0 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 14$ b) $\begin{vmatrix} 10 & 47 & 59 \\ 0 & 10 & 91 \\ 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} = 1000$

Pàgina 60

3 Justifica, sense desenvolupar, aquestes igualtats:

a) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 11 & 4 \end{vmatrix} = 0$ **b)** $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 7 \\ 2 & 9 & 1 \\ -8 & -2 & -14 \end{vmatrix} = 0$

c) $\begin{vmatrix} 7 & 4 & 1 \\ 2 & 9 & 7 \\ 27 & 94 & 71 \end{vmatrix} = 0$ **d)** $\begin{vmatrix} 45 & 11 & 10 \\ 4 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$

a) Té una fila de zeros (propietat 2).

b) La 3.ª fila és proporcional a la 1.ª (3.ª = (–2) · 1.ª) (propietat 6).

c) La 3.ª fila és una combinació lineal de les dues primeres (3.ª = 1.ª + 10 · 2.ª) (propietat 9).

d) La 1.ª fila és una combinació lineal de les altres dues (1.ª = 10 · 2.ª + 3.ª) (propietat 9).

4 Tenint en compte el resultat del determinant que et donem, calcula la resta sense desenvolupar:

$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$ **a)** $\begin{vmatrix} 3x & 3y & 3z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 5x & 5y & 5z \\ 1 & 0 & 3/5 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2x+5 & 2y & 2z+3 \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 3x & 3y & 3z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 = 3$

b) $\begin{vmatrix} 5x & 5y & 5z \\ 1 & 0 & 3/5 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5 \cdot \dfrac{1}{5} \begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 = 1$

c) $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2x+5 & 2y & 2z+3 \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$

Pàgina 61

1 Troba dos menors d'ordre dos i dos menors d'ordre tres de la matriu:

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{-1} & \mathbf{5} \\ \mathbf{4} & \mathbf{6} & \mathbf{2} & \mathbf{7} \\ \mathbf{5} & \mathbf{-1} & \mathbf{2} & \mathbf{6} \\ \mathbf{4} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{5} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{3} & \mathbf{4} \end{pmatrix}$$

Menors d'ordre dos; per exemple:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 4 & 6 & 2 & 7 \\ 5 & -1 & 2 & 6 \\ 4 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 4$$

Menors d'ordre tres; per exemple:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 4 & 6 & 2 & 7 \\ 5 & -1 & 2 & 6 \\ 4 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 6 & 2 \\ 5 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 68, \quad \begin{vmatrix} -1 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 21$$

2 Troba el menor complementari i l'adjunt dels elements a_{12}, a_{33} i a_{43} de la matriu:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{6} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{3} & \mathbf{5} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{4} & \mathbf{6} & \mathbf{5} & \mathbf{7} \end{pmatrix}$$

$$\alpha_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 7 \end{vmatrix} = -2; \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \alpha_{12} = -1 \cdot (-2) = 2$$

$$\alpha_{33} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 6 \\ 2 & -1 & 5 \\ 4 & 6 & 7 \end{vmatrix} = 108; \quad A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \alpha_{33} = 1 \cdot 108 = 108$$

$$\alpha_{43} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 6 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 16; \quad A_{43} = (-1)^{4+3} \cdot \alpha_{43} = -1 \cdot 16 = -16$$

Pàgina 62

1 Calcula el determinant següent aplicant-hi la regla de Sarrus i desenvolupa'l per cada una de les seves files i cada una de les seves columnes:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{7} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-5} & \mathbf{2} & \mathbf{6} \\ \mathbf{9} & \mathbf{8} & \mathbf{4} \end{vmatrix}$$

Comprova que s'obté el mateix resultat en els set casos.

Aplicant-hi la regla de Sarrus:

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -5 & 2 & 6 \\ 9 & 8 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 \cdot 4 + (-5) \cdot 8 \cdot (-1) + 7 \cdot 6 \cdot 9 - (-1) \cdot 2 \cdot 9 - 6 \cdot 8 \cdot 3 - 7 \cdot (-5) \cdot 4 = 456$$

Desenvolupant per la 1.ª fila:

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -5 & 2 & 6 \\ 9 & 8 & 4 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} - 7 \begin{vmatrix} -5 & 6 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 9 & 8 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-40) - 7 \cdot (-74) - 1 \cdot (-58) =$$

$$= -120 + 518 + 58 = 456$$

Desenvolupant per la 2.ª fila:

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -5 & 2 & 6 \\ 9 & 8 & 4 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} - 6 \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 9 & 8 \end{vmatrix} = 5 \cdot 36 + 2 \cdot 21 - 6 \cdot (-39) =$$

$$= 180 + 42 + 234 = 456$$

Desenvolupant per la 3.ª fila:

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -5 & 2 & 6 \\ 9 & 8 & 4 \end{vmatrix} = 9 \begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} - 8 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 6 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = 9 \cdot 44 - 8 \cdot 13 + 4 \cdot 41 =$$

$$= 396 - 104 + 164 = 456$$

Desenvolupant per la 1.ª columna:

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -5 & 2 & 6 \\ 9 & 8 & 4 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} + 9 \begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-40) + 5 \cdot 36 + 9 \cdot 44 =$$

$$= -120 + 180 + 396 = 456$$

Desenvolupant per la 2.ª columna:

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -5 & 2 & 6 \\ 9 & 8 & 4 \end{vmatrix} = -7\begin{vmatrix} -5 & 6 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} - 8\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 6 \end{vmatrix} = -7 \cdot (-74) + 2 \cdot 21 - 8 \cdot 13 =$$

$$= 518 + 42 - 104 = 456$$

Desenvolupant per la 3.ª columna:

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -5 & 2 & 6 \\ 9 & 8 & 4 \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 9 & 8 \end{vmatrix} - 6\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 9 & 8 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-58) - 6 \cdot (-39) + 4 \cdot 41 =$$

$$= 58 + 234 + 164 = 456$$

2 **Calcula els determinants següents:**

a) $\begin{vmatrix} 7 & 0 & -3 & 4 \\ 4 & 0 & 4 & 7 \\ 3 & 7 & 6 & 9 \\ 1 & 0 & 1 & 9 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 7 & 0 & -3 & 4 \\ 4 & 0 & 4 & 7 \\ 3 & 7 & 6 & 9 \\ 1 & 0 & 1 & 9 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} -7\begin{vmatrix} 7 & -3 & 4 \\ 4 & 4 & 7 \\ 1 & 1 & 9 \end{vmatrix} = -7 \cdot 290 = -2\,030$

(1) Desenvolupant per la 2.ª columna.

b) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} -2\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -2 \cdot 28 + 2 \cdot 28 = 0$

(1) Desenvolupant per la 4.ª fila.

També podríem haver observat que la 4.ª columna és igual a la suma de les altres tres; i, per tant, el determinant val zero.

Pàgina 63

1 **Calcula el rang de les matrius següents:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 & 1 & 0 & 6 \\ 7 & 0 & 3 & 2 & 1 & 8 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 6 & 5 \\ 6 & 5 & 3 & 12 & 8 \\ 12 & 10 & 6 & 23 & 16 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & -3 & -7 \\ 7 & 2 & -3 & -8 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 & 1 & 0 & 6 \\ 7 & 0 & 3 & 2 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

Prenem un menor d'ordre 2 diferent de zero: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -7 \neq 0$

Així doncs, les dues primeres files són linealment independents.

Observem que la 3.ª fila és la suma de les dues primeres, i que la 4.ª fila és la suma de la 2.ª i la 3.ª. Per tant, $ran\,(A) = 2$.

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 6 & 5 \\ 6 & 5 & 3 & 12 & 8 \\ 12 & 10 & 6 & 23 & 16 \end{pmatrix}$$

Prenem un menor d'ordre 2 diferent de zero: $\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 8 \neq 0$. Així doncs, les dues primeres files són linealment independents.

Vegem si la 3.ª fila depèn linealment de les anteriors:

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 6 \\ 6 & 5 & 12 \end{vmatrix} = 8 \neq 0 \quad \rightarrow$$ Les 3 primeres files són linealment independents.

Vegem si la 4.ª fila depèn linealment de les anteriors:

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 2 & 6 \\ 6 & 5 & 3 & 12 \\ 12 & 10 & 6 & 23 \end{vmatrix} = 0 \text{ i } \begin{vmatrix} 4 & 2 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 6 & 5 \\ 6 & 5 & 12 & 8 \\ 12 & 10 & 23 & 16 \end{vmatrix} = 0$$

Per tant, $ran\,(B) = 3$.

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Prenem un menor d'ordre 2 diferent de zero: $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$. Així doncs, les dues primeres files són linealment independents.

Com que $\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, les tres primeres files són linealment independents.

Com que $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$, aleshores $ran\,(C) = 4$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & -3 & -7 \\ 7 & 2 & -3 & -8 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Prenem un menor d'ordre 2 diferent de zero: $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$. Així doncs, les dues primeres files són linealment independents.

Com que $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -9 \neq 0$, la primera, la segona i la quarta files són linealment independents.

La tercera fila és la suma de les dues primeres. Per tant, $ran\,(D) = 3$.

Pàgina 65

1 Aplica el teorema de Rouché per descobrir si els sistemes següents són compatibles o incompatibles:

a) $\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ x + 3y = -2 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 4x + 5y = 7 \\ 2x - y = 0 \\ 7x + 11y = 4 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x + y + 2z = 7 \\ 3x - y + 4t = 1 \\ x - 3y - 4z + 4t = 6 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{r} 3x - 2y = 5 \\ x + 3y = -2 \\ 2x - y = 3 \end{array}\right\}$ $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ $A' = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 11 \neq 0 \rightarrow ran\,(A) = 2$

$|A'| = 0 \rightarrow ran\,(A') = 2$

El sistema és *compatible*.

b) $\left.\begin{array}{r} 4x + 5y = 7 \\ 2x - y = 0 \\ 7x + 11y = 4 \end{array}\right\}$ $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & -1 \\ 7 & 11 \end{pmatrix}$ $A' = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 7 \\ 2 & -1 & 0 \\ 7 & 11 & 4 \end{pmatrix}$

$|A'| = 147 \neq 0 \rightarrow ran\,(A') = 3 \neq ran\,(A) = 2$

El sistema és *incompatible*.

c) $\left.\begin{array}{r} x + \ \ y + 2z \qquad\ = 7 \\ 3x - \ \ y + \qquad 4t = 1 \\ x - 3y - 4z + 4t = 6 \end{array}\right\}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 4 \\ 1 & -3 & -4 & 4 \end{pmatrix}$ $A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 7 \\ 3 & -1 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & -3 & -4 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

Calculem el rang de A:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0; \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & -4 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 0 \quad \rightarrow \quad ran\,(A) = 2$$

Calculem el rang de A':

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 6 \end{vmatrix} = -76 \quad \rightarrow \quad ran\,(A') = 3 \neq ran\,(A)$$

El sistema és *incompatible.*

2 Segueix el mateix procés que en l'exercici anterior i descobreix si els sistemes següents són compatibles o incompatibles:

a) $\left\{\begin{array}{r} x + 3y - z = 1 \\ 2x + \qquad z = 2 \\ 2y - z = 0 \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{r} x + 3y - z = 1 \\ 2x + \qquad z = 2 \\ 2y - z = 5 \end{array}\right.$ **c)** $\left\{\begin{array}{r} x + \ \ y + 2z \qquad\ = 7 \\ 3x - \ \ y + \qquad 4t = 1 \\ x - 3y - 4z + 4t = -13 \end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{r} x + 3y - z = 1 \\ 2x + \qquad z = 2 \\ 2y - z = 0 \end{array}\right\}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ $A' = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Calculem el rang de A:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -6 \neq 0 \ \text{ i } \ |A| = 0 \quad \rightarrow \quad ran\,(A) = 2$$

Calculem el rang de A':

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{(ja que la 1.ª i la 3.ª columnes són iguals)} \quad \rightarrow \quad ran\,(A') = 2 = ran\,(A)$$

El sistema és *compatible.*

Observació: Com que la 4.ª columna de A' i la 1.ª són iguals, necessàriament $ran\,(A') = ran\,(A)$; és a dir, el sistema és compatible.

b) $\left.\begin{array}{r} x + 3y - z = 1 \\ 2x + \qquad z = 2 \\ 2y - z = 5 \end{array}\right\}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ $A' = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$

Sabem que $ran\,(A) = 2$ (vegeu apartat *a)* d'aquest exercici).

Calculem el rang de A':

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} = -30 \neq 0 \quad \rightarrow \quad ran(A') = 3 \neq ran(A)$$

El sistema és *incompatible.*

c) $\left.\begin{array}{l} x + y + 2z = 7 \\ 3x - y + 4t = 1 \\ x - 3y - 4z + 4t = -13 \end{array}\right\}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 4 \\ 1 & -3 & -4 & 4 \end{pmatrix}$ $A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 7 \\ 3 & -1 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & -3 & -4 & 4 & -13 \end{pmatrix}$

Sabem que $ran(A) = 2$ (vegeu apartat *c)* de l'exercici anterior).

Calculem el rang de A':

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & -13 \end{vmatrix} = 0 \quad \rightarrow \quad ran(A') = 2 = ran(A)$$

El sistema és *compatible.*

Pàgina 66

1 Resol mitjançant la regla de Cramer:

a) $\left\{\begin{array}{l} x - 3y + 5z = -24 \\ 2x - y + 4z = -8 \\ x + y = 9 \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{l} x + y - z = 2 \\ x - y + z = 8 \\ 2x + 3y = 10 \end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{l} x - 3y + 5z = -24 \\ 2x - y + 4z = -8 \\ x + y = 9 \end{array}\right\}$ $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} -24 & -3 & 5 \\ -8 & -1 & 4 \\ 9 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -7; \quad |A_y| = \begin{vmatrix} 1 & -24 & 5 \\ 2 & -8 & 4 \\ 1 & 9 & 0 \end{vmatrix} = -2; \quad |A_z| = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -24 \\ 2 & -1 & -8 \\ 1 & 1 & 9 \end{vmatrix} = 5$$

Per tant: $x = 7$, $y = 2$, $z = -5$

b) $\left.\begin{array}{l} x + y - z = 2 \\ x - y + z = 8 \\ 2x + 3y = 10 \end{array}\right\}$ $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -6$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 8 & -1 & 1 \\ 10 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -30; \quad |A_y| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 8 & 1 \\ 2 & 10 & 0 \end{vmatrix} = 0; \quad |A_z| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 8 \\ 2 & 3 & 10 \end{vmatrix} = -18$$

Per tant: $x = 5$, $y = 0$, $z = 3$

2 Resol aplicant-hi la regla de Cramer:

a) $\begin{cases} 2x - 5y + 3z = 4 \\ x - 2y + z = 3 \\ 5x + y + 7z = 11 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x - 4y - z = 4 \\ y + z = 6 \\ 2x + 5y + 7z = -1 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} 2x - 5y + 3z = 4 \\ x - 2y + z = 3 \\ 5x + y + 7z = 11 \end{array}\right\}$ $|A| = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 5 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 13$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 4 & -5 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 11 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 65; \quad |A_y| = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 11 & 7 \end{vmatrix} = 0; \quad |A_z| = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 4 \\ 1 & -2 & 3 \\ 5 & 1 & 11 \end{vmatrix} = -26$$

Per tant: $x = 5$, $y = 0$, $z = -2$

b) $\left.\begin{array}{l} 3x - 4y - z = 4 \\ y + z = 6 \\ 2x + 5y + 7z = -1 \end{array}\right\}$ $|A| = \begin{vmatrix} 3 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 0$

Per tant, $ran(A) < 3$.

Com que hi ha menors d'ordre 2 diferents de zero, $ran(A) = 2$.

$$A' = \begin{pmatrix} 3 & -4 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 5 & 7 & -1 \end{pmatrix} \quad ran(A') = 3$$

Per tant, aquest sistema és *incompatible*.

Pàgina 67

3 Resol els sistemes d'equacions següents:

a) $\begin{cases} x - y + 3z = 1 \\ 3x - y + 2z = 3 \\ -2y + 7z = 0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x - y + 3z = 1 \\ 3x - y + 2z = 3 \\ -2y + 7z = 10 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} x - y + 3z = 1 \\ 3x - y + 2z = 3 \\ -2y + 7z = 0 \end{array}\right\}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 7 \end{pmatrix}$ $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 7 & 0 \end{array}\right)$

Calculem el rang de A:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \text{ i } |A| = 0 \rightarrow ran(A) = 2$$

Calculem el rang de A':

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{(la 1.ª i la 3.ª columnes són iguals)} \rightarrow ran(A') = 2$$

El sistema és *compatible indeterminat*. Per resoldre'l, podem prescindir de la 2.ª equació:

$$\left.\begin{array}{r} x - y + 3z = 1 \\ -2y + 7z = 0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x - y = 1 - 3z \;\rightarrow\; x = y + 1 - 3z = 1 + \dfrac{z}{2} \\ -2y = -7z \;\rightarrow\; y = \dfrac{7z}{2} \end{array}$$

Solució: $x = 1 + \lambda, \quad y = 7\lambda, \quad z = 2\lambda$

b) $\left.\begin{array}{r} x - y + 3z = 1 \\ 3x - y + 2z = 3 \\ -2y + 7z = 10 \end{array}\right\} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 7 \end{pmatrix} \quad A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 7 & 10 \end{array}\right)$

Sabem, per l'apartat a), que $ran(A) = 2$.

Calculem el rang de A':

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 10 \end{vmatrix} = 20 \neq 0 \;\rightarrow\; ran(A') = 3 \neq ran(A)$$

El sistema és *incompatible*.

4 Resol aquests sistemes:

a) $\left\{\begin{array}{l} x + y = 3 \\ y + z = 5 \\ x + z = 4 \\ 5x - y + z = 6 \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{l} 3x + 4y = 4 \\ 2x + 6y = 23 \\ -2x + 3y = 1 \end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{r} x + y = 3 \\ y + z = 5 \\ x + z = 4 \\ 5x - y + z = 6 \end{array}\right\} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \\ 5 & -1 & 1 & 6 \end{array}\right)$

Com que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \;\rightarrow\; ran(A) = 3$

Calculem el rang de A':

$|A'| = 0 \;\rightarrow\; ran(A') = 3$

El sistema és *compatible determinat*. Per resoldre'l, podem prescindir de l'última equació i aplicar la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{2} = \frac{2}{2} = 1; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix}}{2} = \frac{4}{2} = 2; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix}}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

Solució: $x = 1, \quad y = 2, \quad z = 3$

b) $\left.\begin{array}{r} 3x + 4y = \ \ 4 \\ 2x + 6y = 23 \\ -2x + 3y = \ \ 1 \end{array}\right\} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 6 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \quad A' = \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 4 & 4 \\ 2 & 6 & 23 \\ -2 & 3 & 1 \end{array}\right)$

Com que $|A'| = -309 \neq 0$, aleshores $ran\,(A') = 3 \neq ran\,(A)$.

El sistema és *incompatible*.

Pàgina 68

1 Resol els següents sistemes d'equacions:

a) $\begin{cases} 3x - 5y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 11y - 4z = 0 \\ -2x + 4y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \\ 2x - 16y + 5z = 0 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{r} 3x - 5y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y \qquad = 0 \end{array}\right\} \quad |A| = \begin{vmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$

Per tant, $ran\,(A) = 3 =$ *nre. d'incògnites.*

El sistema només té la solució trivial: $x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0$

b) $\left.\begin{array}{r} x + 11y - 4z = 0 \\ -2x + 4y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \\ 2x - 16y + 5z = 0 \end{array}\right\} \quad \begin{vmatrix} 1 & 11 & -4 \\ -2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -18 \rightarrow ran\,(A) = 3 =$ *nre. d'incògnites*

El sistema només té la solució trivial: $x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0$

2 Resol aquests sistemes:

a) $\begin{cases} x - y - z = 0 \\ x + y + 3z = 0 \\ x - 5y - 9z = 0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x + y + 5z = 0 \\ 3x - y - 2t = 0 \\ x - y + z - t = 0 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{r} x - y - z = 0 \\ x + y + 3z = 0 \\ x - 5y - 9z = 0 \end{array}\right\} \quad |A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -5 & -9 \end{vmatrix} = 0$

Seleccionem el menor $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \;\rightarrow\; ran\,(A) = 2$

Podem suprimir la 3.ª equació i passar la z al segon membre:

$$\left.\begin{array}{l} x - y = z \\ x + y = -3z \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x = -z \\ y = -2z \end{array}\right\} \quad \textit{Solució:}\;\; x = -\lambda,\;\; y = -2\lambda,\;\; z = \lambda$$

d) $$\left.\begin{array}{l} x + y + 5z \qquad = 0 \\ 3x - y \qquad - 2t = 0 \\ x - y + \;\; z - \;\; t = 0 \end{array}\right\} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -14 \neq 0 \;\rightarrow\; ran\,(A) = 3$$

Per resoldre'l, passem la t al segon membre:

$$\left.\begin{array}{l} x + y + 5z = 0 \\ 3x - y \qquad = 2t \\ x - y + \;\; z = t \end{array}\right\} \qquad x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 2t & -1 & 0 \\ t & -1 & 1 \end{vmatrix}}{-14} = \frac{-7t}{-14} = \frac{t}{2};$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 3 & 2t & 0 \\ 1 & t & 1 \end{vmatrix}}{-14} = \frac{7t}{-14} = \frac{-t}{2}; \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2t \\ 1 & -1 & t \end{vmatrix}}{-14} = \frac{0}{-14} = 0$$

Solució: $x = \lambda,\;\; y = -\lambda,\;\; z = 0,\;\; t = 2\lambda$

Pàgina 70

1 Discuteix i resol:

a) $\left\{\begin{array}{l} \boldsymbol{x + y + az = 0} \\ \boldsymbol{ax - y \qquad = -1} \\ \boldsymbol{x + 4y + 6z = 0} \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{l} \boldsymbol{x + y = k} \\ \boldsymbol{kx - y = 13} \\ \boldsymbol{5x + 3y = 16} \end{array}\right.$

a) $$\left.\begin{array}{l} x + \;\; y + az = 0 \\ ax - \;\; y \qquad = -1 \\ x + 4y + \;\; 6z = 0 \end{array}\right\} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ a & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 6 \end{pmatrix} \quad A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 0 \\ a & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 6 & 0 \end{array}\right)$$

$$|A| = 4a^2 - 5a - 6 = 0 \;\rightarrow\; a = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 96}}{8} = \frac{5 \pm \sqrt{121}}{8} = \frac{5 \pm 11}{8} \begin{cases} a = 2 \\ a = \dfrac{-3}{4} \end{cases}$$

• **Si $a = 2$,** queda:

$$A' = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}}_{A}\!\!\begin{matrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{matrix}\Bigg) \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \;\rightarrow\; ran\,(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \;\rightarrow\; ran\,(A') = 3 \neq ran\,(A)$$

El sistema és *incompatible.*

- **Si $a = -3/4$,** queda:

$$A' = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3/4 \\ -3/4 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}}_{A}\!\!\begin{matrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{matrix}\Bigg) \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3/4 & -1 \end{vmatrix} = \frac{-1}{4} \neq 0 \;\rightarrow\; ran\,(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -3/4 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \;\rightarrow\; ran\,(A') = 3 \neq ran\,(A)$$

El sistema és *incompatible.*

- **Si $a \neq 2$ i $a \neq -3/4$** $\rightarrow$ $ran\,(A) = ran\,(A') =$ *nre. d'incògnites* $= 3$, el sistema és *compatible determinat.* El resolem:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & a \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 6 \end{vmatrix}}{4a^2 - 5a - 6} = \frac{6 - 4a}{4a^2 - 5a - 6}; \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ a & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 6 \end{vmatrix}}{4a^2 - 5a - 6} = \frac{a - 6}{4a^2 - 5a - 6};$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & -1 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix}}{4a^2 - 5a - 6} = \frac{3}{4a^2 - 5a - 6}$$

Solució: $x = \dfrac{6 - 4a}{4a^2 - 5a - 6}, \quad y = \dfrac{a - 6}{4a^2 - 5a - 6}, \quad z = \dfrac{3}{4a^2 - 5a - 6}$

b) $\left.\begin{aligned} x + y &= k \\ kx - y &= 13 \\ 5x + 3y &= 16 \end{aligned}\right\}$ $\quad A' = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ k & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}}_{A}\!\!\begin{matrix} k \\ 13 \\ 16 \end{matrix}\Bigg)$

$$|A'| = 3k^2 - 11k + 10 = 0 \;\rightarrow\; k = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 120}}{6} = \frac{11 \pm 1}{6} \begin{cases} k = 2 \\ k = \dfrac{5}{3} \end{cases}$$

- **Si $k = 2$,** queda:

$$A' = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}}_{A}\!\!\begin{matrix} 2 \\ 13 \\ 16 \end{matrix}\Bigg) \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \;\rightarrow\; ran\,(A) = ran\,(A') = 2 = \textit{nre. d'incògnites}$$

El sistema és *compatible determinat.* Per resoldre'l, podem prescindir de la 3.ª equació:

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 2 \\ 2x - y = 13 \end{array}\right\} \text{ Sumant: } 3x = 15 \;\rightarrow\; x = 5; \quad y = 2 - x = 2 - 5 = -3$$

Solució: $x = 5, \;\; y = -3$

- **Si k = 5/3**, queda:

$$A' = \underbrace{\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 5/3 \\ 5/3 & -1 & 13 \\ 5 & 3 & 16 \end{array}\right)}_{A}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5/3 & -1 \end{vmatrix} = \frac{-8}{3} \neq 0 \;\rightarrow\; ran\,(A) = ran\,(A') = 2 = \textit{nre. d'incògnites}$$

El sistema és *compatible determinat.* Per resoldre'l, podem prescindir de la 3.ª equació:

$$\left.\begin{array}{r} x + y = \dfrac{5}{3} \\ \dfrac{5}{3}x - y = 13 \end{array}\right\} \text{ Sumant: } \frac{8}{3}x = \frac{44}{3} \;\rightarrow\; x = \frac{44}{8} = \frac{11}{2}$$

$$y = \frac{5}{3} - x = \frac{5}{3} - \frac{11}{2} = \frac{-23}{6}$$

Solució: $x = \dfrac{11}{2}, \;\; y = \dfrac{-23}{6}$

- **Si $k \neq 2$ i $k \neq 5/3$** $\rightarrow$ $ran\,(A') = 3 \neq ran\,(A)$, el sistema és *incompatible.*

2 Discuteix i resol, d'acord amb el paràmetre a, el següent sistema d'equacions:

$$\begin{cases} (a-1)x + \quad\quad\;\; y = 0 \\ (a-1)x + (a+1)y = 0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} (a-1)x + \quad\quad\;\; y = 0 \\ (a-1)x + (a+1)y = 0 \end{array}\right\} \quad A = \begin{pmatrix} a-1 & 1 \\ a-1 & a+1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = (a-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a+1 \end{vmatrix} = (a-1)(a+1-1) = a(a-1) = 0 \;\begin{cases} a = 0 \\ a = 1 \end{cases}$$

- **Si a = 0**, queda:

$$\left.\begin{array}{r} -x + y = 0 \\ -x + y = 0 \end{array}\right\} \; y = x. \quad \text{Sistema } \textit{compatible indeterminat.}$$

Solució: $x = \lambda, \;\; y = \lambda$

- **Si $a = 1$**, queda:

$$\left.\begin{array}{r} y = 0 \\ 2y = 0 \end{array}\right\} \quad \text{Sistema } \textit{compatible indeterminat.}$$

Solució: $x = \lambda, \quad y = 0$

- **Si $a \neq 0$ i $a \neq 1$** $\rightarrow$ $ran(A) = 2$

El sistema només té la solució trivial: $x = 0, \quad y = 0$

Pàgina 71

1 Calcula la inversa de cada una de les matrius següents:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & 5 & -3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Calculem la inversa de la matriu A:

$|A| = -1 \neq 0 \rightarrow$ existeix A^{-1}

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj(A) \longrightarrow (Adj(A))^t \longrightarrow \frac{1}{|A|}(Adj(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} -15 & 9 & -5 \\ 8 & -5 & 3 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -15 & -9 & -5 \\ -8 & -5 & -3 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -15 & -8 & -3 \\ -9 & -5 & -2 \\ -5 & -3 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 15 & 8 & 3 \\ 9 & 5 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Calculem la inversa de la matriu B:

$|B| = -3 \neq 0 \rightarrow$ existeix B^{-1}

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj(B) \longrightarrow (Adj(B))^t \longrightarrow \frac{1}{|B|}(Adj(B))^t$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{-1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = B^{-1}$$

2 Calcula la inversa de cada una de les matrius següents:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Calculem la inversa de la matriu A:

$|A| = -1 \neq 0 \rightarrow$ existeix A^{-1}

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj(A) \longrightarrow (Adj(A))^t \longrightarrow \frac{1}{|A|}(Adj(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Calculem la inversa de la matriu B:

$|B| = 3 \neq 0 \to$ existeix B^{-1}

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj(B) \longrightarrow (Adj(B))^t \longrightarrow \frac{1}{|B|}(Adj(B))^t$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -3 & 12 & 21 \\ -1 & 4 & 8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & 12 & -21 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 12 & -4 \\ -2 & -21 & 8 \end{pmatrix} \to \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 12 & -4 \\ -2 & -21 & 8 \end{pmatrix} = B^{-1}$$

Pàgina 78

EXERCICIS I PROBLEMES PROPOSATS

PER PRACTICAR

1 **Si sabem que $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 7$, justifica les igualtats següents, i cita en cada cas les propietats que hi has aplicat:**

a) $\begin{vmatrix} a-b & b \\ c-d & d \end{vmatrix} = 7$ **b)** $\begin{vmatrix} 3a & 2b \\ 3c & 2d \end{vmatrix} = 42$

c) $\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix} = -7$ **d)** $\begin{vmatrix} a & b \\ a-2c & b-2d \end{vmatrix} = -14$

a) Propietat 8: si a una columna d'una matriu se li suma l'altra columna multiplicada per un número, el determinant queda multiplicat per aquest número.

b) Propietat 5: si multipliquem cada element d'una columna per un número, el determinant queda multiplicat per aquest número.

c) Propietat 3: si permutem les dues columnes, el determinant canvia de signe.

d) Propietat 7: si una fila és suma de dos, el determinant es pot descompondre en suma de dos determinants.

2 **Si $\begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = -5$, quin és el valor de cada un d'aquests determinants?**

a) $\begin{vmatrix} m & p \\ n & q \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} p & m \\ q & n \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} 3n & -m \\ 3q & -p \end{vmatrix}$ **d)** $\begin{vmatrix} p & 2m \\ q & 2n \end{vmatrix}$ **e)** $\begin{vmatrix} 1 & n/m \\ mp & mq \end{vmatrix}$

a) –5, perquè el determinant coincideix amb el de la seva matriu transposada.

b) $\begin{vmatrix} p & m \\ q & n \end{vmatrix} \underset{(1)}{=} \begin{vmatrix} p & q \\ m & n \end{vmatrix} \underset{(2)}{=} -\begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = -(-5) = 5$

c) $\begin{vmatrix} 3n & -m \\ 3q & -p \end{vmatrix} \underset{(3)}{=} -3 \begin{vmatrix} n & m \\ q & p \end{vmatrix} \underset{(2)}{=} 3 \begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = 3 \cdot (-5) = -15$

d) $\begin{vmatrix} p & 2m \\ q & 2n \end{vmatrix} \underset{(3)}{=} 2 \begin{vmatrix} p & m \\ q & n \end{vmatrix} \underset{(1)}{=} 2 \begin{vmatrix} p & q \\ m & n \end{vmatrix} \underset{(2)}{=} -2 \begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = -2 \cdot (-5) = 10$

e) $\begin{vmatrix} 1 & n/m \\ mp & mq \end{vmatrix} \underset{(3)}{=} \dfrac{1}{m} \cdot m \begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = -5$

(1) El determinant d'una matriu coincideix amb el de la seva transposada.

(2) Si canviem d'ordre dues files o dues columnes, el determinant canvia de signe.

(2) Si multipliquem una fila o una columna per un número, el determinant queda multiplicat per aquest número.

3 **Substitueix els punts suspensius pels nombres adequats perquè es verifiquin les igualtats següents:**

a) $\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \dots & 7 \\ \dots & -3 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \dots & \dots \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -10 & 4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$

4 **Resol aquestes equacions:**

a) $\begin{vmatrix} 1+x & 1-x \\ 1-x & 1+x \end{vmatrix} = 12$ **b)** $\begin{vmatrix} x-2 & 1-2x \\ x & x^2 \end{vmatrix} = 0$

a) $\begin{vmatrix} 1+x & 1-x \\ 1-x & 1+x \end{vmatrix} = 12$

$$\begin{vmatrix} 1+x & 1-x \\ 1-x & 1+x \end{vmatrix} = (1+x)^2 - (1-x)^2 = 1 + x^2 + 2x - (1 + x^2 - 2x) =$$

$$= 1 + x^2 + 2x - 1 - x^2 + 2x = 4x = 12 \quad \to \quad x = 3$$

b) $\begin{vmatrix} x-2 & 1-2x \\ x & x^2 \end{vmatrix} = 0$

$$\begin{vmatrix} x-2 & 1-2x \\ x & x^2 \end{vmatrix} = x^2 \cdot (x-2) - x(1-2x) = x^3 - 2x^2 - x + 2x^2 = x^3 - x =$$

$$= x(x^2 - 1) = 0 \quad \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

5 **Calcula el valor d'aquests determinants:**

a) $\begin{vmatrix} 1 & 8 & 1 \\ 1 & 7 & 0 \\ 1 & 6 & -1 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -6 \\ 2 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & -5 \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} 7 & 8 & 0 \\ 0 & -7 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ **d)** $\begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 1 & 8 & 1 \\ 1 & 7 & 0 \\ 1 & 6 & -1 \end{vmatrix} = 0$ b) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -6 \\ 2 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & -5 \end{vmatrix} = 0$

c) $\begin{vmatrix} 7 & 8 & 0 \\ 0 & -7 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -25$ d) $\begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 10$

6 **Quin valor de *a* anul·la aquests determinants?**

a) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & a \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} a-1 & 1 & -1 \\ 0 & a+6 & 3 \\ a-1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & a^2 \end{vmatrix}$ **d)** $\begin{vmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & a & 2 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & a \end{vmatrix} = -3 + 5 + 4 - 5 + 3 - 4a = 4 - 4a = 0 \rightarrow a = 1$

b) $\begin{vmatrix} a-1 & 1 & -1 \\ 0 & a+6 & 3 \\ a-1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 3(a-1) + (a-1)(a+6) - 6(a-1) = (a-1)[3 + a + 6 - 6] =$

$= (a-1)(3+a) = 0 \quad \begin{cases} a = 1 \\ a = -3 \end{cases}$

c) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & a^2 \end{vmatrix} = 4a^2 + 4 - 4 - 12 = 4a^2 - 12 = 0 \rightarrow a^2 = 3 \quad \begin{cases} a = \sqrt{3} \\ a = -\sqrt{3} \end{cases}$

d) $\begin{vmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & a & 2 \end{vmatrix} = 4(a+1) + a + a - 2 - a^2(a+1) - 2 =$

$= 4a + 4 + 2a - 2 - a^3 - a^2 \cdot 2 = -a^3 - a^2 + 6a = -a(a^2 + a - 6) = 0 \rightarrow$

$\begin{cases} a = 0 \\ a^2 + a - 6 = 0 \rightarrow a = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \dfrac{-1 \pm 5}{2} \quad \begin{cases} a = 2 \\ a = -3 \end{cases} \end{cases}$

7 **Calcula el valor dels determinants següents:**

a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & -3 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 7 & 0 \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ **d)** $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & 10 & 4 \\ 7 & -8 & 9 & -2 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & -3 \end{vmatrix} = -72$ b) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 7 & 0 \end{vmatrix} = -18$

c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$ d) $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & 10 & 4 \\ 7 & -8 & 9 & -2 \end{vmatrix} = 938$

8 Calcula la matriu inversa de les matrius següents i comprova'n el resultat:

a) $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **d)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

a) $|A| = 1 \neq 0 \rightarrow$ existeix A^{-1}

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj(A) \longrightarrow (Adj(A))^t \longrightarrow \frac{1}{|A|}(Adj(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

b) $|B| = 10 \neq 0 \rightarrow$ existeix B^{-1}

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj(B) \longrightarrow (Adj(B))^t \longrightarrow \frac{1}{|B|}(Adj(B))^t$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = B^{-1}$$

c) $|C| = 3 \neq 0 \rightarrow$ existeix C^{-1}

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj(C) \longrightarrow (Adj(C))^t \longrightarrow \frac{1}{|C|}(Adj(C))^t$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 6 \end{pmatrix} = C^{-1}$$

d) $|D| = -10 \neq 0 \rightarrow$ existeix D^{-1}

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj(D) \longrightarrow (Adj(D))^t \longrightarrow \frac{1}{|D|}(Adj(D))^t$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & -4 \\ 4 & 0 & -2 \\ 0 & -5 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 0 & -4 \\ -4 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \\ -4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{-1}{10} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \\ -4 & 2 & 0 \end{pmatrix} = D^{-1}$$

9 **Resol les següents equacions matricials:**

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ **b)** $X \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = (1 \quad 2)$

a) Anomenem $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, de manera que tenim:

$$A \cdot X = B \rightarrow X = A^{-1} \cdot B$$

Calculem A^{-1}:

$$|A| = -3 \neq 0 \rightarrow \text{existeix } A^{-1}$$

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj(A) \longrightarrow (Adj(A))^t \longrightarrow \frac{1}{|A|}(Adj(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{1}{-3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Calculem $A^{-1} \cdot B$:

$$\frac{1}{-3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{-3} \cdot \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

La solució és: $X = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

b) Anomenem $A = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ i $B = (1 \quad 2)$, de manera que:

$$X \cdot A = B \rightarrow X \cdot A \cdot A^{-1} = B \cdot A^{-1} \rightarrow X = B \cdot A^{-1}$$

$$|A| = 1 \neq 0 \rightarrow \text{existeix } A^{-1}$$

Calculem A^{-1}:

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj(A) \longrightarrow (Adj(A))^t \longrightarrow \frac{1}{|A|}(Adj(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -5 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Calculem $B \cdot A^{-1}$:

$$(1 \quad 2) \cdot \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = (6 \quad -7)$$

La solució és: $X = (6 \quad -7)$

10 **Estudia el rang de les matrius següents:**

a) $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{3} & \mathbf{0} & \mathbf{5} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$

a) El rang és 3 ja que el determinant $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 15 \neq 0.$

b) 4.ª fila = 2.ª fila – 1.ª fila

3.ª fila = 1.ª fila + 2.ª fila

Per tant: $ran \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = ran \begin{pmatrix} 1 & -12 \\ 2 & 13 \end{pmatrix}$

Com que $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \rightarrow$ el rang és 2

11 **Resol aplicant-hi la regla de Cramer:**

a) $\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{3x - y = 2} \\ \mathbf{2x + y + z = 0} \\ \mathbf{3y + 2z = -1} \end{array} \right.$ **b)** $\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{2x + y + z = -2} \\ \mathbf{x - 2y - 3z = 1} \\ \mathbf{-x - y + z = -3} \end{array} \right.$

c) $\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{3x + y - z = 0} \\ \mathbf{x + y + z = 0} \\ \mathbf{3x + 2y - 2z = 1} \end{array} \right.$ **d)** $\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{x + y - z + t = 1} \\ \mathbf{x - y - t = 2} \\ \mathbf{z - t = 0} \end{array} \right.$

a) $\left. \begin{array}{l} 3x - y = 2 \\ 2x + y + z = 0 \\ 3y + 2z = -1 \end{array} \right\} \quad A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \end{array} \right) \rightarrow |A| = 1 \neq 0$

A

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix}}{1} = \frac{-1}{1} = -1; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{1} = \frac{-5}{1} = -5;$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix}}{1} = \frac{7}{1} = 7$$

Solució: $x = -1, \quad y = -5, \quad z = 7$

b) $\left.\begin{array}{r} 2x + y + z = -2 \\ x - 2y - 3z = 1 \\ -x - y + z = -3 \end{array}\right\}$ $A' = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}}_{A}\left.\begin{matrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{matrix}\right)$ $\rightarrow$ $|A| = -11 \neq 0$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \\ -3 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{-11} = \frac{11}{-11} = -1; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ -1 & -3 & 1 \end{vmatrix}}{-11} = \frac{-22}{-11} = 2;$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & -3 \end{vmatrix}}{-11} = \frac{22}{-11} = -2$$

Solució: $x = -1, \quad y = 2, \quad z = -2$

c) $\left.\begin{array}{r} 3x + y - z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ 3x + 2y - 2z = 1 \end{array}\right\}$ $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -6$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 2; \qquad |A_y| = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -4$$

$$|A_z| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

Per tant: $x = \dfrac{-1}{3}, \quad y = \dfrac{2}{3}, \quad z = \dfrac{-1}{3}$

d) $\left.\begin{array}{r} x + y - z + t = 1 \\ x - y \qquad - t = 2 \\ z - t = 0 \end{array}\right\}$ $A' = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}}_{A}\left.\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{matrix}\right)$. Tenim que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1-t & 1 & -1 \\ 2+t & -1 & 0 \\ t & 0 & 1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-3-t}{-2} = \frac{3+t}{2}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1-t & -1 \\ 1 & 2+t & 0 \\ 0 & t & 1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{1+t}{-2} = \frac{-1-t}{2}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1-t \\ 1 & -1 & 2+t \\ 0 & 0 & t \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-2t}{-2} = t. \quad \textit{Solucions:} \left(\frac{3+\lambda}{2}, \frac{-1-\lambda}{2}, \lambda, \lambda\right)$$

Pàgina 79

12 **Estudia la compatibilitat d'aquests sistemes:**

a) $\begin{cases} x - y = 6 \\ 4x + y = -1 \\ 5x + 2y = -5 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x + y - z = -2 \\ 2x - y - 3z = -3 \\ x - 2y - 2z = 0 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{r} x - y = 6 \\ 4x + y = -1 \\ 5x + 2y = -5 \end{array}\right\}$ $A' = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 6 \\ 4 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & -5 \end{array}\right)$. Com que $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$ i $|A'| = 0$,

tenim que: $ran\ (A) = ran\ (A') = nre.\ d'incògnites = 2$

El sistema és *compatible determinat*. Per resoldre'l, podem prescindir de la tercera equació:

$\left.\begin{array}{r} x - y = 6 \\ 4x + y = -1 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} \text{Sumant: } 5x = 5 \to x = 1 \\ y = -1 - 4x = -1 - 4 = -5 \end{array}\right\}$ *Solució:* $(1, -5)$

b) $\left.\begin{array}{r} x + y - z = -2 \\ 2x - y - 3z = -3 \\ x - 2y - 2z = 0 \end{array}\right\}$ $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -3 & -3 \\ 1 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right)$

Tenim que $|A| = 0$ i que $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \to ran\ (A) = 2$

Com que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \to ran\ (A') = 2 \neq ran\ (A) = 2$

Per tant, el sistema és *incompatible.*

13 **Calcula la inversa de cada una de les matrius següents:**

$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{3} \end{pmatrix}$ $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \to$ Existeix A^{-1}

$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj\,(A) \longrightarrow (Adj\,(A))^t \longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|}(Adj\,(A))^t$

$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 6 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -6 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} = A^{-1}$

$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \;\rightarrow\; \text{Existeix } B^{-1}$$

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj(B) \longrightarrow (Adj(B))^t \longrightarrow B^{-1} = \frac{1}{|B|}(Adj(B))^t$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -6 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 6 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -6 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 6 & 2 & -6 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1/2 & 3/2 \\ 3 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B^{-1}$$

PER RESOLDRE

14 Prova, sense desenvolupar, que aquests determinants són zero:

a) $\begin{vmatrix} -8 & 25 & 40 \\ 2/5 & 3 & -2 \\ 0 & 27 & 0 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix}$

☛ ***a) Hi ha dues línies proporcionals. b) Suma la 3.ª fila a la 2.ª.***

a) La 1.ª i la 3.ª columnes són proporcionals (la 3.ª és –5 per la 1.ª).

b) Sumem la 3.ª fila a la 2.ª:

$$\begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix} =$$

$$= 5(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix} = 0 \text{ (ja que té dues files iguals).}$$

15 Prova, sense desenvolupar-los, que el determinant a) és múltiple de 3 i que el b) és múltiple de 5:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 7 & 1 \\ 8 & 2 & 5 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \\ 6 & 3 & 9 \end{vmatrix}$

☛ ***a) Suma la 1.ª i 2.ª columnes a la 3.ª.***

a) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 7 & 1 \\ 8 & 2 & 5 \end{vmatrix} \underset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 4 & 7 & 12 \\ 8 & 2 & 15 \end{vmatrix} \underset{(2)}{=} 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 7 & 4 \\ 8 & 2 & 5 \end{vmatrix} \rightarrow$ Es múltiple de 3.

(1) Sumem a la 3.ª columna les altres dues.

(2) Si una columna es multiplica per un número, el determinant queda multiplicat per aquest número.

b) $|B| = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \\ 6 & 3 & 9 \end{vmatrix} \underset{(3)}{=} \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \\ 10 & 10 & 15 \end{vmatrix} \underset{(2)}{=} 5 \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} \rightarrow$ És múltiple de 5.

(3) Sumem a la 3.ª fila la 2.ª.

16 **Per a quins valors de a s'anul·la aquest determinant?**

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 8 \\ a & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 8 \\ a & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{matrix} 1^a \\ 2^a - 2 \cdot 1^a \\ 3^a + 1^a \\ 4^a + 1^a \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -5 & 4 \\ a+1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & -5 & 4 \\ a+1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -[8(a+1) - 30 + 6] = -[8a + 8 - 30 + 6] = -(8a - 16) = 0 \rightarrow a = 2$$

17 **Estudia el rang de les matrius següents segons el valor del paràmetre que hi apareix:**

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{3} & \mathbf{1} & \boldsymbol{a} \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{a} & \mathbf{3} & \mathbf{4} \\ \mathbf{3} & \mathbf{-1} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & a \end{vmatrix} = 2a - 6 + 4 - a = a - 2 = 0 \rightarrow a = 2$$

- **Si a = 2** $\rightarrow$ Com que $|A| = 0$ i $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow ran\,(A) = 2$
- **Si $a \neq$ 2** $\rightarrow$ $|A| \neq 0 \rightarrow ran\,(A) = 3$

$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & a \\ a & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 12 - a^2 - 12 - 9a + 8 + 2a = -a^2 - 7a + 8 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow a = \frac{7 \pm \sqrt{49 + 32}}{-2} = \frac{7 \pm \sqrt{81}}{-2} = \frac{7 \pm 9}{-2} \begin{cases} a = -8 \\ a = 1 \end{cases}$$

Observem que $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 10 \neq 0 \rightarrow ran\,(B) \geq 2$

Per tant:

- **Si a = 1** $\rightarrow$ $|B| = 0 \rightarrow ran\,(B) = 2$
- **Si a = –8** $\rightarrow$ $|B| = 0 \rightarrow ran\,(B) = 2$
- **Si $a \neq$ 1 i $a \neq$ –8** $\rightarrow$ $|B| \neq 0 \rightarrow ran\,(B) = 3$

18 **Estudia i resol aquests sistemes homogenis:**

a) $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 12x - 3y - 2z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 9x + 3y + 2z = 0 \\ 3x - y + z = 0 \\ 8x + y + 4z = 0 \\ x + 2y - 2z = 0 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{r} x + y - z = 0 \\ 12x - 3y - 2z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{r} x + y - z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ 12x - 3y - 2z = 0 \end{array}\right\}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 12 & -3 & -2 \end{pmatrix}$

Com que $|A| = 0$ i $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$, aleshores, $ran\,(A) = 2$.

El sistema és *compatible indeterminat.* Per resoldre'l, podem prescindir de la 3.ª equació i passar la z al segon membre:

$$\left.\begin{array}{r} x + y = z \\ x - 2y = -z \end{array}\right\} \quad x = \frac{\begin{vmatrix} z & 1 \\ -z & -2 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{-z}{-3} = \frac{z}{3}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & z \\ 1 & -z \end{vmatrix}}{-3} = \frac{-2z}{-3} = \frac{2z}{3}$$

Solucions: $\left(\frac{\lambda}{3}, \frac{2\lambda}{3}, \lambda\right)$

b) $\left.\begin{array}{r} 9x + 3y + 2z = 0 \\ 3x - y + z = 0 \\ 8x + y + 4z = 0 \\ x + 2y - 2z = 0 \end{array}\right\}$ $A = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 8 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

Com que $\begin{vmatrix} 9 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 8 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -35 \neq 0$, aleshores, $ran\,(A) = 3 =$ *nre. d'incògnites.*

El sistema només te la solució trivial: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$

19 **Resol els sistemes següents:**

a) $\begin{cases} x + y + z - t = 0 \\ 2x + y - z + 2t = 0 \\ 3x + 2y + t = 0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x + y = 0 \\ x + z = 0 \\ x + t = 0 \\ y + z + t = 0 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{r} x + y + z - t = 0 \\ 2x + y - z + 2t = 0 \\ 3x + 2y + t = 0 \end{array}\right\}$

Observem que la 3.ª equació és la suma de les dues primeres; per tant, l'eliminem. El sistema queda:

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z - t = 0 \\ 2x + y - z + 2t = 0 \end{array}\right\}$$

Passem al segon membre dues de les incògnites per resoldre el sistema per la regla de Cramer, havent de ser el determinant de la matriu dels coeficients que queden en el primer membre no nul:

$$\left.\begin{array}{r} x + y = -z + \ t \\ 2x + y = \ z - 2t \end{array}\right\} \quad |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

Apliquem la regla de Cramer:

$$|A_x| = \begin{vmatrix} -z+t & 1 \\ z-2t & 1 \end{vmatrix} = -2z + 3t; \qquad |A_y| = \begin{vmatrix} 1 & -z+t \\ 1 & z-2t \end{vmatrix} = 3z - 4t$$

Solució: $x = 2\lambda - 3\mu, \quad y = -3\lambda + 4\mu, \quad z = \lambda, \quad t = \mu$

b) $$\left.\begin{array}{l} x + y = 0 \\ x + z = 0 \\ x + t = 0 \\ y + z + t = 0 \end{array}\right\}$$

Es tracta d'un sistema homogeni.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \ \rightarrow \ ran\,(A) = 4 = \textit{nre. d'incògnites}$$

El sistema només té la solució trivial, $x = 0, \ y = 0, \ z = 0, \ t = 0$.

20 **Troba el valor de *a* perquè aquest sistema sigui compatible:** $\left\{\begin{array}{l} \mathbf{2x + 3y = 5} \\ \mathbf{x + 2y = 1} \\ \mathbf{ax + y = 3} \end{array}\right.$

$$\left.\begin{array}{r} 2x + 3y = 5 \\ x + 2y = 1 \\ ax + y = 3 \end{array}\right\} \quad A' = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \\ a & 1 & 3 \end{array}\right); \quad |A'| = 6 - 7a = 0 \ \rightarrow \ a = \frac{6}{7}; \quad \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Si $a = \frac{6}{7}$, $ran\,(A) = ran\,(A')$ $\rightarrow$ *Sistema compatible.*

Si $a \neq \frac{6}{7}$, $ran\,(A) \neq ran\,(A')$ $\rightarrow$ *Sistema incompatible.*

21 **Expressa en forma matricial i resol utilitzant la matriu inversa:**

a) $\left\{\begin{array}{l} \mathbf{x - y = 2} \\ \mathbf{2x - y = 0} \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{l} \mathbf{x + 3y - z = -1} \\ \mathbf{x - y - z = -1} \\ \mathbf{2x + y + 3z = 5} \end{array}\right.$

a) $$\left.\begin{array}{r} x - y = 2 \\ 2x - y = 0 \end{array}\right\} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow A \cdot X = C \rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot C \rightarrow X = A^{-1} \cdot C$$

Calculem A^{-1}:

$|A| = 1 \neq 0 \rightarrow$ Existeix A^{-1}

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj(A) \longrightarrow (Adj(A))^t \longrightarrow \frac{1}{|A|}(Adj(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

La solució del sistema és: $x = -2, \quad y = -4$

b) $\left.\begin{array}{r} x + 3y - z = -1 \\ x - y - z = -1 \\ 2x + y + 3z = 5 \end{array}\right\}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \rightarrow A \cdot X = C \rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot C \rightarrow$$

$$\rightarrow X = A^{-1} \cdot C$$

Calculem A^{-1}:

$|A| = -20 \neq 0 \rightarrow$ Existeix A^{-1}

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj(A) \longrightarrow (Adj(A))^t \longrightarrow \frac{1}{|A|}(Adj(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 5 & 3 \\ 10 & 5 & -5 \\ -4 & 0 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & -5 & 3 \\ -10 & 5 & 5 \\ -4 & 0 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & -10 & -4 \\ -5 & 5 & 0 \\ 3 & 5 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{1}{-20}\begin{pmatrix} -2 & -10 & -4 \\ -5 & 5 & 0 \\ 3 & 5 & -4 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

$$X = \frac{1}{-20} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -10 & -4 \\ -5 & 5 & 0 \\ 3 & 5 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{-20} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -28 \end{pmatrix}$$

La solució del sistema és: $x = \frac{2}{5}, \quad y = 0, \quad z = \frac{7}{5}$

22 Estudia i resol els sistemes següents:

a) $\left\{\begin{array}{l} \boldsymbol{x - y - 2z = 2} \\ \boldsymbol{2x + y + 3z = 1} \\ \boldsymbol{3x + z = 3} \end{array}\right.$

b) $\left\{\begin{array}{l} \boldsymbol{x + y + z = 2} \\ \boldsymbol{x - 2y - 7z = 0} \\ \boldsymbol{y + z = -1} \\ \boldsymbol{2x + 3y = 0} \end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{r} x - y - 2z = 2 \\ 2x + y + 3z = 1 \\ 3x \quad + z = 3 \end{array}\right\}$ $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$, with A the coefficient matrix (first three columns)

Com que $|A| = 0$ i $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$, tenim que $ran\,(A) = 2$.

A més, $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0$. Així doncs, $ran\,(A') = 2 = ran\,(A) <$ *nre. d'incògnites.*

El sistema és *compatible indeterminat.* Per resoldre'l, podem prescindir de la primera equació:

$$\left.\begin{array}{r} 2x + y + 3z = 1 \\ 3x \quad + z = 3 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 2x + y = 1 - 3z \\ 3x \quad = 3 - z \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x = \dfrac{3-z}{3} = 1 - \dfrac{z}{3} \\ y = 1 - 3z - 2x = -1 - \dfrac{7z}{3} \end{array}\right\} \text{Fem } z = 3\lambda$$

Solucions: $x = 1 - \lambda, \quad y = -1 - 7\lambda, \quad z = 3\lambda$

b) $\left.\begin{array}{r} x + y + z = 2 \\ x - 2y - 7z = 0 \\ y + z = -1 \\ 2x + 3y \quad = 0 \end{array}\right\}$ $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right)$, with A the coefficient matrix (first three columns)

Com que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -7 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$ i $|A'| = 0$,

tenim que: $ran\,(A) = ran\,(A') =$ *nre. d'incògnites* $= 3$

El sistema és *compatible determinat.* Per resoldre'l, podem prescindir de la quarta equació. Apliquem la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -7 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{5} = \frac{15}{5} = 3; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -7 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{5} = \frac{-10}{5} = -2;$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{5} = \frac{5}{5} = 1$$

Solució: $x = 3, \quad y = -2, \quad z = 1$

23 **Discuteix els sistemes següents segons els valors del paràmetre m:**

a) $\begin{cases} mx + y + z = 4 \\ x + y + z = m \\ x - y + mz = 2 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x + y + z = m - 1 \\ 2x + y + mz = m \\ x + my + z = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ x + my + z = 0 \\ 2x + 3y + 4z = 2 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} x + my + z = 4 \\ x + 3y + z = 5 \\ mx + y + z = 4 \end{cases}$

a) $\left.\begin{aligned} mx + y + z &= 4 \\ x + y + z &= m \\ x - y + mz &= 2 \end{aligned}\right\} \quad A' = \left(\begin{array}{ccc|c} m & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & m \\ 1 & -1 & m & 2 \end{array}\right)$, amb A la matriu de les tres primeres columnes.

$|A| = m^2 - 1 = 0 \quad \begin{cases} m = 1 \\ m = -1 \end{cases}$

- **Si $m = 1$,** queda:

$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right)$ Contradictòries $\rightarrow$ Sistema *incompatible.*

- **Si $m = -1$,** queda:

$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right)$ Contradictòries $\rightarrow$ Sistema *incompatible.*

- **Si $m \neq 1$ i $m \neq -1$** $\rightarrow$ *ran* (A) = *ran* (A') = *nre. d'incògnites* = 3. Sistema *compatible determinat.*

b) $\left.\begin{aligned} x + y + z &= m - 1 \\ 2x + y + mz &= m \\ x + my + z &= 1 \end{aligned}\right\} \quad A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & m-1 \\ 2 & 1 & m & m \\ 1 & m & 1 & 1 \end{array}\right)$, amb A la matriu de les tres primeres columnes.

$|A| = -m^2 + 3m - 2 = 0 \rightarrow m = \dfrac{-3 \pm \sqrt{9 - 8}}{-2} = \dfrac{-3 \pm 1}{-2} \quad \begin{cases} m = 1 \\ m = 2 \end{cases}$

- **Si $m = 1$,** queda:

$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$ Contradictòries $\rightarrow$ El sistema és *incompatible.*

- **Si $m = 2$,** queda:

$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right)$. Les columnes 1.ª, 3.ª i 4.ª són iguals.

Com que $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \;\to\; ran\,(A') = ran\,(A) = 2 < nre.\ d'incògnites$

El sistema és *compatible indeterminat.*

- **Si $m \neq 1$ i $m \neq 2$** $\to$ $ran\,(A) = ran\,(A') = nre.\ d'incògnites = 3$. Sistema *compatible determinat.*

c) $\left.\begin{array}{r} x + 2y + 3z = 0 \\ x + my + z = 0 \\ 2x + 3y + 4z = 2 \end{array}\right\}$ $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & m & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 2 \end{array}\right)$, amb A la matriu formada per les tres primeres columnes.

$|A| = -2m + 2 = 0 \;\to\; m = 1$

- **Si $m = 1$**, queda:

$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 2 \end{array}\right)$. Com que $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$ i $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0,$

aleshores: $ran\,(A) = 2 \neq ran\,(A') = 3$. Sistema *incompatible.*

- **Si $m \neq 1$**, queda: $ran\,(A) = ran\,(A') = nre.\ d'incògnites = 3$. Sistema *compatible determinat.*

d) $\left.\begin{array}{r} x + my + z = 4 \\ x + 3y + z = 5 \\ mx + y + z = 4 \end{array}\right\}$ $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ m & 1 & 1 & 4 \end{array}\right)$, amb A la matriu formada per les tres primeres columnes.

$|A| = m^2 - 4m + 3 = 0 \;\to\; m = \dfrac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \dfrac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \dfrac{4 \pm 2}{2}$ $\begin{array}{l} m = 3 \\ m = 1 \end{array}$

- **Si $m = 3$**, queda:

$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right)$ Contradictòries $\to$ Sistema *incompatible.*

- **Si $m = 1$**, queda:

$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right)$. La 1.ª i la 3.ª files són iguals.

A més, $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$. Per tant, $ran\,(A) = ran\,(A') = 2 < nre.\ d'incògnites.$

El sistema és *compatible indeterminat.*

- **Si $m \neq 3$ i $m \neq 1$** $\to$ $ran\,(A) = ran\,(A') = nre.\ d'incògnites = 3$. Sistema *compatible determinat.*

24 **Discuteix els següents sistemes homogenis d'acord amb el paràmetre a:**

a) $\left\{\begin{array}{l} 2x - y + z = 0 \\ x + 2y - 3z = 0 \\ 3x - 4y - az = 0 \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{l} x + y + z = 0 \\ ax + 2z = 0 \\ 2x - y + az = 0 \end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{r} 2x - y + z = 0 \\ x + 2y - 3z = 0 \\ 3x - 4y - az = 0 \end{array}\right\} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & -4 & -a \end{pmatrix}$

Com que és homogeni, sabem que $ran\,(A) = ran\,(A')$.

$$|A| = -5a - 25 = 0 \;\to\; a = -5$$

- **Si $a = -5$** $\to$ Com que $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0 \;\to\; ran\,(A) = ran\,(A') = 2$

  El sistema és *compatible indeterminat.*

- **Si $a \neq -5$** $\to$ Només té la solució trivial $(0, 0, 0)$.

b) $\left.\begin{array}{r} x + y + z = 0 \\ ax + 2z = 0 \\ 2x - y + az = 0 \end{array}\right\} \quad A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 0 & 2 \\ 2 & -1 & a \end{pmatrix}$

Com que és homogeni, sabem que $ran\,(A) = ran\,(A')$.

$$|A| = -a^2 - a + 6 = 0 \;\to\; a = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{-2} = \frac{1 \pm 5}{-2} \begin{array}{l} a = -3 \\ a = 2 \end{array}$$

- **Si $a = -3$ o $a = 2$** $\to$ Com que $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \;\to\; ran\,(A) = ran\,(A') = 2$

  El sistema és *compatible indeterminat.*

- **Si $a \neq -3$ i $a \neq 2$** $\to$ $ran\,(A) = ran\,(A') = 3$. Només existeix la solució trivial $(0, 0, 0)$.

Pàgina 80

25 **a) Considera la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ i calcula el rang de les matrius AA^t i A^tA.**

b) Resol el sistema d'equacions lineals homogeni la matriu de coeficients del qual és A^tA.

c) Resol el sistema d'equacions lineals homogeni la matriu de coeficients del qual és AA^t.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \;\to\; A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$A \cdot A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \textit{rang} = 2$$

$$A^t \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \textit{rang} = 2$$

b) Com que el rang és 2, seleccionem el menor.

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Podem suprimir la tercera equació i passar la z al segon membre:

$$\left.\begin{aligned} 5x + 2y &= -z \\ 2x + y &= -z \end{aligned}\right\} \rightarrow x = z, \quad y = -3z$$

La solució és: $x = \lambda, \quad y = -3\lambda, \quad z = \lambda$

c) Com que el rang = 2 = *nre. d'incògnites*

El sistema només té la solució trivial: $x = 0, \quad y = 0$

26 **Donades** $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ **i** $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$**:**

a) Troba A^{-1} i B^{-1}.

b) Troba la matriu inversa de $A \cdot B$.

c) Comprova que $(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.

a) $|A| = 2 \neq 0 \rightarrow$ Existeix A^{-1}

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj(A) \longrightarrow (Adj(A))^t \longrightarrow \frac{1}{|A|}(Adj(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & -6 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 6 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 6 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 6 & 5 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

$|B| = 2 \neq 0 \rightarrow$ Existeix B^{-1}

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj(B) \longrightarrow (Adj(B))^t \longrightarrow \frac{1}{|B|}(Adj(B))^t$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & -4 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & -2 \end{pmatrix} = B^{-1}$$

b) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & -8 & 2 \\ -2 & 6 & -2 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$; $|A \cdot B| = 4 \neq 0 \to$ Existeix $(A \cdot B)^{-1}$

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj(AB) \longrightarrow (Adj(AB))^t \longrightarrow \frac{1}{|AB|}(Adj(AB))^t$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & -4 \\ -8 & 2 & 4 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 4 & 0 & -4 \\ 8 & 2 & -4 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 4 & 8 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ -4 & -4 & 2 \end{pmatrix} \to \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 8 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \\ -4 & -4 & 2 \end{pmatrix} = (AB)^{-1}$$

c) $B^{-1} \cdot A^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 6 & 5 \end{pmatrix} = (A \cdot B)^{-1}$

27 **Donada $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, determina la matriu B que verifica $B - I = A^tA^{-1}$.**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad A^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculem A^{-1}:

$|A| = 4 \neq 0 \to$ Existeix A^{-1}

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj(A) \longrightarrow (Adj(A))^t \longrightarrow \frac{1}{|A|}(Adj(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Calculem $A^t \cdot A^{-1}$:

$$A^t \cdot A^{-1} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -1 & 6 \\ 4 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$|B| = A^t \cdot A^{-1} + I$

$$B = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -1 & 6 \\ 4 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 6 \\ 4 & 4 & 0 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

28 **Discuteix el sistema següent i resol-lo, si és possible, en el cas $a = 4$:**

$$\begin{cases} x - y = a \\ x + a^2z = 2a + 1 \\ x - y + a(a-1)z = 2a \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} x - y = a \\ x + a^2 z = 2a + 1 \\ x - y + a(a-1)z = 2a \end{array}\right\}$$

Estudiem el rang de la matriu de coeficients:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & a^2 \\ 1 & -1 & a(a-1) \end{pmatrix}$$

$$|A| = a(a-1) \rightarrow |A| = 0 \rightarrow a = 0, \; a = 1$$

- Si $a \neq 0$ i $a \neq 1$, $ran(A) = 3 = ran(A')$.

  El sistema és *compatible determinat*. Són solució:

$$|A_x| = \begin{vmatrix} a & -1 & 0 \\ 2a+1 & 0 & a^2 \\ 2a & -1 & a(a-1) \end{vmatrix} = a \cdot (a^2 - a - 1)$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 1 & 2a+1 & a^2 \\ 1 & 2a & a(a-1) \end{vmatrix} = -a$$

$$|A_z| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & a \\ 1 & 0 & 2a+1 \\ 1 & -1 & 2a \end{vmatrix} = a$$

  La solució és: $x = \dfrac{a^2 - a - 1}{a - 1}$, $y = \dfrac{-1}{a - 1}$, $z = \dfrac{1}{a - 1}$

- Si $a = 0 \rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow ran(A) = 2$

  $A' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow ran(A') = 2$

  El sistema és *compatible indeterminat.*

  Per resoldre'l, prenem les dues primeres equacions:

$$\left.\begin{array}{l} x - y = 0 \\ x = 1 \end{array}\right\}$$

  Solució: $x = 1$, $y = 1$, $z = \lambda$

- Si $a = 1 \rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow ran\,(A) = 2$

  $A' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow ran\,(A') = 3$

  El sistema és *incompatible*.

- Si $a = 4$, es tracta d'un sistema *compatible determinat*, resolt en el primer cas, amb solució:

  $$x\ \frac{11}{3},\quad y = \frac{-1}{3},\quad z = \frac{1}{3}$$

29 **Sigui:** $\boldsymbol{A = \begin{pmatrix} x & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ x & 1 & 1 \end{pmatrix}}$

a) Troba els valors de x per als quals A té inversa.

b) Calcula, si és possible, A^{-1} per a $x = 2$.

a) Existeix A^{-1} només quan $|A| \neq 0$.

$$|A| = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ x & 1 & 1 \end{vmatrix} = x \neq 0 \text{ si } x \neq 0$$

Per tant, existeix A^{-1} per a tot $x \neq 0$.

b) Per a $x = 2$, tenim que $|A| = 2 \neq 0$, per tant existeix A^{-1} en aquest cas. La calculem:

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj\,(A) \longrightarrow (Adj\,(A))^t \longrightarrow \frac{1}{|A|}(Adj\,(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -6 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 6 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -6 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 6 & 2 & -6 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1/2 & 3/2 \\ 3 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

30 **Donades les matrius:**

$$\boldsymbol{A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} -9 & 3 \\ -8 & 17 \end{pmatrix}}$$

troba la matriu X que verifica $AB + CX = D$.

$$AB + CX = D \rightarrow CX = D - AB \rightarrow X = C^{-1} \cdot (D - AB)$$

- Calculem C^{-1} $(|C| = -2 \neq 0 \;\rightarrow\;$ existeix $C^{-1})$:

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj(C) \longrightarrow (Adj(C))^t \longrightarrow \frac{1}{|C|}(Adj(C))^t$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix} = C^{-1}$$

- Calculem $A \cdot B$:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 0 \\ -2 & 10 \end{pmatrix}$$

- Així doncs:

$$X = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} -9 & 3 \\ -8 & 17 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -7 & 0 \\ -2 & 10 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -6 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

31 **Troba X si $3AX = B$, de manera que:** $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$3AX = B \;\rightarrow\; X = \frac{1}{3} A^{-1} \cdot B$

Calculem A^{-1} $(|A| = -1 \neq 0 \;\rightarrow\;$ existeix $A^{-1})$:

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj(A) \longrightarrow (Adj(A))^t \longrightarrow \frac{1}{|A|}(Adj(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Per tant:

$$X = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

32 **Resol l'equació $A\,X\,B = C$ si:**

$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

☛ ***Multiplica C per A^{-1} per l'esquerra i per B^{-1} per la dreta.***

$AXB = C \;\rightarrow\; A^{-1} \cdot A \cdot X \cdot B \cdot B^{-1} = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1} \;\rightarrow\; X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}$

Calculem A^{-1} i B^{-1} $(|A| = 1$ i $|B| = 1 \;\rightarrow\;$ existeixen A^{-1} i $B^{-1})$:

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj(A) \longrightarrow (Adj(A))^t \longrightarrow \frac{1}{|A|}(Adj(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj\,(B) \longrightarrow (Adj\,(B))^t \longrightarrow \frac{1}{|B|}(Adj\,(B))^t$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = B^{-1}$$

Per tant:

$$X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

33 Donada $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, troba una matriu X de manera que $AXA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

☛ ***Multiplica dues vegades per A^{-1}, una vegada per l'esquerra i una altra per la dreta.***

Calculem A^{-1} ($|A| = 1 \neq 0 \;\to\;$ existeix A^{-1}):

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj\,(A) \longrightarrow (Adj\,(A))^t \longrightarrow \frac{1}{|A|}(Adj\,(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Per tant:

$$AXA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \;\to\; X = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -4 & -7 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

34 Determina si les equacions següents tenen solució i troba-la si és possible:

a) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

a) $\underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}}_{A} X = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{B}$

Com que $|A| = 0$, no existeix A^{-1}. L'equació *no* té solució.

b) $\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{A} X = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}}_{B}$

Com que $|A| = 4 \neq 0$, existeix A^{-1} i l'equació té solució.

$A \cdot X = B \;\rightarrow\; A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \;\rightarrow\; X = A^{-1} \cdot B$. Trobem A^{-1}:

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj(A) \longrightarrow (Adj(A))^t \longrightarrow \frac{1}{|A|}(Adj(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 6 & -3 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -6 & -3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -6 & -2 & 4 \\ -3 & -3 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -6 & -2 & 4 \\ -3 & -3 & 2 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Així doncs:

$$X = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -6 & -2 & 4 \\ -3 & -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & 2 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Per tant:

$$X = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & 2 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3/4 & 5/4 \\ 1 & 1/2 & 1/2 \\ -1 & 1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$$

35 **Resol l'equació:** $\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{5} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{-3} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{4} \\ \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$

☛ ***Com que*** $\boldsymbol{AX + B = C \rightarrow X = A^{-1}(C - B)}$.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}}_{B}$$

Calculem A^{-1} ($|A| = 16 \neq 0 \;\rightarrow\;$ existeix A^{-1}):

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj(A) \longrightarrow (Adj(A))^t \longrightarrow \frac{1}{|A|}(Adj(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -5 & 7 & 2 \\ -5 & -9 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 5 & 7 & -2 \\ -5 & 9 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 5 & -5 \\ 1 & 7 & 9 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 3 & 5 & -5 \\ 1 & 7 & 9 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Així doncs:

$$A \cdot X = B \;\rightarrow\; X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 3 & 5 & -5 \\ 1 & 7 & 9 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 16 \\ -16 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Per tant, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$; és a dir: $x = 1$, $y = -1$, $z = 1$

36 **Resol l'equació:**

$$\boldsymbol{X}\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{6} \\ \mathbf{4} & \mathbf{2} & \mathbf{9} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$$

Sigui $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 6 \\ 4 & 2 & 9 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ i $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Aleshores:

$$X \cdot A - B = C \to X \cdot A = C + B \to X \cdot A \cdot A^{-1} = (C + B) \cdot A^{-1} \to$$

$$\to X = (C + B) \cdot A^{-1}$$

$$C + B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 6 \\ 4 & 2 & 9 \end{pmatrix} \to |A| = 1 \neq 0 \to \text{Existeix } A^{-1}$$

Calculem A^{-1}:

$$\alpha_{ij} \longrightarrow Adj(A) \longrightarrow (Adj(A))^t \longrightarrow \frac{1}{|A|}(Adj(A))^t$$

$$\begin{pmatrix} 24 & 3 & -10 \\ 5 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 24 & -3 & -10 \\ -5 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 24 & -5 & -2 \\ -3 & 1 & 0 \\ -10 & 2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 24 & -5 & -2 \\ -3 & 1 & 0 \\ -10 & 2 & 1 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Per tant:

$$X = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 24 & -5 & -2 \\ -3 & 1 & 0 \\ -10 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 69 & -14 & -6 \\ -2 & 1 & 0 \\ 15 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

37 **Hi ha algun valor de $\boldsymbol{a}$ per al qual aquest sistema tingui infinites solucions?**

$$\left\{\begin{array}{l} \mathbf{3x - 2y - 3z = 2} \\ \mathbf{2x + ay - 5z = -4} \\ \mathbf{x + y + 2z = 2} \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{r} 3x - 2y - 3z = 2 \\ 2x + ay - 5z = -4 \\ x + y + 2z = 2 \end{array}\right\} \quad A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & -3 & 2 \\ 2 & a & -5 & -4 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

$$\underbrace{\begin{matrix} 3 & -2 & -3 \\ 2 & a & -5 \\ 1 & 1 & 2 \end{matrix}}_{A}$$

$|A| = 9a + 27 = 0 \to a = -3$

- **Si $\boldsymbol{a = -3}$,** queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & -3 & 2 \\ 2 & -3 & -5 & -4 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

Com que $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -5$ i $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & -4 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 20$, aleshores:

$ran\,(A) = 2 \neq ran\,(A') = 3 \;\rightarrow\;$ El sistema és *incompatible.*

- **Si $a = -3$** $\;\rightarrow\;$ $ran\,(A) = ran\,(A') = 3 \;\rightarrow\;$ *Compatible determinat.*

Per tant, *no* existeix cap valor de a per al qual el sistema tingui infinites solucions.

Pàgina 81

38 **Prova, sense desenvolupar el determinant, que:**

$$\begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ x & x+3 & x+4 \\ x & x+5 & x+6 \end{vmatrix} = 0$$

☛ ***Resta la primera fila a la segona i a la tercera.***

$$\begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ x & x+3 & x+4 \\ x & x+5 & x+6 \end{vmatrix} = \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a - 1^a \\ 3^a - 1^a \end{array} \begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 0,$$

ja que les dues últimes files són proporcionals.

39 **Calcula:**

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1+a & 2+a & 3+a & 4+a \\ a & a & a & a \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 1 & m & 0 & 0 \\ 0 & 1 & m & 0 \\ 0 & 0 & 1 & m \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

a) $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1+a & 2+a & 3+a & 4+a \\ a & a & a & a \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{vmatrix} \underset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ a & a & a & a \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ a & a & a & a \\ a & a & a & a \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{vmatrix} \underset{(2)}{=} 0 + 0 = 0$$

(1) Descomponem el determinant en suma de dos.

(2) Hi ha dues files iguals en cada un dels determinants.

b) $$\begin{vmatrix} 1 & m & 0 & 0 \\ 0 & 1 & m & 0 \\ 0 & 0 & 1 & m \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

ja que es el determinant d'una matriu diagonal i els elements de la diagonal són 1.

40 **Obtén d'acord amb $\boldsymbol{a, b, c}$ el valor de:** $\begin{vmatrix} a & a & a \\ a+b & a & a \\ a & a+c & a \end{vmatrix}$

☛ ***Resta la tercera columna a les dues primeres.***

$$\begin{vmatrix} a & a & a \\ a+b & a & a \\ a & a+c & a \end{vmatrix} = \begin{matrix} 1^a - 3^a \\ 2^a - 3^a \\ 3^a \end{matrix} \begin{vmatrix} 0 & -c & 0 \\ b & -c & 0 \\ a & a+c & a \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} 0 & -c \\ b & -c \end{vmatrix} = abc$$

41 **Sabent que** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = 5$**, calcula:**

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+7 & b+7 & c+7 \\ x/2 & y/2 & z/2 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

a) $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+7 & b+7 & c+7 \\ x/2 & y/2 & z/2 \end{vmatrix} \underset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x/2 & y/2 & z/2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 7 & 7 & 7 \\ x/2 & y/2 & z/2 \end{vmatrix} \underset{(2)}{=}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} + 0 = \frac{1}{2} \cdot 5 = \frac{5}{2}$$

(1) Descomponem el determinant en suma de dos.

(2) Traiem $\frac{1}{2}$ factor comú de la 3.ª fila. El 2.ⁿ determinant és 0, ja que les dues primeres files són proporcionals.

b) $$\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \underset{(1)}{=} - \begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \end{vmatrix} \underset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = 5$$

(1) Quan canviem d'ordre dues files consecutives, el determinant canvia de signe.

42 **Calcula els valors de $\boldsymbol{a}$ per als quals el rang de $\boldsymbol{A}$ és menor que 3:**

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & a & 3 \\ 4 & 1 & -a \end{pmatrix}$ **Pot ésser *ran* $(A) = 1$ per a algun valor de $\boldsymbol{a}$?**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & a & 3 \\ 4 & 1 & -a \end{pmatrix}$$

El rang de A és menor que 3 si $|A| = 0$.

$|A| = -(a-1)(a-3)$

$|A| = 0$ si $a = 1$ o $a = 3$

Per tant: si $a = 1$ o $a = 3 \rightarrow ran(A) < 3$

- El $ran(A)$ no pot ser 1, perquè si ens fixem en el menor:

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 4 & -a \end{vmatrix} = -12 \neq 0,$$ independentment del valor de a.

QÜESTIONS TEÒRIQUES

43 **El rang de la matriu de coeficients d'un sistema homogeni de quatre equacions i tres incògnites és igual a 3. Què pots dir de la seva solució?**

Com que el sistema és homogeni amb 3 incògnites, tenim que $ran(A) = ran(A') =$ $= nre.\ d'incògnites = 3$. El sistema seria compatible determinat. Per tant, tindria com a solució única la solució trivial (0, 0, 0).

44 **En un sistema d'igual nombre d'equacions que d'incògnites, el determinant de la matriu de coeficients és igual a 0.**

a) Pot ésser compatible?

b) Pot tenir solució única?

c) S'hi pot aplicar la regla de Cramer?

a) Sí, podria ser compatible indeterminat si $ran(A) = ran(A') <$ *nre. d'incògnites.*

b) No, ja que com que $ran(A) <$ *nre. d'incògnites*, el sistema no pot ser compatible determinat.

c) Sí, si és compatible, passant al 2.^{n} membre les incògnites que calgui.

45 **Quina condició ha de complir una matriu quadrada per tenir inversa?**

La condició necessària i suficient perquè una matriu, A, quadrada tingui inversa és que el seu determinant sigui diferent de zero, és a dir, $|A| \neq 0$.

46 **Siguin A i B inverses una de l'altra. Si $|A| = 4$, quant val $|B|$?**

Si A i B són inverses l'una de l'altra, aleshores $A \cdot B = I$. Així:

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B| = |I| = 1 \quad \rightarrow \quad |B| = \frac{1}{|A|} = \frac{1}{4}$$

47 **El rang de la matriu de coeficients d'un sistema de tres equacions amb tres incògnites és igual a 1.**

Quin rang, com a màxim, pot tenir la matriu ampliada?

Com a màxim, la matriu ampliada podrà tenir rang 2.

48 **Hi ha algun valor de a per al qual la matriu $\begin{pmatrix} a & a^2-2 \\ 1 & a \end{pmatrix}$ no tingui inversa?**

$\begin{vmatrix} a & a^2-2 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a^2 - a^2 + 2 = 2 \neq 0$ per a qualsevol valor de a.

Per tant, no existeix cap valor de a per al qual la matriu donada no tingui inversa.

PER APROFUNDIR

49 **a) Per a quin valor de a aquest sistema és compatible determinat?**

$$\left\{\begin{array}{l} x - 2y = 1 \\ y + z = a \\ x - 3z = -1 \\ y - z = 2 \end{array}\right.$$

b) Pot ésser compatible indeterminat?

a) $\left.\begin{array}{l} x - 2y = 1 \\ y + z = a \\ x - 3z = -1 \\ y - z = 2 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x - 2y = 1 \\ x - 3z = -1 \\ y - z = 2 \\ y + z = 2 \end{array}\right\} \quad A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & a \end{array}\right)$

$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \quad \to \quad ran\,(A) = 3 = nre.\ d'incògnites$

$$|A'| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & a \end{vmatrix} \underset{\text{FILES: } 1^a;\ 2^a-1^a;\ 3^a;\ 4^a}{=} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a - 14 = 0$$

$\to \quad a = 14$

Per tant, $\left\{\begin{array}{l} \bullet\ \textbf{Si } a = 14 \ \to\ ran\,(A) = ran\,(A') = 3 \ \to\ \textit{Compatible determinat} \\ \bullet\ \textbf{Si } a \neq 14 \ \to\ ran\,(A) = 3 \neq ran\,(A') = 4 \ \to\ \textit{Incompatible} \end{array}\right.$

b) *No*, pel que hem vist en l'apartat anterior.

50 **Calcula el valor d'aquest determinant i dóna el resultat factoritzat:**

$$\begin{vmatrix} 3 & x & x & x \\ x & 3 & x & x \\ x & x & 3 & x \\ x & x & x & 3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & x & x & x \\ x & 3 & x & x \\ x & x & 3 & x \\ x & x & x & 3 \end{vmatrix} \underset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 3+3x & x & x & x \\ 3+3x & 3 & x & x \\ 3+3x & x & 3 & x \\ 3+3x & x & x & 3 \end{vmatrix} \underset{(2)}{=} (3+3x) \begin{vmatrix} 1 & x & x & x \\ 1 & 3 & x & x \\ 1 & x & 3 & x \\ 1 & x & x & 3 \end{vmatrix} \underset{1^a;\ 2^a-1^a;\ 3^a-1^a;\ 4^a-1^a}{=}$$

$$(3+3x)\begin{vmatrix} 1 & x & x & x \\ 0 & 3-x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3-x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3-x \end{vmatrix} \overset{=}{\scriptstyle(3)} (3+3x)\begin{vmatrix} 3-x & 0 & 0 \\ 0 & 3-x & 0 \\ 0 & 0 & 3-x \end{vmatrix} =$$

$$= (3+3x)\,(3-x)^3 = 3(1+x)\,(x-3)^3$$

(1) Sumem a la 1.ª columna les altres.

(2) Traiem $(3+3x)$ factor comú, de la 1.ª columna.

(3) Desenvolupem per la 1.ª columna.

51 **Discuteix els sistemes següents segons els valors dels paràmetres que contenen:**

a) $\begin{cases} x - 3y + z = a \\ x \quad\quad - z = b \\ x \quad\quad + z = c \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x - y + z = 2 \\ 2x + 3y - 2z = -8 \\ 4x + y + az = b \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} x - 3y + z = a \\ x \quad\quad - z = b \\ x \quad\quad + z = c \end{array}\right\}$ $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & a \\ 1 & 0 & -1 & b \\ 1 & 0 & 1 & c \end{array}\right)$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$|A| = 6 \neq 0 \rightarrow$ *ran* (A) = *ran* (A') = *nre. d'incògnites* $\rightarrow$ El sistema és *compatible determinat* per a qualsevol valor de a, b i c.

a) $\left.\begin{array}{l} x - y + z = 2 \\ 2x + 3y - 2z = -8 \\ 4x + y + az = b \end{array}\right\}$ $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -2 & -8 \\ 4 & 1 & a & b \end{array}\right)$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 4 & 1 & a \end{pmatrix}$

$|A| = 5a = 0 \rightarrow a = 0$

- **Si $a = 0$,** queda:

  $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -2 & -8 \\ 4 & 1 & 0 & b \end{array}\right)$; $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$; $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -8 \\ 4 & 1 & b \end{vmatrix} = 5b + 20 = 0 \rightarrow b = -4$

  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

- **Si $a = 0$ i $b = -4$** $\rightarrow$ *ran* (A) = *ran* $(A') = 2 <$ *nre. d'incògnites*. El sistema és *compatible indeterminat*.

- **Si $a = 0$ i $b \neq -4$** $\rightarrow$ *ran* $(A) = 2 \neq$ *ran* $(A') = 3$. El sistema és *incompatible*.

- **Si $a \neq 0$** $\rightarrow$ *ran* (A) = *ran* (A') = *nre. d'incògnites* = 3. El sistema és *compatible determinat*, qualsevol que sigui el valor de b.

BLOC I PROVES

Pàgina 86

PROVES

OPCIÓ A

1 Una multinacional d'assegurances té delegacions a les ciutats de Madrid, Barcelona i Sevilla. El nombre total d'executius de les tres delegacions és de 31. Perquè el nombre d'executius de la delegació de Barcelona sigui igual que el de Madrid, haurien de traslladar-se'n 3 de Madrid a Barcelona. A més, el nombre dels de Madrid excedeix en un la suma dels destinats en les altres dues ciutats. Quants executius estan destinats a cada una de les ciutats?

x executius de Madrid, y executius de Barcelona i z executius de Sevilla

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=31 \\ x-3=y+3 \\ x=y+z+1 \end{array}\right\} \rightarrow \left(\begin{array}{l} x+y+z=31 \\ x-y=6 \\ x-y-z=1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{l} x+y+z=31 \\ x-y=6 \\ 2x=32 \end{array}\right) \rightarrow x=\frac{32}{2}=16$$

$$-y=6-16=-10 \rightarrow y=10$$

$$z=31-10-16=5$$

16 executius estan destinats a Madrid, 10 a Barcelona i 5 a Sevilla.

2 Donades les matrius $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ i $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$:

a) Calcula les matrius C i D sabent que AC = BD = I.

b) Resol el sistema $(C^{-1}-D^{-1})\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

a) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d_1 & d_2 \\ d_3 & d_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 2c_1+3c_3 & 2c_2+3c_4 \\ 3c_1+c_3 & 3c_2+c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 & d_2 \\ d_1-5d_3 & d_2-5d_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \; C = \begin{pmatrix} \frac{-1}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{-2}{7} \end{pmatrix}; \; D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{-1}{5} \end{pmatrix}$$

b) $C_1 = \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ i $D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 8x + 3y = 1 \\ 2x + 6y = 2 \end{cases}$$

$x = 0$ i $y = \frac{1}{3}$

3 Donat el sistema $\begin{cases} \boldsymbol{x + 2y + az = 1} \\ \boldsymbol{-y + z = 0} \\ \boldsymbol{ax + z = a} \end{cases}$

a) Discuteix-lo en funció del valor de a.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 0 & -1 & 1 \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix}; \; A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 & a \end{pmatrix}$$

$|A| = -1 + 2a + a^2 = 0$

$a = -1 + \sqrt{2}$ i $-1 - \sqrt{2}$

Per $a = -1 + \sqrt{2}$ i $-1 - \sqrt{2}$,

ran(A) = ran(A') = 2, sistema compatible indeterminat.

Per altres valors de a,

ran(A) = ran(A') = 3, sistema compatible determinat.

b) Resol-lo en el cas *a* = 1.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \; |A_y| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \; |A_z| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{2}{2} = 1; \quad y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{0}{2} = 0; \quad z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{0}{2} = 1;$$

OPCIÓ B

1 Troba les matrius $\boldsymbol{A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 1-a \end{pmatrix}}$ **que verifiquen** $\boldsymbol{A^2 = A}$**.**

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 1-a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 1-a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 1-a \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ c & (1-a)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 1-a \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{matrix} a^2 = a \\ (1-a)^2 = 1-a \end{matrix}\right\} a = 1 \text{ i } a = 0$$

Per tant, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}$ i $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 1 \end{pmatrix}$, on c és qualsevol nombre.

2 Donat el sistema $\begin{cases} \boldsymbol{x + y + z = 2} \\ \boldsymbol{mx + y + (m-1)z = 1} \\ \boldsymbol{x + my + z = 2} \end{cases}$

a) Discuteix-lo en funció del valor *m*.

$$|A| = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & 1 & m-1 \\ 1 & m & 1 \end{pmatrix}; \ |A'| = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ m & 1 & m-1 & 1 \\ 1 & m & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$|A| = 1 + m = 0 \ \rightarrow \ m = 1$$

Per $m = 1$, ran(A) = ran(A') = 2, sistema compatible indeterminat.

Per $m \neq 1$, ran(A) = ran(A') = 3, sistema compatible determinat.

b) Resol-lo en el cas de *m* = 1.

$$\begin{cases} \boldsymbol{x + y + z = 2} \\ \boldsymbol{x + y = 1} \\ \boldsymbol{x + y + z = 2} \end{cases}$$

Com que és indeterminat, s'ha de resoldre en funció d'un paràmetre. Fem $x = \lambda$.

$$\begin{cases} y + z = 2 - \lambda \\ y = 1 - \lambda \end{cases}$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

$$|B_z| = \begin{vmatrix} 1 & 2-\lambda \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -1; \ |B_y| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1-\lambda & 0 \end{vmatrix} = -1 + \lambda;$$

Solucions: $x = \lambda$; $y = \dfrac{-1+\lambda}{-1} = 1 - \lambda$; $z = \dfrac{-1}{-1} = 1$

3 Considerem les matrius $\boldsymbol{B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$ **i** $\boldsymbol{C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}$**.**

Troba una matriu A de manera que en multiplicar-la per B i sumar-li C a aquest producte, en resulti 2A.

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_1 & 2a_2 \\ 2a_3 & 2a_4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_1 + a_2 \\ a_3 & a_3 + a_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_1 & 2a_2 \\ 2a_3 & 2a_4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a_1 - 1 = 2a_1 \\ a_1 + a_2 = 2a_2 \\ a_3 = 2a_3 \\ a_3 + a_4 + 2 = 2a_4 \end{cases}$$

Solucions: $a_3 = 0$; $a_1 = -1$; $a_2 = -1$; $a_4 = 2$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$