UNITAT 1

SISTEMES D'EQUACIONS. MÈTODE DE GAUSS

Pàgina 8

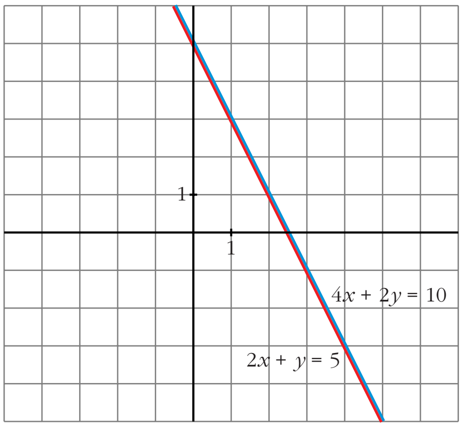
Equacions i sistemes d'equacions amb dues incògnites

1. Podem dir que les dues equacions següents són dues "dades diferents"? No és cert que la segona diu el mateix que la primera?

$$\left\{\begin{aligned} 2x + y &= 5 \\ 4x + 2y &= 10 \end{aligned}\right.$$

■ **Representa-les gràficament i observa que es tracta de la mateixa recta.**

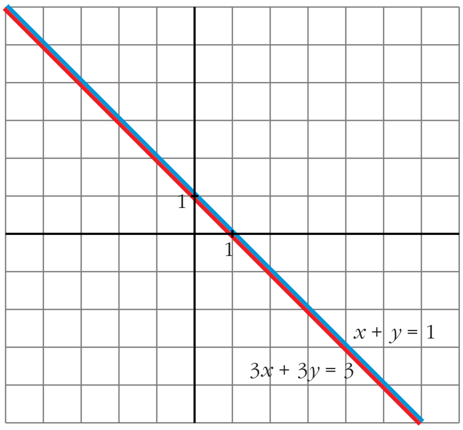
Es tracta de la mateixa recta.



■ **Posa un altre sistema de dues equacions amb dues incògnites en què la segona equació sigui, en essència, igual que la primera. Interpreta'l gràficament.**

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 1 \\ 3x + 3y &= 3 \end{aligned}\right\}$$

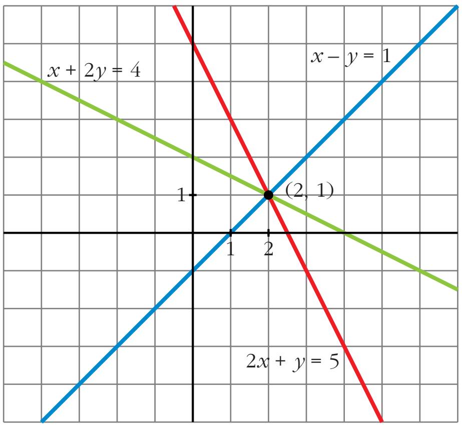
Gràficament són la mateixa recta:



2. Observa les equacions següents:

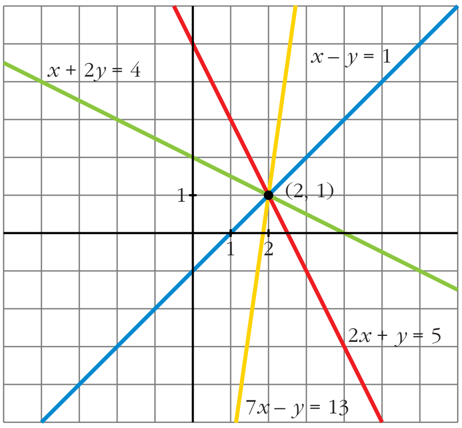
$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x - y = 1 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$$

- **Representa-les i observa que les dues primeres rectes determinen un punt (amb aquestes dues dades es responen les dues preguntes: $x = 2, y = 1$) i que la tercera recta també passa per aquest punt.**



- **Dóna una altra equació que també sigui "conseqüència" de les dues primeres (per exemple: 2 · 1a + 3 · 2a), representa-la i observa que també passa per $x = 2, y = 1$.**

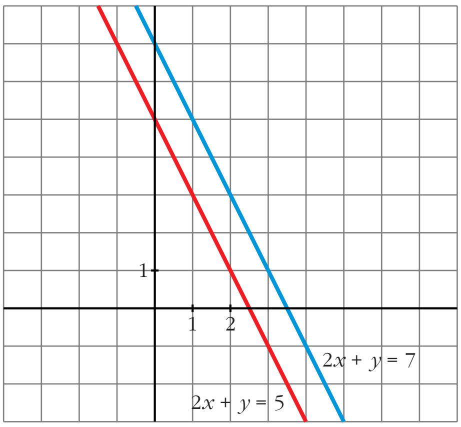
  2 · 1a + 3 · 2a → $7x - y = 13$



3. Observa que ***el que diu la segona equació és contradictori amb el que diu la primera:***

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 2x + y = 7 \end{cases}$$

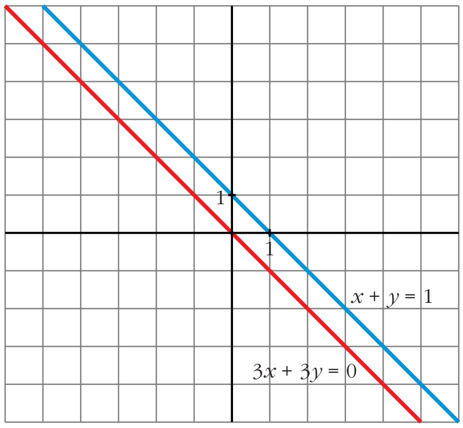
- **Representa-les i observa que es tracta de dues rectes paral·leles, és a dir, no tenen solució comuna, perquè les rectes no es tallen en cap punt.**



■ **Modifica el terme independent de la segona equació del sistema que has inventat en l'exercici 1 i representa de nou les dues rectes.**

Observa que el que diuen ambdues equacions és ara contradictori i que es representen mitjançant rectes paral·leles.

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 1 \\ 3x + 3y &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{Rectes paral·leles:}$$



Pàgina 11

1 Sense resoldre'ls, són equivalents aquests sistemes?

$$\textbf{a)} \begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - y = 7 \end{cases} \quad \textbf{b)} \begin{cases} x + y - z = 5 \\ x + y = 7 \end{cases} \quad \textbf{c)} \begin{cases} x + y - z = 5 \\ x + y = 7 \\ 2x + 2y - z = 12 \end{cases} \quad \textbf{d)} \begin{cases} x + y - z = 11 \\ x + 2y - z = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 3x = 12 \end{cases} \quad \begin{cases} z = 2 \\ x + y = 7 \end{cases} \quad \begin{cases} z = 2 \\ x + y = 7 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y - z = 11 \\ y = -4 \end{cases}$$

a) Hem substituït la segona equació pel resultat de sumar les dues que teníem.

b) Hem substituït la primera equació pel resultat de restar a la segona equació la primera.

c) En el primer sistema, la tercera equació s'obté sumant les dues primeres. La resta és igual que a b).

d) Hem substituït la segona equació pel resultat de restar a la segona equació la primera.

Pàgina 13

1 Resol i interpreta geomètricament els sistemes següents:

$$\textbf{a)} \begin{cases} 2x + y = 1 \\ 3x + 2y = 4 \\ x + y = 3 \end{cases} \quad \textbf{b)} \begin{cases} x + y + z = 6 \\ y - z = 1 \\ x + 2y = 7 \end{cases} \quad \textbf{c)} \begin{cases} x + y + z = 6 \\ x + y + z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases} \quad \textbf{d)} \begin{cases} x + y + z = 6 \\ y - z = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

a) $\left.\begin{aligned} 2x + y &= 1 \\ 3x + 2y &= 4 \\ x + y &= 3 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\to y = 1 - 2x \\ & \\ &\to y = 3 - x \end{aligned} \left.\vphantom{\begin{aligned}1\\1\\1\end{aligned}}\right\} 1 - 2x = 3 - x \to x = -2, \quad y = 3 - (-2) = 5$

Comprovem si compleix la 2.ª equació: $3 \cdot (-2) + 2 \cdot 5 = -6 + 10 = 4$.

Solució: $x = -2$, $y = 5$. Són tres rectes que es tallen en el punt $(-2, 5)$.

b) $\left.\begin{array}{r} x + y + z = 6 \\ y - z = 1 \\ x + 2y \quad = 7 \end{array}\right\}$ La 3.ª equació s'obté sumant les dues primeres; podem prescindir-ne.

$\left.\begin{array}{r} x + y = 6 - z \\ y = 1 + z \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} x = 6 - z - y = 6 - z - 1 - z = 5 - 2z \\ y = 1 + z \end{array}$

Solució: $x = 5 - 2\lambda$, $y = 1 + \lambda$, $z = \lambda$. Són tres plans que es tallen en una recta.

c) $\left.\begin{array}{r} x + y + z = 6 \\ x + y + z = 0 \\ x \quad - z = 0 \end{array}\right\}$ Les dues primeres equacions són contradictòries.
El sistema és incompatible.
Els dos primers plans són paral·lels i el tercer els talla.

d) $\left.\begin{array}{r} x + y + z = 6 \\ y - z = 1 \\ z = 1 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} z = 1 \\ y = 1 + z = 2 \\ x = 6 - y - z = 6 - 2 - 1 = 3 \end{array}$

Solució: $x = 3$, $y = 2$, $z = 1$. Són tres plans que es tallen en el punt $(3, 2, 1)$.

2 a) Resol el sistema: $\left\{\begin{array}{l} \boldsymbol{x + 2y = 3} \\ \boldsymbol{x - y = 4} \end{array}\right.$

b) Afegeix-hi una tercera equació de manera que continuï essent compatible.

c) Afegeix-hi una tercera equació de manera que sigui incompatible.

d) Interpreta geomètricament el que has fet en cada cas.

a) $\left.\begin{array}{r} x + 2y = 3 \\ x - y = 4 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} x = 3 - 2y \\ x = 4 + y \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} 3 - 2y = 4 + y \;\rightarrow\; -1 = 3y \;\rightarrow\; y = \dfrac{-1}{3} \\ x = 4 + y = 4 - \dfrac{1}{3} = \dfrac{11}{3} \end{array}$

Solució: $x = \dfrac{11}{3}$, $y = \dfrac{-1}{3}$

b) Per exemple: $2x + y = 7$ (suma de les dues anteriors).

c) Per exemple: $2x + y = 9$.

d) En a) $\rightarrow$ Són dues rectes que es tallen en $\left(\dfrac{11}{3}, \dfrac{-1}{3}\right)$.

En b) $\rightarrow$ La nova recta també passa per $\left(\dfrac{11}{3}, \dfrac{-1}{3}\right)$.

En c) $\rightarrow$ La nova recta no passa per $\left(\dfrac{11}{3}, \dfrac{-1}{3}\right)$. No existeix cap punt comú en les tres rectes. Es tallen dues a dues.

Pàgina 14

1 **Reconeix com a escalonats els sistemes següents i resol-los:**

a) $\begin{cases} 3x = 7 \\ x - 2y = 5 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x = 6 \\ x + y + 3z = 7 \\ 5x - z = 4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x - 2t = 6 \\ x + y + 3z = 7 \\ 5x - z + t = 4 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} 2x + 3z = 0 \\ x + 3y - z = 7 \\ 4x = 4 \end{cases}$

a) $\left.\begin{aligned} 3x &= 7 \\ x - 2y &= 5 \end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned} x &= \frac{7}{3} \\ y &= \frac{x-5}{2} = \frac{-4}{3} \end{aligned}\right\}$ *Solució:* $x = \frac{7}{3}$, $y = \frac{-4}{3}$

b) $\left.\begin{aligned} 2x &= 6 \\ x + y + 3z &= 7 \\ 5x - z &= 4 \end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned} 2x &= 6 \\ 5x - z &= 4 \\ x + y + 3z &= 7 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &x = 3 \\ &z = 5x - 4 = 11 \\ &y = 7 - x - 3z = 7 - 3 - 33 = -29 \end{aligned}$

Solució: $x = 3$, $y = -29$, $z = 11$

c) $\left.\begin{aligned} 2x - 2t &= 6 \\ x + y + 3z &= 7 \\ 5x - z + t &= 4 \end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned} 2x &= 6 + 2t \\ 5x - z &= 4 - t \\ x + y + 3z &= 7 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &x = 3 + t \\ &z = 5x - 4 + t = 11 + 6t \\ &y = 7 - x - 3z = -29 - 19t \end{aligned}$

Solucions: $x = 3 + \lambda$, $y = -29 - 19\lambda$, $z = 11 + 6\lambda$, $t = \lambda$

d) $\left.\begin{aligned} 2x + 3z &= 0 \\ x + 3y - z &= 7 \\ 4x &= 4 \end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned} 4x &= 4 \\ 2x + 3z &= 0 \\ x + 3y - z &= 7 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &x = 1 \\ &z = \frac{-2x}{3} = \frac{-2}{3} \\ &y = \frac{7 - x + z}{3} = \frac{16}{9} \end{aligned}$

Solució: $x = 1$, $y = \frac{16}{9}$, $z = \frac{-2}{3}$

2 **Són escalonats aquests sistemes? Resol-los:**

a) $\begin{cases} z + t = 3 \\ y + 3z - 2t = 4 \\ 2z = 2 \\ x - z + 2t = 5 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x + y + z = 7 \\ 2x - z = 4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y + z + t = 3 \\ x - y = 2 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} 2y + z = 1 \\ 2y = 1 \\ x + 2y + 2z = 1 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{rrrrl} & & z+ & t & = 3 \\ & y+ & 3z- & 2t & = 4 \\ & & 2z & & = 2 \\ x & & -\ z+ & 2t & = 5 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{rrrrl} & & 2z & & = 2 \\ & & z+ & t & = 3 \\ & y+ & 3z- & 2t & = 4 \\ x & & -\ z+ & 2t & = 5 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} z = 1 \\ t = 3 - z = 2 \\ y = 4 - 3z + 2t = 5 \\ x = 5 + z - 2t = 2 \end{array}$

Solució: $x = 2, \quad y = 5, \quad z = 1, \quad t = 2$

b) $\left.\begin{array}{l} x + y + z = 7 \\ 2x \quad - z = 4 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} 2x \quad = 4 + z \\ x + y = 7 - z \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} x = 2 + \dfrac{z}{2} \\ y = 7 - z - x = 5 - \dfrac{3z}{2} \end{array}$

Solucions: $x = 2 + \lambda, \quad y = 5 - 3\lambda, \quad z = 2\lambda$

c) $\left.\begin{array}{l} x + y + z + t = 3 \\ x - y \qquad = 2 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} x \quad = 2 + y \\ x + z = 3 - y - t \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} x = 2 + y \\ z = 3 - y - t - 2 - y = 1 - 2y - t \end{array}$

Solucions: $x = 2 + \lambda, \quad y = \lambda, \quad z = 1 - 2\lambda - \mu, \quad t = \mu$

d) $\left.\begin{array}{rl} 2y + z & = 1 \\ 2y \quad & = 1 \\ x + 2y + 2z & = 1 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{rl} 2y \quad & = 1 \\ 2y + z & = 1 \\ x + 2y + z & = 1 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} y = \dfrac{1}{2} \\ z = 1 - 2y = 0 \\ x = 1 - 2y - z = 0 \end{array}$

Solució: $x = 0, \quad y = \dfrac{1}{2}, \quad z = 0$

Pàgina 15

3 Transforma en escalonats i resol:

a) $\left\{\begin{array}{l} x - y + 3z = -4 \\ x + y + z = 2 \\ x + 2y - z = 6 \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{l} x + y + z = 6 \\ x - y - z = -4 \\ 3x + y + z = 8 \end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{l} x - y + 3z = -4 \\ x + y + z = 2 \\ x + 2y - z = 6 \end{array}\right\}$ $\xrightarrow{1^a;\ 2^a - 1^a;\ 3^a - 1^a}$ $\left.\begin{array}{l} x - y + 3z = -4 \\ 2y - 2z = 6 \\ 3y - 4z = 10 \end{array}\right\}$ $\xrightarrow{1^a;\ 2^a : 2;\ 3^a}$ $\left.\begin{array}{l} x - y + 3z = -4 \\ y - z = 3 \\ 3y - 4z = 10 \end{array}\right\}$

$\xrightarrow{1^a;\ 2^a;\ 3^a - 3 \cdot 2^a}$ $\left.\begin{array}{l} x - y + 3z = -4 \\ y - z = 3 \\ -z = 1 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} z = -1 \\ y = 3 + z = 2 \\ x = -4 + y - 3z = 1 \end{array}\right\}$

Solució: $x = 1, \quad y = 2, \quad z = -1$

b) $\left.\begin{array}{l} x + y + z = 6 \\ x - y - z = -4 \\ 3x + y + z = 8 \end{array}\right\}$ $\xrightarrow{1^a;\ 2^a - 1^a;\ 3^a - 3 \cdot 1^a}$ $\left.\begin{array}{l} x + y + z = 6 \\ -2y - 2z = -10 \\ -2y - 2z = -10 \end{array}\right\}$ $\xrightarrow{1^a;\ 2^a : (-2)}$ $\left.\begin{array}{l} x + y + z = 6 \\ y + z = 5 \end{array}\right\}$

(Podem prescindir de la 3.ª, ja que és igual que la 2.ª)

$$\left.\begin{array}{r} x+y=6-z \\ y=5-z \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x=6-z-y=6-z-5+z=1 \\ y=5-z \end{array}$$

Solucions: $x = 1, \quad y = 5 - \lambda, \quad z = \lambda$

4 Transforma en escalonat i resol:

$$\left\{\begin{array}{rrrrl} \boldsymbol{x} & \boldsymbol{-\ y} & \boldsymbol{+\ 3z} & & \boldsymbol{=\ 0} \\ \boldsymbol{3x} & \boldsymbol{-\ 2y} & \boldsymbol{-\ 5z} & \boldsymbol{+\ 7w} & \boldsymbol{=-32} \\ \boldsymbol{x} & \boldsymbol{+\ 2y} & \boldsymbol{-\ z} & \boldsymbol{+\ 3w} & \boldsymbol{=\ 18} \\ \boldsymbol{x} & \boldsymbol{-\ 3y} & \boldsymbol{+\ z} & \boldsymbol{+\ 2w} & \boldsymbol{=-26} \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{rrrrl} x & -\ y & +\ 3z & & =\ 0 \\ 3x & -\ 2y & -\ 5z & +\ 7w & =-32 \\ x & +\ 2y & -\ z & +\ 3w & =\ 18 \\ x & -\ 3y & +\ z & +\ 2w & =-26 \end{array}\right\} \xrightarrow{\begin{array}{l} 1^a \\ 2^a - 3 \cdot 1^a \\ 3^a - 1^a \\ 4^a - 1^a \end{array}} \left.\begin{array}{rrrrl} x & -\ y & +\ 3z & & =\ 0 \\ & y & -\ 14z & +\ 7w & =-32 \\ & 3y & -\ 4z & +\ 3w & =\ 18 \\ & -2y & -\ 2z & +\ 2w & =-26 \end{array}\right\}$$

$$\xrightarrow{\begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ 3^a - 3 \cdot 2^a \\ 4^a + 2 \cdot 2^a \end{array}} \left.\begin{array}{rrrrl} x & -\ y & +\ 3z & & =\ 0 \\ & y & -\ 14z & +\ 7w & =-32 \\ & & 38z & -\ 18w & =\ 114 \\ & & -30z & +\ 16w & =-90 \end{array}\right\} \xrightarrow{\begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ 3^a : 2 \\ 15 \cdot 3^a + 19 \cdot 4^a \end{array}}$$

$$\left.\begin{array}{rrrrl} x & -\ y & +\ 3z & & =\ 0 \\ & y & -\ 14z & +\ 7w & =-32 \\ & & 19z & -\ 9w & =\ 57 \\ & & & 34w & =\ 0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} w = 0 \\ z = \dfrac{57 + 9w}{19} = 3 \\ y = -32 + 14z - 7w = 10 \\ x = y - 3z = 1 \end{array}\right\}$$

Solució: $x = 1, \quad y = 10, \quad z = 3, \quad w = 0$

Pàgina 18

1. Resol aquests sistemes d'equacions mitjançant el mètode de Gauss:

$$\textbf{a)} \left\{\begin{array}{rrrl} \boldsymbol{x} & \boldsymbol{+\ y} & \boldsymbol{+\ z} & \boldsymbol{=2} \\ \boldsymbol{3x} & \boldsymbol{-\ 2y} & \boldsymbol{-\ z} & \boldsymbol{=4} \\ \boldsymbol{-2x} & \boldsymbol{+\ y} & \boldsymbol{+\ 2z} & \boldsymbol{=2} \end{array}\right. \qquad \textbf{b)} \left\{\begin{array}{rrrl} \boldsymbol{3x} & \boldsymbol{-\ 4y} & \boldsymbol{+\ 2z} & \boldsymbol{=1} \\ \boldsymbol{-2x} & \boldsymbol{-\ 3y} & \boldsymbol{+\ z} & \boldsymbol{=2} \\ \boldsymbol{5x} & \boldsymbol{-\ y} & \boldsymbol{+\ z} & \boldsymbol{=5} \end{array}\right. \qquad \textbf{c)} \left\{\begin{array}{rrrl} \boldsymbol{x} & \boldsymbol{-\ 2y} & & \boldsymbol{=-3} \\ \boldsymbol{-2x} & \boldsymbol{+\ 3y} & \boldsymbol{+\ z} & \boldsymbol{=\ 4} \\ \boldsymbol{2x} & \boldsymbol{+\ y} & \boldsymbol{-\ 5z} & \boldsymbol{=\ 4} \end{array}\right.$$

a) $$\left.\begin{array}{rrrl} x & +\ y & +\ z & =2 \\ 3x & -\ 2y & -\ z & =4 \\ -2x & +\ y & +\ 2z & =2 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right) \to \xrightarrow{\begin{array}{l} 1^a \\ 2^a - 3 \cdot 1^a \\ 3^a + 2 \cdot 1^a \end{array}} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & -4 & -2 \\ 0 & 3 & 4 & 6 \end{array}\right) \to$$

$$\to \xrightarrow{\begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \cdot (-1) \\ 3^a \cdot 5 + 2^a \cdot 3 \end{array}} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 8 & 24 \end{array}\right) \to \left.\begin{array}{rrrl} x & +\ y & +\ z & =2 \\ & 5y & +\ 4z & =2 \\ & & 2z & =24 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} z = 3 \\ y = \dfrac{2 - 4z}{5} = -2 \\ x = 2 - y - z = 1 \end{array}\right\}$$

Solució: $x = 1, \quad y = -2, \quad z = 3$

b) $$\left.\begin{aligned} 3x-4y+2z&=1\\ -2x-3y+z&=2\\ 5x-y+z&=5\end{aligned}\right\}\quad \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -4 & 2 & 1\\ -2 & -3 & 1 & 2\\ 5 & -1 & 1 & 5\end{array}\right) \xrightarrow{\begin{smallmatrix}1^a-2\cdot 3^a\\ 2^a-3^a\\ 3^a\end{smallmatrix}} \left(\begin{array}{ccc|c} -7 & -2 & 0 & -9\\ -7 & -2 & 0 & -3\\ 5 & -1 & 1 & 5\end{array}\right)$$

Les dues primeres equacions són contradictòries. El sistema és *incompatible.*

c) $$\left.\begin{aligned} x-2y&=-3\\ -2x+3y+z&=4\\ 2x+y-5z&=4\end{aligned}\right\}\quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -3\\ -2 & 3 & 1 & 4\\ 2 & 1 & -5 & 4\end{array}\right) \xrightarrow{\begin{smallmatrix}1^a\\ 2^a+2\cdot 1^a\\ 3^a-2\cdot 1^a\end{smallmatrix}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -3\\ 0 & -1 & 1 & -2\\ 0 & 5 & -5 & 10\end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \xrightarrow{\begin{smallmatrix}1^a\\ 2^a\\ 3^a+5\cdot 2^a\end{smallmatrix}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -3\\ 0 & -1 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right) \rightarrow \left.\begin{aligned} x-2y&=-3\\ -y+z&=-2\end{aligned}\right\}\ \begin{aligned} x&=-3+2y\\ z&=-2+y\end{aligned}$$

Solucions: $x=-3+2\lambda,\ \ y=\lambda,\ \ z=-2+\lambda$

2. Resol mitjançant el mètode de Gauss:

a) $$\left\{\begin{aligned} x-y+2z&=2\\ -x+3y+z&=3\\ x+y+5z&=7\end{aligned}\right.$$ **b)** $$\left\{\begin{aligned} 2x-y+w&=0\\ x-2y+z&=0\\ 5x-y+z+w&=0\\ 5x-2y-z+2w&=0\end{aligned}\right.$$ **c)** $$\left\{\begin{aligned} 2x-y+w&=9\\ x-2y+z&=11\\ 5x-y+z+w&=24\\ 5x-2y-z+2w&=0\end{aligned}\right.$$

a) $$\left.\begin{aligned} x-y+2z&=2\\ -x+3y+z&=3\\ x+y+5z&=7\end{aligned}\right\}\quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2\\ -1 & 3 & 1 & 3\\ 1 & 1 & 5 & 7\end{array}\right) \xrightarrow{\begin{smallmatrix}1^a\\ 2^a+1^a\\ 3^a-1^a\end{smallmatrix}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2\\ 0 & 2 & 3 & 5\\ 0 & 2 & 3 & 5\end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left.\begin{aligned} x-y+2z&=2\\ 2y+3z&=5\end{aligned}\right\}\ \left.\begin{aligned} x-y&=2-2z\\ 2y&=5-3z\end{aligned}\right\}\ \begin{aligned} x&=2-2z+y\\ y&=\frac{5-3z}{2}=\frac{5}{2}-1=\frac{3z}{2}\end{aligned}$$

$$x=2-2z+\frac{5}{2}-\frac{3z}{2}=\frac{9}{2}-\frac{7z}{2}$$

Solucions: $x=\frac{9}{2}-7\lambda,\ \ y=\frac{5}{2}-3\lambda,\ \ z=2\lambda$

b) $$\left.\begin{aligned} 2x-y+w&=0\\ x-2y+z&=0\\ 5x-y+z+w&=0\\ 5x-2y-z+2w&=0\end{aligned}\right\}\quad \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0\\ 5 & -1 & 1 & 1 & 0\\ 5 & -2 & -1 & 2 & 0\end{array}\right) \xrightarrow{\begin{smallmatrix}1^a\\ 2^a\\ 3^a-1^a\\ 4^a-2\cdot 1^a\end{smallmatrix}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0\\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0\end{array}\right) \xrightarrow{\begin{smallmatrix}1^a\\ 2^a\\ 3^a+4^a\\ 4^a\end{smallmatrix}} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0\\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0\end{array}\right) \rightarrow$$

$$\to \left.\begin{array}{l} 2x - y + w = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ 4x = 0 \\ x - z = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 0 \\ z = 0 \\ y = 0 \\ w = 0 \end{array}$$

Solució: $x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad w = 0$

c) $\left.\begin{array}{l} 2x - y + w = 9 \\ x - 2y + z = 11 \\ 5x - y + z + w = 24 \\ 5x - 2y - z + 2w = 0 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 0 & 1 & 9 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 11 \\ 5 & -1 & 1 & 1 & 24 \\ 5 & -2 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right) \to$ $\begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ 3^a - 1^a \\ 4^a - 2 \cdot 1^a \end{array}$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 0 & 1 & 9 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 11 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 15 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -18 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ 3^a + 4^a \\ 4^a \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 0 & 1 & 9 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 11 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -18 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left.\begin{array}{l} 2x - y + w = 9 \\ x - 2y + z = 11 \\ 4x = -3 \\ x - z = -18 \end{array}\right\}$$

$$x = \frac{-3}{4} \qquad z = x + 18 = \frac{69}{4} \qquad y = \frac{x + z - 11}{2} = \frac{11}{4} \qquad w = 9 - 2x + y = \frac{53}{4}$$

Solució: $x = \dfrac{-3}{4}, \quad y = \dfrac{11}{4}, \quad z = \dfrac{69}{4}, \quad w = \dfrac{53}{4}$

Pàgina 19

1. Discuteix, en funció del paràmetre k, aquests sistemes d'equacions:

a) $\left\{\begin{array}{l} 4x + 2y = k \\ x + y - z = 2 \\ kx + y + z = 1 \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{l} 4x + 2y = k \\ x + y - z = 2 \\ kx + y + z = 0 \end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{l} 4x + 2y = k \\ x + y - z = 2 \\ kx + y + z = 1 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 0 & k \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ k & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ 3^a + 2^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 0 & k \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ k+1 & 2 & 0 & 3 \end{array}\right) \to$

$$\to \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ 3^a - 1^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 0 & k \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ k-3 & 0 & 0 & 3-k \end{array}\right)$$

- *Si* $k = 3$, queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 0 & k \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left.\begin{array}{r} x + y - z = 2 \\ 4x + 2y \quad = 3 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x - z = 2 - y \\ 4x \quad = 3 - 2y \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \frac{3 - 2y}{4} = \frac{3}{4} - \frac{y}{2}$$

$$z = x - 2 + y = \frac{3 - 2y}{4} - 2 + y = \frac{-5 + 2y}{4} = \frac{-5}{4} + \frac{y}{2}$$

Sistema *compatible indeterminat.*

Solucions: $x = \frac{3}{4} - \lambda, \quad y = 2\lambda, \quad z = \frac{-5}{4} + \lambda$

- *Si* $k \neq 3$, és *compatible determinat.* El resolem:

$$\left.\begin{array}{r} x + y - z = 2 \\ 4x + 2y \quad = k \\ (k - 3)x \quad = (3 - k) \end{array}\right\}$$

$$x = \frac{3 - k}{k - 3} = -1$$

$$y = \frac{k - 4x}{2} = \frac{k + 4}{2} = 2 + \frac{k}{2}$$

$$z = x + y - 2 = -1 + 2 + \frac{k}{2} - 2 = -1 + \frac{k}{2}$$

Solució: $x = -1, \quad y = 2 + \frac{k}{2}, \quad z = -1 + \frac{k}{2}$

b) $\left.\begin{array}{r} 4x + 2y \quad = k \\ x + y - z = 2 \\ kx + y + z = 0 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 0 & k \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ k & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ 3^a + 2^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 0 & k \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ k + 1 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right) \rightarrow$

$\rightarrow \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ 3^a - 1^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 0 & k \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ k - 3 & 0 & 0 & 2 - k \end{array}\right)$

- *Si* $k = 3$, queda:

$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$ El sistema és *incompatible.*

- Si $k \neq 3$, és *compatible determinat.* El resolem:

$$\left.\begin{array}{r} x + y - z = 2 \\ 4x + 2y \quad = k \\ (k - 3)x \quad = (2 - k) \end{array}\right\}$$

$$x = \frac{2-k}{k-3}$$

$$y = \frac{k-4x}{2} = \frac{k^2+k-8}{2k-6}$$

$$z = x + y - 2 = \frac{2-k}{k-3} + \frac{k^2+k-8}{2(k-3)} - 2 = \frac{k^2-5k+8}{2k-6}$$

Solució: $x = \frac{2-k}{k-3}$, $y = \frac{k^2+k-8}{2k-6}$, $z = \frac{k^2-5k+8}{2k-6}$

2. Discuteix aquests sistemes d'equacions en funció del paràmetre k:

a) $\begin{cases} kx + y - z = 8 \\ x + y + z = 0 \\ 2x + z = k \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ y + kz = 1 \\ x + 2y = k \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{r} kx + y - z = 8 \\ x + y + z = 0 \\ 2x + z = k \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} k & 1 & -1 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & k \end{array}\right) \longrightarrow \begin{array}{l} 1^a - 2^a \\ 2^a \\ 3^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} k-1 & 0 & -2 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & k \end{array}\right) \longrightarrow$

$\longrightarrow \begin{array}{l} 1^a + 2 \cdot 3^a \\ 2^a \\ 3^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} k+3 & 0 & 0 & 8+2k \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & k \end{array}\right)$

- *Si* $k = -3$, queda:

  $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right)$ Sistema *incompatible.*

- Si $k \neq -3$, és *compatible determinat.* El resolem:

  $\left.\begin{array}{r} (k+3)x = 8 + 2k \\ x + y + z = 0 \\ 2x + z = k \end{array}\right\}$

$$x = \frac{8+2k}{k+3}$$

$$z = k - 2x = \frac{k^2-k-16}{k+3}$$

$$y = -x - z = \frac{-k^2-k+8}{(k+3)}$$

Solució: $x = \frac{8+2k}{k+3}$, $y = \frac{-k^2-k+8}{(k+3)}$, $z = \frac{k^2-k-16}{k+3}$

b) $\left.\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ y + kz &= 1 \\ x + 2y \quad &= k \end{aligned}\right\}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & k & 1 \\ 1 & 2 & 0 & k \end{array}\right) \to$ $\begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ 3^a - 1^a \end{array}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & k & 1 \\ 0 & 1 & -1 & k-1 \end{array}\right) \to$

$\to$ $\begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ 3^a - 2^a \end{array}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & k & 1 \\ 0 & 0 & -1-k & k-2 \end{array}\right)$

- *Si* $k = -1$, queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right) \text{ Sistema } \textit{incompatible.}$$

- Si $k \neq -1$, és *compatible determinat.* El resolem:

$$\left.\begin{aligned} x + y \quad + z &= 1 \\ y \quad + kz &= 1 \\ (-1-k)z &= k - 2 \end{aligned}\right\}$$

$$z = \frac{k-2}{-1-k} = \frac{2-k}{1+k}$$

$$y + k\left(\frac{2-k}{1+k}\right) = 1 \quad \to \quad y = 1 - \frac{2k-k^2}{1+k} = \frac{1+k-2k+k^2}{1+k} = \frac{1-k+k^2}{1+k}$$

$$x = 1 - y - z = 1 - \frac{1-k+k^2}{1+k} - \frac{2-k}{1+k} = \frac{1+k-1+k-k^2-2+k}{1+k} =$$

$$= \frac{-2+3k-k^2}{1+k}$$

Solució: $x = \dfrac{-2+3k-k^2}{1+k}, \quad y = \dfrac{1-k+k^2}{1+k}, \quad z = \dfrac{2-k}{1+k}$

Pàgina 24

EXERCICIS I PROBLEMES PROPOSATS

PER PRACTICAR

1 **Troba, si existeix, la solució dels sistemes següents i interpreta'ls gràficament:**

a) $\begin{cases} 3x + y = 2 \\ x - y = 1 \\ 5x - y = 4 \\ 2x + 2y = 1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x - y = 3 \\ 5x + y = 8 \end{cases}$

Els resolem pel mètode de Gauss:

a) $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 5 & -1 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \begin{array}{l} 1^a - 3 \cdot 2^a \\ 2^a \\ 3^a - 5 \cdot 2^a \\ 4^a - 2 \cdot 2^a \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \end{array}\right)$

Podem prescindir de les dues últimes files, ja que coincideixen amb la primera. Quedaria:

$$4y = -1 \quad \longrightarrow \quad y = \frac{-1}{4}$$

$$x - y = 1 \quad \longrightarrow \quad x = 1 + y = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Solució: $\left(\frac{3}{4}, \frac{-1}{4}\right)$

El sistema representa quatre rectes que es tallen en el punt $\left(\frac{3}{4}, \frac{-1}{4}\right)$.

b) $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 5 & 1 & 8 \end{array}\right) \longrightarrow \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a - 2 \cdot 1^a \\ 3^a - 5 \cdot 1^a \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & 1 \\ 0 & -9 & 3 \end{array}\right)$

De la 2.ª equació, obtenim $y = \frac{-1}{5}$; de la 3.ª equació, obtenim $y = \frac{-1}{3}$.

Per tant, el sistema és *incompatible*.

El sistema representa tres rectes que es tallen dues a dues, però no hi ha cap punt comú a les tres.

2 **Comprova que aquest sistema és incompatible i raona quina és la posició relativa de les tres rectes que representa:**

$$\left\{\begin{array}{rl} x + 2y &= 5 \\ 3x - y &= 1 \\ 2x + 4y &= 0 \end{array}\right.$$

Si dividim la 3.ª equació entre 2, obtenim: $x + 2y = 0$. La 1.ª equació és $x + 2y = 5$. Són contradictòries, així doncs el sistema és *incompatible*.

La 1.ª i la 3.ª equacions representen dues rectes paral·leles; la 2.ª les talla.

3 **Resol i interpreta geomètricament el sistema:**

$$\left\{\begin{array}{rl} -x + 2y &= 0 \\ 2x + y &= -1 \\ (3/2)x - 3y &= 0 \end{array}\right.$$

$\left(\begin{array}{ccc} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3/2 & -3 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a + 2 \cdot 1^a \\ (2/3) \cdot 3^a \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ 3^a + 1^a \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$$\left.\begin{array}{r} -x + 2y = 0 \\ 5y = -1 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x = 2y = \dfrac{-2}{5} \\ y = \dfrac{-1}{5} \end{array}\right\}$$

Solució: $\left(\dfrac{-2}{5}, \dfrac{-1}{5}\right)$

Geomètricament, són tres rectes que es tallen en el punt $\left(\dfrac{-2}{5}, \dfrac{-1}{5}\right)$.

4 **Resol els sistemes següents però reconeix prèviament que són escalonats:**

a) $\begin{cases} 2x - y = 7 \\ 11y = -69 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} -y + z = 1 \\ 9z = 2 \\ 3x - y + z = 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y - t = 2 \\ y + z = 4 \\ y + t - z = 1 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} 2x - 3y + z = 0 \\ 3x - y = 0 \\ 2y = 1 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{r} 2x - y = 7 \\ 11y = -69 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} y = \dfrac{-69}{11} \\ x = \dfrac{7 + y}{2} = \dfrac{4}{11} \end{array}\right\}$

Solució: $\left(\dfrac{4}{11}, \dfrac{-69}{11}\right)$

b) $\left.\begin{array}{r} -y + z = 1 \\ 9z = 2 \\ 3x - y + z = 3 \end{array}\right\} \quad z = \dfrac{2}{9} \qquad y = z - 1 = \dfrac{-7}{9} \qquad x = \dfrac{3 + y - z}{3} = \dfrac{2}{3}$

Solució: $\left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{-7}{9}, \dfrac{2}{9}\right)$

c) $\left.\begin{array}{r} x + y - t = 2 \\ y + z = 4 \\ y + t - z = 1 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} z = \lambda \\ y = 4 - z \\ t = 1 - y + z = 1 - (4 - z) + z = -3 + 2z \\ x = 2 - y + t = 2 - (4 - z) - 3 + 2z = -5 + 3z \end{array}$

Solucions: $(-5 + 3\lambda,\ 4 - \lambda,\ \lambda,\ -3 + 2\lambda)$

d) $\left.\begin{array}{r} 2x - 3y + z = 0 \\ 3x - y = 0 \\ 2y = 1 \end{array}\right\} \quad y = \dfrac{1}{2} \qquad x = \dfrac{y}{3} = \dfrac{1}{6} \qquad z = -2x + 3y = \dfrac{7}{6}$

Solució: $\left(\dfrac{1}{6}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{7}{6}\right)$

5 **Resol aquests sistemes d'equacions lineals:**

a) $\begin{cases} 2x + 5y = 16 \\ x + 3y - 2z = -2 \\ x + z = 4 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 3x + 2y + z = 1 \\ 5x + 3y + 3z = 3 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$

a) $$\left.\begin{array}{l} 2x + 5y = 16 \\ x + 3y - 2z = -2 \\ x + z = 4 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & 0 & 16 \\ 1 & 3 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \to \xrightarrow{\begin{smallmatrix} 1^a \\ 2^a + 2 \cdot 3^a \\ 3^a \end{smallmatrix}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & 0 & 16 \\ 3 & 3 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \to$$

$$\to \xrightarrow{\begin{smallmatrix} 1^a \\ 2^a : 3 \\ 3^a \end{smallmatrix}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & 0 & 16 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \to \xrightarrow{\begin{smallmatrix} 1^a - 5 \cdot 2^a \\ 2^a \\ 3^a \end{smallmatrix}} \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 0 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left.\begin{array}{l} -3x = 6 \\ x + y = 2 \\ x + z = 4 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = -2 \\ y = 2 - x = 4 \\ z = 4 - x = 6 \end{array}$$

Solució: $(-2, 4, 6)$

b) $$\left.\begin{array}{l} 3x + 2y + z = 1 \\ 5x + 3y + 3z = 3 \\ x + y + z = 0 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \xrightarrow{\begin{smallmatrix} 3^a \\ 2^a \\ 1^a \end{smallmatrix}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\to \xrightarrow{\begin{smallmatrix} 1^a \\ 2^a - 5 \cdot 1^a \\ 3^a - 3 \cdot 1^a \end{smallmatrix}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right) \to \xrightarrow{\begin{smallmatrix} 1^a \\ 2^a \\ -2 \cdot 3^a + 2^a \end{smallmatrix}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left.\begin{array}{r} x + y + z = 0 \\ -2y - 2z = 3 \\ 2z = 1 \end{array}\right\} \quad z = \frac{1}{2} \qquad y = \frac{3 + 2z}{-2} = -2 \qquad x = -y - z = \frac{3}{2}$$

Solució: $\left(\frac{3}{2}, -2, \frac{1}{2}\right)$

6 **Transforma en escalonats i resol els sistemes següents:**

a) $\begin{cases} 2x - y = 7 \\ 5x + 3y = -17 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} -y + z = 1 \\ x - 2y - z = 2 \\ 3x - y + z = 3 \end{cases}$

a) $$\left.\begin{array}{l} 2x - y = 7 \\ 5x + 3y = -17 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 7 \\ 5 & 3 & -17 \end{array}\right) \to \xrightarrow{\begin{smallmatrix} 1^a \\ 2^a + 3 \cdot 1^a \end{smallmatrix}} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 7 \\ 11 & 0 & 4 \end{array}\right) \to \left.\begin{array}{l} 2x - y = 7 \\ 11x = 4 \end{array}\right\}$$

$$x = \frac{4}{11} \qquad y = 2x - 7 = \frac{-69}{11}$$

Solució: $\left(\dfrac{4}{11}, \dfrac{-69}{11}\right)$

b) $\left.\begin{aligned} -y + z &= 1 \\ x - 2y - z &= 2 \\ 3x - y + z &= 3 \end{aligned}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right) \to \xrightarrow{\begin{subarray}{l} 2^a \\ 1^a \\ 3^a \end{subarray}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right) \to$

$\to \xrightarrow{\begin{subarray}{l} 1^a \\ 2^a \\ 3^a - 3 \cdot 1^a \end{subarray}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 4 & -3 \end{array}\right) \to \xrightarrow{\begin{subarray}{l} 1^a \\ 2^a \\ 3^a + 5 \cdot 2^a \end{subarray}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 9 & 2 \end{array}\right) \to$

$\to \left.\begin{aligned} x - 2y - z &= 2 \\ -y + z &= 1 \\ 9z &= 2 \end{aligned}\right\} \quad z = \dfrac{2}{9} \qquad y = z - 1 = \dfrac{-7}{9} \qquad x = 2 + 2y + z = \dfrac{2}{3}$

Solució: $\left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{-7}{9}, \dfrac{2}{9}\right)$

7 **Resol:**

a) $\left\{\begin{aligned} \boldsymbol{x + y - z} &\boldsymbol{= 1} \\ \boldsymbol{3x + 2y + z} &\boldsymbol{= 1} \\ \boldsymbol{5x + 3y + 3z} &\boldsymbol{= 1} \end{aligned}\right.$ **b)** $\left\{\begin{aligned} \boldsymbol{3x + 4y - z} &\boldsymbol{= 3} \\ \boldsymbol{6x - 6y + 2z} &\boldsymbol{= -16} \\ \boldsymbol{x - y + 2z} &\boldsymbol{= -6} \end{aligned}\right.$

a) $\left.\begin{aligned} x + y - z &= 1 \\ 3x + 2y + z &= 1 \\ 5x + 3y + 3z &= 1 \end{aligned}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 3 & 1 \end{array}\right) \to \xrightarrow{\begin{subarray}{l} 1^a \\ 2^a - 3 \cdot 1^a \\ 3^a - 5 \cdot 1^a \end{subarray}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 8 & -4 \end{array}\right) \to$

$\to \xrightarrow{\begin{subarray}{l} 1^a \\ 2^a \\ 3^a - 2 \cdot 2^a \end{subarray}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left.\begin{aligned} x + y - z &= 1 \\ -y + 4z &= -2 \end{aligned}\right\}$

$y = 4z + 2$
$x = 1 - y + z = 1 - (4z + 2) + z = -1 - 3z$
$z = \lambda$

Solucions: $(-1 - 3\lambda,\ 2 + 4\lambda,\ \lambda)$

b) $\left.\begin{aligned} 3x + 4y - z &= 3 \\ 6x - 6y + 2z &= -16 \\ x - y + 2z &= -6 \end{aligned}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & -1 & 3 \\ 6 & -6 & 2 & -16 \\ 1 & -1 & 2 & -6 \end{array}\right) \to \xrightarrow{\begin{subarray}{l} 3^a \\ 2^a : 2 \\ 1^a \end{subarray}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -6 \\ 3 & -3 & 1 & -8 \\ 3 & 4 & -1 & 3 \end{array}\right) \to$

$\to \xrightarrow{\begin{subarray}{l} 1^a \\ 2^a - 3 \cdot 1^a \\ 3^a - 3 \cdot 1^a \end{subarray}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & -5 & 10 \\ 0 & 7 & -7 & 21 \end{array}\right) \to \xrightarrow{\begin{subarray}{l} 1^a \\ 2^a : (-5) \\ 3^a : 7 \end{subarray}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right) \to$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{r} x - y + 2z = -6 \\ z = -2 \\ y - \quad z = \quad 3 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y = 3 + z = 3 - 2 = 1 \\ x = -6 + y - 2z = -6 + 1 + 4 = -1 \end{array}$$

Solució: (–1, 1, –2)

8 **Raona si aquests sistemes tenen solució i interpreta'ls geomètricament:**

a) $\left\{\begin{array}{l} x + 2y - z = 3 \\ 2x + 4y - 2z = 1 \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{l} -x + 3y + 6z = 3 \\ 2/3x - 2y - 4z = 2 \end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{r} x + 2y - \quad z = 3 \\ 2x + 4y - 2z = 1 \end{array}\right\}$ Si dividim la 2.ª equació entre 2, obtenim:

$x + 2y - z = \dfrac{1}{2}$, que contradiu la 1.ª.

El sistema és *incompatible*. Són dos plans paral·lels.

b) $\left.\begin{array}{r} -x + 3y + 6z = 3 \\ (2/3x) - 2y - 4z = 2 \end{array}\right\}$ Si multipliquem per $-\dfrac{2}{3}$ la 1.ª equació, obtenim:

$\dfrac{2}{3}x - 2y - 4z = -2$, que contradiu la 2.ª equació.

El sistema és *incompatible*. Són dos plans paral·lels.

9 **Resol, si és possible, els sistemes següents:**

a) $\left\{\begin{array}{l} x + 2y + z = 9 \\ x - y - z = -10 \\ 2x - y + z = 5 \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{l} x + 2y + z = 3 \\ 2x - y + z = -1 \end{array}\right.$

c) $\left\{\begin{array}{l} -x + 2y - z = 1 \\ 2x - 4y + 2z = 3 \\ x + y + z = 2 \end{array}\right.$ **d)** $\left\{\begin{array}{l} 2x - 3y + z = 0 \\ 3x - y \qquad = 0 \\ 4x + y - z = 0 \end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{r} x + 2y + z = 9 \\ x - y - z = -10 \\ 2x - y + z = 5 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 9 \\ 1 & -1 & -1 & -10 \\ 2 & -1 & 1 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l} 1^a \\ -2^a + 1^a \\ 3^a - 2 \cdot 1^a \end{array}} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & 3 & 2 & 19 \\ 0 & -5 & -1 & -13 \end{array}\right) \rightarrow$

$\rightarrow \xrightarrow{\begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ 2^a + 2 \cdot 3^a \end{array}} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & 3 & 2 & 19 \\ 0 & -7 & 0 & -7 \end{array}\right) \rightarrow \left.\begin{array}{r} x + 2y + \quad z = 9 \\ 3y + 2z = 19 \\ -7y \qquad = -7 \end{array}\right\}$

$y = 1$ $\quad z = \dfrac{19 - 3y}{2} = 8$ $\quad x = 9 - 2y - z = -1$

Solució: (–1, 1, 8)

b) $\left.\begin{array}{l} x + 2y + z = 3 \\ 2x - y + z = -1 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right) \to \xrightarrow{\substack{1^a \\ -2^a + 2\cdot 1^a}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 1 & 7 \end{array}\right) \to$

$$\to \left.\begin{array}{r} x + 2y = 3 - z \\ 5y = 7 - z \end{array}\right\} \begin{array}{l} y = \dfrac{7}{5} - \dfrac{z}{5} \\[2ex] x = 3 - z - 2y = 3 - z - \dfrac{14}{5} + \dfrac{2z}{5} = \dfrac{1}{5} - \dfrac{3z}{5} \end{array}$$

Si fem $z = 5\lambda$, les solucions són: $\left(\dfrac{1}{5} - 3\lambda,\ \dfrac{7}{5} - \lambda,\ 5\lambda\right)$

c) $\left.\begin{array}{l} -x + 2y - z = 1 \\ 2x - 4y + 2z = 3 \\ x + y + z = 2 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \to \xrightarrow{\substack{3^a \\ 2^a \\ 1^a}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -4 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right) \to$

$$\to \xrightarrow{\substack{1^a \\ 2^a - 2\cdot 1^a \\ 3^a + 1^a}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -6 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \end{array}\right) \to \xrightarrow{\substack{1^a \\ 2^a + 2\cdot 3^a \\ 3^a}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

La segona equació és impossible: $0x + 0y + 0z = 5$.

El sistema és *incompatible*.

d) $\left.\begin{array}{l} 2x - 3y + z = 0 \\ 3x - y = 0 \\ 4x + y - z = 0 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \to \xrightarrow{\substack{1^a \\ 2^a \\ 3^a + 1^a}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 6 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right) \to$

$$\to \xrightarrow{\substack{1^a \\ 2^a \\ 3^a - 2\cdot 2^a}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left.\begin{array}{l} 2x - 3y + z = 0 \\ 3x - y = 0 \end{array}\right\}$$

$y = 3x$
$z = -2x + 3y = -2x + 9x = 7x$
$x = \lambda$

Solucions: $(\lambda, 3\lambda, 7\lambda)$

10 **Resol pel mètode de Gauss.**

a) $\left\{\begin{array}{l} x + 2z = 11 \\ x + y = 3 \\ y + z = 13 \\ x + y + z = 10 \end{array}\right.$

b) $\left\{\begin{array}{l} x + y + z + t = 1 \\ x - y + z - t = 0 \\ x + y - z - t = -1 \\ x + y + z - t = 2 \end{array}\right.$

c) $\left\{\begin{array}{l} 2x + y + 3z = 0 \\ 4x + 2y - z = 0 \\ 6x + 3y + 2z = 0 \end{array}\right.$

d) $\left\{\begin{array}{l} x - 3y - z = -1 \\ x + 5y + 3z = 3 \\ x + y + z = 1 \\ 3x + 7y + 5z = 5 \end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{l} x \qquad + 2z = 11 \\ x + y \qquad = \ \ 3 \\ \quad\ y + \ z = 13 \\ x + y + \ z = 10 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 11 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 13 \\ 1 & 1 & 1 & 10 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 1^{\text{a}} \\ 2^{\text{a}} - 1^{\text{a}} \\ 3^{\text{a}} \\ 4^{\text{a}} - 1^{\text{a}} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 11 \\ 0 & 1 & -2 & -8 \\ 0 & 1 & 1 & 13 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \to$

$\to \begin{array}{l} 1^{\text{a}} \\ 2^{\text{a}} \\ 3^{\text{a}} - 2^{\text{a}} \\ 4^{\text{a}} - 2^{\text{a}} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 11 \\ 0 & 1 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & 3 & 21 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 1^{\text{a}} \\ 2^{\text{a}} \\ 3^{\text{a}} - 3 \cdot 4^{\text{a}} \\ 4^{\text{a}} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 11 \\ 0 & 1 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{array}\right) \to$

$\to \left.\begin{array}{r} x \qquad + 2z = 11 \\ y - 2z = -8 \\ z = \ \ 7 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} y = -8 + 2z = -8 + 14 = 6 \\ x = 11 - 2z = 11 - 14 = -3 \end{array}\right\}$

Solució: $(-3, 6, 7)$

b) $\left.\begin{array}{l} x + y + z + t = \ \ 1 \\ x - y + z - t = \ \ 0 \\ x + y - z - t = -1 \\ x + y + z - t = \ \ 2 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 1^{\text{a}} \\ 2^{\text{a}} - 1^{\text{a}} \\ 3^{\text{a}} - 1^{\text{a}} \\ 4^{\text{a}} - 1^{\text{a}} \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \to$

$\left.\begin{array}{r} x + y + z + \ t = \ \ 1 \\ -2y \qquad - 2t = -1 \\ z + \ t = \ \ 1 \\ -2t = \ \ 1 \end{array}\right\}$

$t = -\dfrac{1}{2} \qquad z = 1 - t = 1 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2} \qquad y = \dfrac{2t - 1}{-2} = 1 \qquad x = 1 - y - z - t = -1$

Solució: $\left(-1, 1, \dfrac{3}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$

c) $\left.\begin{array}{l} 2x + \ \ y + 3z = 0 \\ 4x + 2y - \ \ z = 0 \\ 6x + 3y + 2z = 0 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & -1 & 0 \\ 6 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 1^{\text{a}} \\ 2^{\text{a}} - 2 \cdot 1^{\text{a}} \\ 3^{\text{a}} - 3 \cdot 1^{\text{a}} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 0 \end{array}\right) \to$

$\to \left.\begin{array}{r} 2x + y + 3z = 0 \\ -7z = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} z = 0 \\ y = -2x \\ x = \lambda \end{array}\right\}$ *Solucions:* $(\lambda, -2\lambda, 0)$

d) $\left.\begin{array}{l} x - 3y - \ \ z = -1 \\ x + 5y + 3z = \ \ 3 \\ x + \ \ y + \ \ z = \ \ 1 \\ 3x + 7y + 5z = \ \ 5 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -1 & -1 \\ 1 & 5 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 5 & 5 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 3^{\text{a}} \\ 2^{\text{a}} \\ 1^{\text{a}} \\ 4^{\text{a}} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 3 & 3 \\ 1 & -3 & -1 & -1 \\ 3 & 7 & 5 & 5 \end{array}\right) \to$

$\rightarrow \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a - 1^a \\ 3^a - 1^a \\ 4^a - 3 \cdot 1^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & -4 & -2 & -2 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a : 2 \\ 3^a + 2^a \\ 4^a - 2^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{r} x + y + z = 1 \\ 2y + z = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} z = 1 - 2y \\ x = 1 - y - z = 1 - y - 1 + 2y = y \\ y = \lambda \end{array}$$

Solucions: $(\lambda,\ \lambda,\ 1 - 2\lambda)$

11 **Classifica els sistemes següents en compatibles o incompatibles:**

a) $\left\{\begin{array}{r} x + y + z = 3 \\ x + y - z = 3 \\ z = 0 \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{r} x + y + z = 3 \\ 2x - y + z = 2 \\ x - y + z = 1 \end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{r} x + y + z = 3 \\ x + y - z = 3 \\ z = 0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x + y = 3 \\ x + y = 3 \\ z = 0 \end{array}\right\}$ *Compatible indeterminat.*

b) $\left.\begin{array}{r} x + y + z = 3 \\ 2x - y + z = 2 \\ x - y + z = 1 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a - 2 \cdot 1^a \\ 3^a - 1^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & -4 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \end{array}\right) \rightarrow$

$\rightarrow$ *Compatible determinat.*

PER RESOLDRE

12 **Estudia els sistemes següents i resol-los pel mètode de Gauss:**

a) $\left\{\begin{array}{r} x - 2y - 3z = 1 \\ x - 4y - 5z = 1 \\ -2x + 2y + 4z = -2 \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{r} 2x - 3y + z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \\ 4x + y - z = 0 \end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{r} x - 2y - 3z = 1 \\ x - 4y - 5z = 1 \\ -2x + 2y + 4z = -2 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 1 \\ 1 & -4 & -5 & 1 \\ -2 & 2 & 4 & -2 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a - 1^a \\ 3^a : 2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right) \rightarrow$

$\rightarrow \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a : (-2) \\ 3^a + 1^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ 3^a + 2^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Sistema *compatible indeterminat.* El resolem:

$$\left.\begin{array}{r} x - 2y - 3z = 1 \\ y - z = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x - 2y = 1 + 3z \rightarrow x = 1 + 3z + 2y = 1 + 3z - 2z = 1 + z \\ y = -z \end{array}$$

Solució: $(1 + \lambda, -\lambda, \lambda)$

b) $\left.\begin{array}{r} 2x - 3y + z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \\ 4x + y - z = 0 \end{array}\right\}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a + 1^a \\ 3^a + 1^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 6 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right) \to$

$\to \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ 3^a - 2 \cdot 2^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to$ Sistema *compatible indeterminat.*

El resolem: $\left.\begin{array}{l} 2x - 3y + z = 0 \\ 3x - y = 0 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} y = 3x \\ z = -2x + 3y = -2x + 9x = 7x \\ x = \lambda \end{array}$

Solucions: $(\lambda,\ 3\lambda,\ 7\lambda)$

Pàgina 25

13 **Estudia i resol aquests sistemes pel mètode de Gauss:**

a) $\left\{\begin{array}{l} -x + y + 3z = -2 \\ 4x + 2y - z = 5 \\ 2x + 4y - 7z = 1 \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{l} y + z = -1 \\ x - y = 1 \\ x + 2y + 3z = -2 \end{array}\right.$

c) $\left\{\begin{array}{l} 5x + 2y + 3z = 4 \\ 2x + 2y + z = 3 \\ x - 2y + 2z = -3 \end{array}\right.$ **d)** $\left\{\begin{array}{l} x - y + 3z - 14t = 0 \\ 2x - 2y + 3z + t = 0 \\ 3x - 3y + 5z + 6t = 0 \end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{r} -x + y + 3z = -2 \\ 4x + 2y - z = 5 \\ 2x + 4y - 7z = 1 \end{array}\right\}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 3 & -2 \\ 4 & 2 & -1 & 5 \\ 2 & 4 & -7 & 1 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a + 4 \cdot 1^a \\ 3^a + 2 \cdot 1^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 6 & 11 & -3 \\ 0 & 6 & -1 & -3 \end{array}\right) \to$

$\to \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ 3^a - 2^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 6 & 11 & -3 \\ 0 & 0 & -12 & 0 \end{array}\right) \to$ Sistema *compatible determinat.*

El resolem: $\left.\begin{array}{r} -x + y + 3z = -2 \\ 6y + 11z = -3 \\ z = 0 \end{array}\right\}$ $y = -\dfrac{1}{2}$ $\quad x = y + 3z + 2 = \dfrac{3}{2}$

Solució: $\left(\dfrac{3}{2}, -\dfrac{1}{2}, 0\right)$

b) $\left.\begin{array}{r} y + z = -1 \\ x - y = 1 \\ x + 2y + 3z = -2 \end{array}\right\}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 2^a \\ 1^a \\ 3^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \end{array}\right) \to$

$\to \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ 3^a - 1^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 3 & -3 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ 3^a - 3 \cdot 2^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Sistema *compatible determinat*. El resolem:

$$\left.\begin{array}{r} x - y \qquad = \ \ 1 \\ y + z = -1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 1 + y \\ z = -1 - y \\ y = \lambda \end{array}$$

Solucions: $(1 + \lambda,\ \lambda,\ -1 - \lambda)$

c) $$\left.\begin{array}{r} 5x + 2y + 3z = 4 \\ 2x + 2y + z = 3 \\ x - 2y + 2z = -3 \end{array}\right\} \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 & | & 4 \\ 2 & 2 & 1 & | & 3 \\ 1 & -2 & 2 & | & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l} 3^a \\ 2^a \\ 1^a \end{array}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & | & -3 \\ 2 & 2 & 1 & | & 3 \\ 5 & 2 & 3 & | & 4 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \xrightarrow{\begin{array}{l} 1^a \\ 2^a - 2 \cdot 1^a \\ 3^a - 5 \cdot 1^a \end{array}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & | & -3 \\ 0 & 6 & -3 & | & 9 \\ 0 & 12 & -7 & | & 19 \end{pmatrix} \to \xrightarrow{\begin{array}{l} 1^a \\ 2^a : 3 \\ 3^a - 2 \cdot 2^a \end{array}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & | & -3 \\ 0 & 2 & -1 & | & 3 \\ 0 & 0 & -1 & | & 1 \end{pmatrix}$$

Sistema *compatible determinat.* El resolem:

$$\left.\begin{array}{r} x - 2y + 2z = -3 \\ 2y - z = 3 \\ -z = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} z = -1 \\ y = 1 \\ x = -3 + 2y - 2z = 1 \end{array}$$

Solució: $(1, 1, -1)$

d) $$\left.\begin{array}{r} x - y + 3z - 14t = 0 \\ 2x - 2y + 3z + t = 0 \\ 3x - 3y + 5z + 6t = 0 \end{array}\right\} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -14 & | & 0 \\ 2 & -2 & 3 & 1 & | & 0 \\ 3 & -3 & 5 & 6 & | & 0 \end{pmatrix} \to \xrightarrow{\begin{array}{l} 1^a \\ 2^a - 2 \cdot 1^a \\ 3^a - 3 \cdot 1^a \end{array}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -14 & | & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 29 & | & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 48 & | & 0 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \xrightarrow{\begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ -4 \cdot 2^a + 3 \cdot 3^a \end{array}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -14 & | & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 29 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 28 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Sistema *compatible indeterminat.* El resolem:

$$\left.\begin{array}{r} x - y + 3z - 14t = 0 \\ -3z + 29t = 0 \\ 28t = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} t = 0 \\ z = 0 \\ x = y \\ y = \lambda \end{array}$$

Solucions: $(\lambda, \lambda, 0, 0)$

14 **Discuteix els següents sistemes d'equacions:**

a) $\left\{\begin{array}{r} x - y - z = k \\ x - y + 2z = 1 \\ 2x + y + kz = 0 \end{array}\right.$

b) $\left\{\begin{array}{r} x + y - z = 0 \\ x + 3y + z = 0 \\ 3x + ay + 4z = 0 \end{array}\right.$

c) $\left\{\begin{array}{r} x - 2y + z = 1 \\ mx + y - z = 1 \\ 3x + 4y - 2z = -3 \end{array}\right.$

d) $\left\{\begin{array}{r} 3x + 2y + az = 1 \\ 5x + 3y + 3z = 2 \\ x + y - z = 1 \end{array}\right.$

a) $$\left.\begin{array}{r} x-y-z=k\\ x-y+2z=1\\ 2x+y+kz=0\end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&-1&k\\1&-1&2&1\\2&1&k&0\end{array}\right) \to \begin{array}{l}1^a\\2^a-1^a\\3^a-2\cdot 1^a\end{array} \left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&-1&k\\0&0&3&1-k\\0&3&k+2&-2k\end{array}\right)$$

Sistema *compatible determinat* per a tot k.

b) $$\left.\begin{array}{r} x+y-z=0\\ x+3y+z=0\\ 3x+ay+4z=0\end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&0\\1&3&1&0\\3&a&4&0\end{array}\right) \to \begin{array}{l}1^a\\2^a-1^a\\3^a-3\cdot 1^a\end{array} \left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&0\\0&2&2&0\\0&a-3&7&0\end{array}\right) \to$$

$$\to \begin{array}{l}1^a\\2^a:2\\3^a\end{array} \left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&0\\0&1&1&0\\0&a-3&7&0\end{array}\right) \to \begin{array}{l}1^a\\2^a\\3^a-7\cdot 2^a\end{array} \left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&0\\0&1&1&0\\0&a-10&0&0\end{array}\right)$$

- Si $a=10$ $\to$ Sistema *compatible indeterminat*
- Si $a \neq 10$ $\to$ Sistema *compatible determinat*

c) $$\left.\begin{array}{r} x-2y+z=1\\ mx+y-z=1\\ 3x+4y-2z=-3\end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c}1&-2&1&1\\m&1&-1&1\\3&4&-2&-3\end{array}\right) \to \begin{array}{l}1^a\\3^a\\2^a\end{array} \left(\begin{array}{ccc|c}1&-2&1&1\\3&4&-2&-3\\m&1&-1&1\end{array}\right) \to$$

$$\to \begin{array}{l}1^a\\2^a+2\cdot 1^a\\3^a+1^a\end{array} \left(\begin{array}{ccc|c}1&-2&1&1\\5&0&0&-1\\m+1&-1&0&2\end{array}\right)$$

Compatible determinat per a tot m.

d) $$\left.\begin{array}{r} 3x+2y+az=1\\ 5x+3y+3z=2\\ x+y-z=1\end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c}3&2&a&1\\5&3&3&2\\1&1&-1&1\end{array}\right) \to \begin{array}{l}3^a\\2^a\\1^a\end{array} \left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&1\\5&3&3&2\\3&2&a&1\end{array}\right) \to$$

$$\to \begin{array}{l}1^a\\2^a-5\cdot 1^a\\3^a-3\cdot 1^a\end{array} \left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&1\\0&-2&8&-3\\0&-1&a+3&-2\end{array}\right) \to \begin{array}{l}1^a\\2^a\\-2\cdot 3^a+2^a\end{array} \left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&1\\0&-2&8&-3\\0&0&2-2a&1\end{array}\right)$$

$2-2a=0 \to a=1$

- Si $a=1$ $\to$ Sistema *incompatible*
- Si $a \neq 1$ $\to$ Sistema *compatible determinat*

15 **Discuteix els sistemes següents i resol-los quan sigui possible:**

a) $\left\{\begin{array}{l} 2x-y=4\\ -x+y/2=-2\\ x+ky=2\end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{l} 2x+y-z=1\\ x-2y+z=3\\ 5x-5y+2z=m\end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{l} 2x - y = 4 \\ -x + y/2 = -2 \\ x + ky = 2 \end{array}\right\} \begin{pmatrix} 2 & -1 & | & 4 \\ -1 & 1/2 & | & -2 \\ 1 & k & | & 2 \end{pmatrix} \to \begin{array}{l} 1^a \\ 2 \cdot 2^a + 1^a \\ 2 \cdot 3^a - 1^a \end{array} \begin{pmatrix} 2 & -1 & | & 4 \\ 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 2k+1 & | & 0 \end{pmatrix}$

- Si $k = -\dfrac{1}{2} \to$ Sistema *compatible indeterminat*. El resolem:

$2x - y = 4 \to \begin{cases} y = 2x - 4 \\ x = \lambda \end{cases}$ *Solucions:* $(\lambda, 2\lambda - 4)$

- Si $k \neq -\dfrac{1}{2} \to$ Sistema *compatible determinat*.

$\left.\begin{array}{r} 2x - \quad y = 4 \\ (2k+1)y = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y = 0 \\ x = 2 \end{array}$

Solució: $(2, 0)$

b) $\left.\begin{array}{l} 2x + y - z = 1 \\ x - 2y + z = 3 \\ 5x - 5y + 2z = m \end{array}\right\} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & | & 1 \\ 1 & -2 & 1 & | & 3 \\ 5 & -5 & 2 & | & m \end{pmatrix} \to \begin{array}{l} 2^a \\ 1^a \\ 3^a \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & | & 3 \\ 2 & 1 & -1 & | & 1 \\ 5 & -5 & 2 & | & m \end{pmatrix} \to$

$\to \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a - 2 \cdot 1^a \\ 3^a - 5 \cdot 1^a \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & | & 3 \\ 0 & 5 & -3 & | & -5 \\ 0 & 5 & -3 & | & m - 15 \end{pmatrix} \to \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ 3^a - 2^a \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & | & 3 \\ 0 & 5 & -3 & | & -5 \\ 0 & 0 & 0 & | & m - 10 \end{pmatrix}$

- Si $m = 10 \to$ Sistema *compatible indeterminat*. El resolem:

$\left.\begin{array}{r} x - 2y + z = 3 \\ 5y - 3z = -5 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y = \dfrac{-5 + 3z}{5} = -1 + \dfrac{3z}{5} \\ x = 3 + 2y - z = 3 - 2 + \dfrac{6z}{5} - z = 1 + \dfrac{z}{5} \end{array}$

Fent $z = 5\lambda$.

Solucions: $(1 + \lambda, -1 + 3\lambda, 5\lambda)$

- Si $m \neq 10 \to$ *Incompatible*

16 **Resol pel mètode de Gauss el sistema següent i interpreta'l geomètricament:**

$$\begin{cases} x - 3y - z = -1 \\ x + 5y + 3z = 3 \\ x + y + z = 1 \\ 3x + 7y + 5z = 5 \end{cases}$$

$\left.\begin{array}{l} x - 3y - z = -1 \\ x + 5y + 3z = 3 \\ x + y + z = 1 \\ 3x + 7y + 5z = 5 \end{array}\right\} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & | & -1 \\ 1 & 5 & 3 & | & 3 \\ 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 3 & 7 & 5 & | & 5 \end{pmatrix} \to \begin{array}{l} 3^a \\ 2^a \\ 1^a \\ 4^a \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 1 & 5 & 3 & | & 3 \\ 1 & -3 & -1 & | & -1 \\ 3 & 7 & 5 & | & 5 \end{pmatrix} \to$

$$\rightarrow \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a - 1^a \\ 3^a - 1^a \\ 4^a - 3 \cdot 1^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & -4 & -2 & -2 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a : 2 \\ 3^a + 2^a \\ 4^a - 2^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{r} x + y + z = 1 \\ 2y + z = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} z = 1 - 2y \\ x = 1 - y - z = y \\ y = \lambda \end{array}$$

Solucions: $(\lambda, \lambda, 1 - 2\lambda)$. Són quatre plans amb una recta en comú.

17 **Resol cada un dels sistemes següents per als valors de *m* que el fan compatible:**

a) $\left\{\begin{array}{l} x + 2y = 3 \\ 2x - y = 1 \\ 4x + 3y = m \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{l} x - y - 2z = 2 \\ 2x + y + 3z = 1 \\ 3x + z = 3 \\ x + 2y + 5z = m \end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{r} x + 2y = 3 \\ 2x - y = 1 \\ 4x + 3y = m \end{array}\right\} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & m \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a - 2 \cdot 1^a \\ 3^a - 4 \cdot 1^a \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & -5 & m - 12 \end{array}\right) \rightarrow$

$$\rightarrow \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a : (-5) \\ 3^a - 2^a \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & m - 7 \end{array}\right)$$

- Si $m = 7 \rightarrow$ Sistema *compatible determinat*

$$\left.\begin{array}{r} x + 2y = 3 \\ y = 1 \end{array}\right\} x = 3 - 2y = 1$$

Solució: (1, 1)

- Si $m \neq 7 \rightarrow$ Sistema *incompatible*

b) $\left.\begin{array}{r} x - y - 2z = 2 \\ 2x + y + 3z = 1 \\ 3x + z = 3 \\ x + 2y + 5z = m \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & m \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a - 2 \cdot 1^a \\ 3^a - 3 \cdot 1^a \\ 4^a - 1^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 7 & -3 \\ 0 & 3 & 7 & -3 \\ 0 & 3 & 7 & m - 2 \end{array}\right) \rightarrow$

$$\rightarrow \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ 3^a - 2^a \\ 4^a - 2^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 7 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m + 1 \end{array}\right)$$

- Si $m = -1 \rightarrow$ Sistema *compatible indeterminat*

$$\left.\begin{array}{r} x - \ \ y - 2z = \ \ 2 \\ 3y + 7z = -3 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y = \dfrac{-3-7z}{3} = -1 - \dfrac{7z}{3} \\[2ex] x = 2 + y + 2z = 2 - 1 - \dfrac{7z}{3} + 2z = 1 - \dfrac{z}{3} \end{array}$$

Fent $z = 3\lambda$:

Solucions: $(1 - \lambda, -1 - 7\lambda, 3\lambda)$

- Si $m \neq -1 \ \to$ Sistema *incompatible*

18 **Discuteix i resol en funció del paràmetre:**

a) $\left\{\begin{array}{l} -x + my + z = 2 \\ 2x - y + 2z = 0 \\ -x \qquad\quad - 3z = -2 \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{l} x + y + z = 0 \\ 3x + 2y + az = 5 \\ 2x + y + z = 3 \end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{l} -x + my + z = 2 \\ 2x - y + 2z = 0 \\ -x \qquad\quad - 3z = -2 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & m & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -3 & -2 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} -3^a \\ 2^a \\ 1^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & m & 1 & 2 \end{array}\right) \to$

$\to \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a - 2 \cdot 1^a \\ 3^a + 1^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -4 & -4 \\ 0 & m & 4 & 4 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 1^a \\ -2^a \\ 3^a + 2^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & m-1 & 0 & 0 \end{array}\right)$

- Si $m = 1 \ \to$ Sistema *compatible indeterminat*

$$\left.\begin{array}{r} x \qquad + 3z = 2 \\ y + 4z = 4 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x = 2 - 3z \\ y = 4 - 4z \\ z = \lambda \end{array}\right\}$$

Solucions: $(2 - 3\lambda, 4 - 4\lambda, \lambda)$

- Si $m \neq 1 \ \to$ Sistema *compatible determinat*

$$\left.\begin{array}{r} x \qquad\qquad + 3z = 2 \\ y + 4z = 4 \\ (m-1)y \qquad = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} y = 0 \\ z = 1 \\ x = 2 - 3z = -1 \end{array}\right\} \quad \textit{Solució: } (-1, 0, 1)$$

b) $\left.\begin{array}{l} x + y + z = 0 \\ 3x + 2y + az = 5 \\ 2x + y + z = 3 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & a & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 1^a \\ 3^a \\ 2^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & a & 5 \end{array}\right) \to$

$\to \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a - 2 \cdot 1^a \\ 3^a - 3 \cdot 1^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & a-3 & 5 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 1^a \\ -2^a \\ 3^a - 2^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & a-2 & 2 \end{array}\right)$

- Si $a = 2 \ \to$ Sistema *incompatible*

- Si $a \neq 2 \ \to$ Sistema *compatible determinat.* El resolem:

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 0 \\ y + z = -3 \\ (a-2)z = 2 \end{array}\right\}$$

$$z = \frac{2}{a-2}$$

$$y = -3 - z = -3 - \frac{2}{a-2} = \frac{4-3a}{a-2}$$

$$x = -y - z = \frac{-4+3a}{a-2} - \frac{2}{a-2} = \frac{3a-6}{a-2}$$

Solució: $\left(\frac{3a-6}{a-2}, \frac{4-3a}{a-2}, \frac{2}{a-2}\right)$

19 **Discuteix els sistemes següents segons els valors de α i interpreta'ls geomètricament:**

a) $\left\{\begin{array}{l} \alpha x - y = 1 \\ x - \alpha y = 2\alpha - 1 \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{l} x - y = 1 \\ 2x + 3y - 5z = -16 \\ x + \alpha y - z = 0 \end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{r} \alpha x - y = 1 \\ x - \alpha y = 2\alpha - 1 \end{array}\right\} \begin{pmatrix} \alpha & -1 & 1 \\ 1 & -\alpha & 2\alpha - 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\alpha \neq 0]{\begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \cdot \alpha - 1^a \end{array}} \begin{pmatrix} \alpha & -1 & 1 \\ 0 & 1 - \alpha^2 & 2\alpha^2 - \alpha - 1 \end{pmatrix}$

- Si $\alpha \neq 1$, queda:

  $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ Sistema *compatible indeterminat*. Són dues rectes coincidents.

- Si $\alpha = -1$, queda:

  $\left(\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$ Sistema *incompatible*. Són dues rectes paral·leles.

- Si $\alpha \neq 1$ i $\alpha \neq -1$ $\rightarrow$ Sistema *compatible determinat*. Són dues rectes secants.

b) $\left.\begin{array}{r} x - y = 1 \\ 2x + 3y - 5z = -16 \\ x + \alpha y - z = 0 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -5 & -16 \\ 1 & \alpha & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l} 1^a \\ 2^a - 2 \cdot 1^a \\ 3^a - 1^a \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -5 & -18 \\ 0 & \alpha + 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \rightarrow$

$\xrightarrow{\begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ 5 \cdot 3^a - 2^a \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -5 & -18 \\ 0 & 5\alpha & 0 & 13 \end{array}\right)$

- Si $\alpha \neq 0$ $\rightarrow$ Sistema *compatible determinat*. Són tres plans que es tallen en un punt.

- Si $\alpha = 0$ $\rightarrow$ Sistema *incompatible*. Els plans es tallen dos a dos, però no hi ha cap punt comú als tres.

20 **Es considera el sistema d'equacions lineals:**

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ x + ay + 3z = 2 \\ 2x + (2+a)y + 6z = 3 \end{cases}$$

a) Troba un valor de a per al qual el sistema sigui incompatible.

b) Discuteix si hi ha algun valor del paràmetre a per al qual el sistema sigui compatible determinat.

c) Resol el sistema per a $a = 0$.

$$\left.\begin{array}{r} x + 2y + 3z = 1 \\ x + ay + 3z = 2 \\ 2x + (2+a)y + 6z = 3 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & a & 3 & 2 \\ 2 & (2+a) & 6 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l} 1^a \\ 2^a - 1^a \\ 3^a - 2 \cdot 1^a \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & a-2 & 0 & 1 \\ 0 & a-2 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\to \xrightarrow{\begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ 3^a - 2^a \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & a-2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

a) $a = 2$

b) No existeix cap valor de a per al qual el sistema sigui compatible determinat.

c) Si $a = 0$, queda:

$$\left.\begin{array}{r} x + 2y + 3z = 1 \\ -2y \quad\quad = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y = -1/2 \\ x - 1 + 3z = 1 \\ z = \lambda \end{array} \to x = 2 - 3z$$

Solucions: $\left(2 - 3\lambda, -\frac{1}{2}, \lambda\right)$

21 **Considera el sistema d'equacions:**

$$\begin{cases} 2x - 2y - z = 4 \\ x + 2y - 2z = -1 \\ x \quad\quad - z = 1 \end{cases}$$

a) Hi ha una solució en què y sigui igual a 0?

b) Resol el sistema.

c) Interpreta'l geomètricament.

$$\left.\begin{array}{r} 2x - 2y - z = 4 \\ x + 2y - 2z = -1 \\ x \quad\quad - z = 1 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l} 3^a \\ 2^a \\ 1^a \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \\ 2 & -2 & -1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l} 1^a \\ 2^a - 1^a \\ 3^a - 2 \cdot 1^a \end{array}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ 3^a + 2^a \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \left.\begin{array}{r} x \quad\quad - z = 1 \\ 2y - z = -2 \end{array}\right\}$$

a) $y = 0 \quad \rightarrow \quad \left.\begin{array}{r} x - z = 1 \\ -z = -2 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} z = 2 \\ x = 1 + z = 3 \end{array}\right\}$

Solució: $(3, 0, 2)$

b) $\left.\begin{array}{l} x = 1 + z = 1 + 2y + 2 = 3 + 2y \\ z = 2y + 2 \\ y = \lambda \end{array}\right\}$

Solucions: $(3 + 2\lambda, \lambda, 2\lambda + 2)$

c) Són tres plans que es tallen en una recta.

22 **En una gelateria determinada, per una copa de la casa, dues orxates i quatre batuts et cobren 34 € un dia. Un altre dia, per 4 copes de la casa i 4 orxates et cobren 44 €, i un tercer dia, et demanen 26 € per una orxata i quatre batuts. Tens motius per pensar que algun dels tres dies t'han presentat un compte incorrecte?**

Anomenem x el preu d'una copa de la casa, y el preu d'una orxata, i z el preu d'un batut. Així doncs, tenim que:

$$\left.\begin{array}{r} x + 2y + 4z = 34 \\ 4x + 4y \qquad = 44 \\ y + 4z = 26 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} x + 2y + 4z = 34 \\ x + y \qquad = 11 \\ y + 4z = 26 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 34 \\ 1 & 1 & 0 & 11 \\ 0 & 1 & 4 & 26 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} 1^a \\ 1^a - 2^a \\ 3^a \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 11 \\ 0 & 1 & 4 & 23 \\ 0 & 1 & 4 & 26 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ 3^a - 2^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 11 \\ 0 & 1 & 4 & 23 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

El sistema és *incompatible*. Per tant, algun dels tres dies t'han presentat un compte incorrecte.

23 **Dos amics inverteixen 20 000 € cada un. El primer col·loca una quantitat A al 4% d'interès, una quantitat B al 5% i la resta al 6%. L'altre inverteix la mateixa quantitat A al 5%, la B al 6% i la resta al 4%.**

Determina les quantitats A, B i C sabent que el primer obté uns interessos de 1050 € i el segon de 950 €.

$$\left.\begin{array}{r} A + B + C = 20\,000 \\ 0{,}04A + 0{,}05B + 0{,}06C = 1\,050 \\ 0{,}05A + 0{,}06B + 0{,}04C = 950 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} A + B + C = 20\,000 \\ 4A + 5B + 6C = 105\,000 \\ 5A + 6B + 4C = 95\,000 \end{array}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 20\,000 \\ 4 & 5 & 6 & 105\,000 \\ 5 & 6 & 4 & 95\,000 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a - 4 \cdot 1^a \\ 3^a - 5 \cdot 1^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 20\,000 \\ 0 & 1 & 2 & 25\,000 \\ 0 & 1 & -1 & -5\,000 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ -3^a + 2^a \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 20\,000 \\ 0 & 1 & 2 & 25\,000 \\ 0 & 0 & 3 & 30\,000 \end{array}\right) \to \left.\begin{array}{r} A + B + \ \ C = 20\,000 \\ B + 2C = 25\,000 \\ 3C = 30\,000 \end{array}\right\} \begin{array}{l} C = 10\,000 \\ B = \ \ 5\,000 \\ A = \ \ 5\,000 \end{array}$$

Solució: $A = 5000$ €; $B = 5000$ €; $C = 10\,000$ €

Pàgina 26

24 **Una botiga ha venut 600 exemplars d'un videojoc per un total de 6384 €. El preu original era de 12 €, però també n'ha venut còpies defectuoses amb descomptes del 30% i del 40%. Si sabem que el nombre de còpies defectuoses venudes va ésser la meitat del de les còpies en bon estat, calcula a quantes còpies se li aplicà el 30% de descompte.**

Anomenem x el nombre de còpies venudes al preu original, 12 €; y el nombre de còpies venudes amb un 30% de descompte, $0{,}7 \cdot 12 = 8{,}4$ €; i z el nombre de còpies venudes amb un 40% de descompte, $0{,}6 \cdot 12 = 7{,}2$ €.

Així:

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z = 600 \\ 12x + 8{,}4y + 7{,}2z = 6384 \\ y + z = \dfrac{x}{2} \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x + y + z = 600 \\ 12x + 8{,}4y + 7{,}2z = 6384 \\ x - 2y - 2z = 0 \end{array}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 600 \\ 12 & 8{,}4 & 7{,}2 & 6384 \\ 1 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 1^a \\ -2^a + 12 \cdot 1^a \\ -3^a + 1^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 600 \\ 0 & 3{,}6 & 4{,}8 & 816 \\ 0 & 3 & 3 & 600 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ 3^a : 3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 600 \\ 0 & 3{,}6 & 4{,}8 & 816 \\ 0 & 1 & 1 & 200 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 1^a \\ 3^a \\ 2^a - 3{,}6 \cdot 3^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 600 \\ 0 & 1 & 1 & 200 \\ 0 & 0 & 1{,}2 & 96 \end{array}\right)$$

$$\left.\begin{array}{r} x + y + \ \ z = 600 \\ y + \ \ z = 200 \\ 1{,}2z = \ \ 96 \end{array}\right\} \begin{array}{l} z = \ \ 80 \\ y = 120 \\ x = 400 \end{array}$$

Solució: El 30% de descompte es va aplicar a 120 còpies.

25 **Un caixer automàtic conté 95 bitllets de 10, 20 i 50 € i un total de 2000 €. Si el nombre de bitllets de 10 € és el doble que el nombre de bitllets de 20 €, descobreix quants bitllets hi ha de cada tipus.**

Anomenem x el nombre de bitllets de 10 €; y el nombre de bitllets de 20 €, i z el nombre de bitllets de 50 €. Veiem que:

$$\left.\begin{array}{r} x + \ \ y + \ \ z = \ \ 95 \\ 10x + 20y + 50z = 2000 \\ x \qquad\qquad\quad = 2y \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} x + \ \ y + \ \ z = \ 95 \\ x + 2y + 5z = 200 \\ x \qquad\quad\ \ = 2y \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 3x \quad + \ \ z = \ 95 \\ 4y + 5z = 200 \\ x \qquad\quad\ \ = 2y \end{array}\right\}$$

$z = 95 - 3y$

$4y + 5(95 - 3y) = 200 \rightarrow 4y + 475 - 15y = 200 \rightarrow 275 = 11y$

$y = 25 \rightarrow z = 20 \rightarrow x = 50$

Solució: Hi ha 50 bitllets de 10 €, 25 bitllets de 20 € i 20 bitllets de 50 €.

26 **Es disposa de tres caixes A, B i C amb monedes d'1 euro. Se sap que en total hi ha 36 euros. El nombre de monedes de A excedeix en 2 a la suma de les monedes de les altres dues caixes. Si es traslladà 1 moneda de la caixa B a la caixa A, aquesta tindrà el doble de monedes que B. Esbrina quantes monedes hi havia en cada caixa.**

Anomenem x el nombre de monedes que hi ha a la caixa A, y el nombre de monedes que hi ha a la caixa B, i z el nombre de monedes que hi ha a la caixa C. Veiem que:

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z = 36 \\ x = y + z + 2 \\ x + 1 = 2(y - 1) \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x + y + z = 36 \\ x - y - z = 2 \\ x + 1 = 2y - 2 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x + y + z = 36 \\ x - y - z = 2 \\ x - 2y = -3 \end{array}\right\}$$

Sumant les dues primeres equacions: $2x = 38 \rightarrow x = 19$

De la 3.ª equació $\rightarrow y = \dfrac{x+3}{2} = 11$

$z = 36 - y - x = 6$

Solució: Hi havia 19 monedes a la caixa A, 11 a la B i 6 a la C.

27 **Un especulador adquireix 3 objectes d'art per un preu total de 2 milions d'euros. Si els ven, espera obtenir-ne uns guanys del 20%, del 50% i del 25%, respectivament, amb la qual cosa el seu benefici total seria de 600 000 €. Però n'aconsegueix més, perquè amb la venda obté guanys del 80%, del 90% i del 85%, respectivament, la qual cosa li dóna un benefici total d'1,7 milions d'euros. Quant li va costar cada objecte?**

Anomenem x el que li va costar el 1.r objecte (en milions d'euros); y, el que li va costar el 2.n objecte, i z, el que li va costar el 3.r objecte. Tenim que:

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 2 \\ 0{,}2x + 0{,}5y + 0{,}25z = 0{,}6 \\ 0{,}8x + 0{,}9y + 0{,}85z = 1{,}7 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x + y + z = 2 \\ 2x + 5y + 2{,}5z = 6 \\ 8x + 9y + 8{,}5z = 17 \end{array}\right\} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 2{,}5 & 6 \\ 8 & 9 & 8{,}5 & 17 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\begin{array}{l} 1^{a} \\ 2^{a} - 2 \cdot 1^{a} \\ 3^{a} - 8 \cdot 1^{a} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0{,}5 & 2 \\ 0 & 1 & 0{,}5 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} 1^{a} \\ 2^{a} - 3^{a} \\ 3^{a} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0{,}5 & 1 \end{array}\right) \left.\begin{array}{r} x + y + z = 2 \\ 2y = 1 \\ y + 0{,}5z = 1 \end{array}\right\}$$

$y = 0{,}5 \qquad z = \dfrac{1 - y}{0{,}5} = 1 \qquad x = 2 - y - z = 0{,}5$

Solució: El 1.r objecte li va costar 0,5 milions d'euros (500 000 €), el 2.n li va costar 0,5 milions d'euros (500 000 €) i el 3.r li va costar 1 milió d'euros (1 000 000 €).

28 **Una empresa disposa de 27 200 € per a activitats de formació dels seus cent empleats. Després d'estudiar les necessitats dels empleats, s'ha decidit d'organitzar tres cursos: A, B i C. La subvenció per persona per al curs A és de 400 €, per al curs B és de 160 €, i de 200 € per al C. Si la quantitat que es dedica al curs A és cinc vegades major que la corresponent al B, quants empleats segueixen cada curs?**

Anomenem x el nombre d'empleats que segueixen el curs A; y, el nombre d'empleats que segueixen el curs B, i z, el nombre d'empleats que segueixen el curs C. Veiem que:

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z = 100 \\ 400x + 160y + 200z = 27\,200 \\ 400x = 5 \cdot 160y \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x + y + z = 100 \\ 10x + 4y + 5z = 680 \\ 400x = 800y \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x + y + z = 100 \\ 10x + 4y + 5z = 680 \\ x = 2y \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} 3y + z = 100 \\ 24y + 5z = 680 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} z = 100 - 3y \\ 24y + 5(100 - 3y) = 680 \end{array}$$

$$24y + 500 - 15y = 680 \rightarrow 9y = 180 \rightarrow y = 20 \rightarrow z = 40; \ x = 40$$

Solució: 40 empleats segueixen el curs A; 20 empleats segueixen el curs B, i 40 empleats segueixen el curs C.

29 **L'Antoni té un any més que en Joan, i en Lluís, un més que l'Àngel. Determina l'edat dels quatre sabent que la d'en Lluís és la suma de la tercera part més la setena part de la de l'Antoni i que la de l'Àngel és la suma de la quarta part més la cinquena part de la d'en Joan.**

Anomenem w l'edat de l'Antoni, x la d'en Joan, y la d'en Lluís i z la de l'Àngel.

$$\left.\begin{array}{l} w = 1 + x \\ y = 1 + z \\ y = \dfrac{w}{3} + \dfrac{w}{7} \\ z = \dfrac{x}{4} + \dfrac{x}{5} \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{rrrl} & & y - z = & 1 \\ -10w + & & 21y \quad = & 10 \\ & -9x + & 20z = & 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} -10x + 21z = -11 \\ -9x + 20z = 0 \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow -200z + 189z = -99$$

$$z = 9; \ y = 10; \ x = 20; \ w = 21;$$

Solució: l'Antoni té 21 anys, en Joan 20, en Lluís 10 i l'Àngel 9.

30 **Tres amics acorden jugar tres partides de daus de forma que, quan un perdi, donarà a cada un dels altres dos una quantitat igual a la que cada un posseeixi en aquell moment. Cada un va perdre una partida, i al final cada un tenia 24 €. Quant tenia cada jugador en començar?**

Fem una taula que resumeixi la situació:

	COMENÇAMENT	1.ª PARTIDA	2.ª PARTIDA	3.ª PARTIDA
1.r QUE PERD	x	$x - y - z$	$2x - 2y - 2z$	$4x - 4y - 4z$
2.n QUE PERD	y	$2y$	$-x + 3y - z$	$-2x + 6y - 2z$
3.r QUE PERD	z	$2z$	$4z$	$-x - y + 7z$

$$\left.\begin{aligned} 4x - 4y - 4z &= 24 \\ -2x + 6y - 2z &= 24 \\ -x - y + 7z &= 24 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} x - y - z &= 6 \\ -x + 3y - z &= 12 \\ -x - y + 7z &= 24 \end{aligned}\right\} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 6 \\ -1 & 3 & -1 & 12 \\ -1 & -1 & 7 & 24 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l} 1^a \\ 2^a + 1^a \\ 3^a + 1^a \end{array}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 6 \\ 0 & 2 & -2 & 18 \\ 0 & -2 & 6 & 30 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l} 1^a \\ 2^a : 2 \\ 3^a : 2 \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 9 \\ 0 & -1 & 3 & 15 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ 3^a + 2^a \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 9 \\ 0 & 0 & 2 & 24 \end{array}\right)$$

$$\left.\begin{aligned} x - y - z &= 6 \\ y - z &= 9 \\ 2z &= 24 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} &z = 12 \\ &y = 9 + z = 21 \\ &x = 6 + y + z = 39 \end{aligned}\right\}$$

Solució: El jugador que va perdre primer tenia 39 €; el que va perdre en segon lloc tenia 21 €, i el que va perdre en tercer lloc tenia 12 €.

31 **Un joier té tres classes de monedes: A, B i C. Les monedes de tipus A tenen 2 grams d'or, 4 grams de plata i 14 grams de coure; les de tipus B tenen 6 grams d'or, 4 grams de plata i 10 grams de coure; i les de tipus C tenen 8 grams d'or, 6 grams de plata i 6 grams de coure. Quantes monedes de cada tipus ha de fondre per obtenir-ne 44 grams d'or, 44 grams de plata i 112 grams de coure?**

Anomenem x el nombre de monedes que cal fondre de tipus A, y les de tipus B, i z les de tipus C.

La informació que tenim sobre la composició de les monedes és:

TIPUS	OR (g)	PLATA (g)	COURE (g)
A	2	4	14
B	6	4	10
C	8	6	6

Per tant: $\left.\begin{aligned} 2x + 6y + 8z &= 44 \\ 4x + 4y + 6z &= 44 \\ 14x + 10y + 6z &= 112 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} x + 3y + 4z &= 22 \\ 2x + 2y + 3z &= 22 \\ 7x + 5y + 3z &= 56 \end{aligned}\right\}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 22 \\ 2 & 2 & 3 & 22 \\ 7 & 5 & 3 & 56 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l} 1^a \\ 2^a - 2 \cdot 1^a \\ 3^a - 7 \cdot 1^a \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 22 \\ 0 & -4 & -5 & -22 \\ 0 & -16 & -25 & -98 \end{array}\right) \to$$

$$\xrightarrow{\begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ 3^a - 4 \cdot 2^a \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 22 \\ 0 & 4 & 5 & 22 \\ 0 & 0 & -5 & -10 \end{array}\right)$$

$$\left.\begin{array}{r} x+3y+4z=\ \ 22 \\ 4y+5z=\ \ 22 \\ -5z=-10 \end{array}\right\} \begin{array}{l} z=2 \\ y=\dfrac{22-5z}{4}=3 \\ x=22-3y-4z=5 \end{array}$$

Solució: Ha de fondre 5 monedes de tipus A, 3 de tipus B i 2 de tipus C.

32 **Un fabricant produeix 42 electrodomèstics. La fàbrica abasta 3 botigues, que demanden tota la producció. En una certa setmana, la primera botiga va sol·licitar tantes unitats com la segona i tercera juntes, mentre que la segona va demanar un 20% més que la suma de la meitat d'allò que s'ha demanat per la primera, més la tercera part d'allò que s'ha demanat per la tercera. Quina quantitat en va sol·licitar cada una?**

Anomenem x la quantitat que va sol·licitar la 1.ª botiga; y, la que va sol·licitar la 2.ª botiga, i z, la que va sol·licitar la 3.ª botiga. Veiem que:

$$\begin{array}{llll} x+y+z=42 & x+y+z=42 & x-y-z=0 & x-y-z=0 \\ x=y+z & x-y-z=0 & x+y+z=42 & x+y+z=42 \\ y=1{,}2\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{z}{3}\right) & 6y=3{,}6x+2{,}4z & 60y=36x+24z & 5y=3x+2z \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{r} x-\ \ y-\ \ z=\ \ 0 \\ x+\ \ y+\ \ z=42 \\ 3x-5y+2z=\ \ 0 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 42 \\ 3 & -5 & 2 & 0 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a-1^a \\ 3^a-3\cdot 1^a \end{array} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 42 \\ 0 & -2 & 5 & 0 \end{array}\right) \to$$

$$\begin{array}{l} 1^a \\ 2^a:2 \\ 3^a+2^a \end{array} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 21 \\ 0 & 0 & 7 & 42 \end{array}\right) \left.\begin{array}{r} x-y-\ \ z=\ \ 0 \\ y+\ \ z=21 \\ 7z=42 \end{array}\right\} \begin{array}{l} z=6 \\ y=21-z=15 \\ x=y+z=21 \end{array}$$

Solució: La 1.ª botiga va sol·licitar 21 electrodomèstics; la 2.ª, 15, i la 3.ª, 6.

33 **Es mesclen 60 *l* de vi blanc amb 20 *l* de vi negre i s'obté un vi de 10 graus (10 % d'alcohol). Si, pel contrari, es mesclen 20 *l* de blanc amb 60 *l* de negre, s'obté un vi d'11 graus. Quina graduació tindrà una mescla de 40 *l* de vi blanc i 40 *l* de vi negre?**

Anomenem x el percentatge d'alcohol en 1 litre de vi blanc, i y el percentatge d'alcohol en 1 litre de vi negre. Tenim que:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{60x}{100}+\dfrac{20y}{100}=\dfrac{10\cdot 80}{100} \\ \dfrac{20x}{100}+\dfrac{60y}{100}=\dfrac{11\cdot 80}{100} \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 3x+\ \ y=40 \\ x+3y=44 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y=40-3x \\ x=3(40-3x)=44 \end{array}$$

$$x+120-9x=44 \quad\to\quad 76=8x \quad\to\quad x=9{,}5\%,\ \ y=11{,}5\%$$

Si mesclem 40 l de vi blanc i 40 l de vi negre, tindrem:

$0{,}095\cdot 40+0{,}115\cdot 40=8{,}4$ l d'alcohol en els 80 l de la mescla.

$\frac{8,4}{80} \cdot 100 = 10,5\%$ d'alcohol en els 80 *l* de la mescla.

Solució: La mescla tindrà una graduació de 10,5 graus.

QÜESTIONS TEÒRIQUES

34 **Es pot aconseguir que un sistema compatible indeterminat de 2 equacions amb 2 incògnites sigui incompatible si li afegim una altra equació?**

Sí, si li afegim una equació contradictòria amb el que diuen les anteriors.

35 **Si a un sistema de 2 equacions amb 2 incògnites incompatible li afegim una altra equació, podríem aconseguir que fos compatible indeterminat? I determinat? Justifica les respostes.**

No. Si el sistema és incompatible, les dues equacions inicials són contradictòries. Afegint una altra equació, no podem canviar aquest fet; el sistema seguirà sent incompatible.

36 **Donades les equacions:** $\begin{cases} 3x - 2y + z = 5 \\ 2x - 3y + z = -4 \end{cases}$

Afegeix-hi una equació perquè el sistema sigui:

a) Incompatible

b) Compatible determinat

a) Perquè sigui incompatible, l'equació que afegim ha de ser de la forma:

$a(3x - 2y + z) + b(2x - 3y + z) = k$ amb $k \neq 5a - 4b$.

Si agafem, per exemple, $a = 1$, $b = 0$, $k = 1$, queda:

$3x - 2y + z = 1$

Afegint aquesta equació, el sistema seria incompatible.

b) Per exemple, afegint $y = 0$, queda:

$$\left.\begin{array}{l} 3x - 2y + z = 5 \\ 2x - 3y + z = -4 \\ y = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 3x + z = 5 \\ 2x + z = -4 \\ y = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x = 9 \\ y = 0 \\ z = -22 \end{array}\right\} \text{Compatible determinat}$$

Pàgina 27

37 **Defineix quan dos sistemes d'equacions lineals són equivalents. Justifica si són equivalents o no els sistemes següents:**

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + y - z = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ z = -1 \end{cases}$$

Dos sistemes d'equacions lineals són equivalents quan totes les solucions del 1.r sistema ho són també del 2.n, i a la inversa.

Els dos sistemes donats no són equivalents, atès que el 1.r és compatible indeterminat (té infinites solucions) i el 2.n és determinat (només té una solució).

38 **Troba dos valors del paràmetre a per als quals aquest sistema sigui incompatible:**

$$\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ ax + y + 2z = 1 \\ x \quad\; + 3z = 2 \\ 2x \quad + az = 3 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{r} x + y + 2z = 0 \\ ax + y + 2z = 1 \\ x \quad + 3z = 2 \\ 2x \quad + az = 3 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ a & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & a & 3 \end{array}\right) \to \xrightarrow{\substack{1^a \\ 2^a - 1^a \\ 3^a \\ 4^a}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ a-1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & a & 3 \end{array}\right) \to$$

$$\xrightarrow{\substack{1^a \\ 2^a \\ 3^a \\ 4^a - 2 \cdot 3^a}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ a-1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & a-6 & -1 \end{array}\right)$$

Si $a = 1$ o $a = 6$, el sistema és incompatible.

39 **Siguin S i S' dos sistemes equivalents amb solució única que tenen iguals els termes independents. Podem assegurar que tenen iguals els coeficients de les incògnites?**

No. Per exemple, els sistemes:

$$S: \begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases} \qquad S': \begin{cases} 2x - y = 3 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases}$$

són equivalents, amb solució única (2, 1), tenen iguals els termes independents, però no els coeficients de les incògnites.

PER APROFUNDIR

40 **En el trajecte que hi ha entre casa seva i el treball, un individu pot fer gasolina en tres estacions de servei (A, B i C). L'individu recorda que aquest mes el preu de la gasolina a A ha estat d'1,2 €/litre i el preu a B, d'1,18 €/litre, però ha oblidat el preu a C (suposem que són m €/litre, amb m desconegut). També recorda que:**

- **La suma de la despesa en litres de gasolina en les estacions A i B va superar en 46,80 € la despesa a C.**
- **El nombre de litres consumits a B va ésser el mateix que a C.**
- **La despesa en litres a A va superar la de B en 12,60 €.**

a) Planteja un sistema d'equacions (d'acord amb *m*) per determinar els litres consumits en cada gasolinera.

b) Estudia la compatibilitat del sistema d'acord amb *m*. Pots donar cap preu al qual sigui impossible haver venut la gasolina a C?

a) Anomenem x el nombre de litres consumits a A, y el nombre de litres consumits a B, i z el nombre de litres consumits a C. Tenim que:

$$\left.\begin{array}{l} 1{,}2x + 1{,}18y = mz + 46{,}8 \\ y = z \\ 1{,}2x = 1{,}18y + 12{,}6 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} 1{,}2x + 1{,}18y - mz = 46{,}8 \\ y - z = 0 \\ 1{,}2x - 1{,}18y = 12{,}6 \end{array}\right\}$$

b) $\begin{array}{l} 3^a \\ 2^a \\ 1^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1{,}2 & -1{,}18 & 0 & 12{,}6 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1{,}2 & 1{,}18 & -m & 46{,}8 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ 3^a - 1^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1{,}2 & -1{,}18 & 0 & 12{,}6 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2{,}36 & -m & 34{,}2 \end{array}\right) \to$

$\to \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ 3^a - (2{,}36) \cdot 2^a \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1{,}2 & -1{,}18 & 0 & 12{,}6 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2{,}36 - m & 34{,}2 \end{array}\right)$

- **Si $m \neq 2{,}36$** $\to$ el sistema és *compatible determinat*.
- **Si $m = 2{,}36$** $\to$ el sistema és *incompatible*.

Per tant, és impossible que el preu a C fos de 2,36 €/l.

41 **Discuteix els sistemes següents d'acord amb el paràmetre *a* i resol-los en el cas que siguin compatibles indeterminats:**

a) $\left\{\begin{array}{l} x + y + z = a - 1 \\ 2x + y + az = a \\ x + ay + z = 1 \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{l} ax + y - z = 0 \\ 2x + ay = 2 \\ -x + z = 1 \end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{l} x + y + z = a - 1 \\ 2x + y + az = a \\ x + ay + z = 1 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a - 1 \\ 2 & 1 & a & a \\ 1 & a & 1 & 1 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a - 2 \cdot 1^a \\ 3^a - 1^a \end{array}$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a - 1 \\ 0 & -1 & a - 2 & -a + 2 \\ 0 & a - 1 & 0 & 2 - a \end{array}\right)$

- Si $a = 1$, queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&0\\0&-1&-1&1\\0&0&0&1\end{array}\right) \to \text{ Sistema } \textit{incompatible}$$

- Si $a = 2$, queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\0&-1&0&0\\0&1&0&0\end{array}\right) \to \begin{array}{l}1^a\\2^a+3^a\\3^a\end{array} \left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\0&0&0&0\\0&1&0&0\end{array}\right) \to$$

$\to$ Sistema *compatible indeterminat*

El resolem en aquest cas:

$$\left.\begin{array}{r}x+y+z=1\\y=0\end{array}\right\} \begin{array}{l}x+z=1 \quad\to\quad x=1-z\\ y=0\\ z=\lambda\end{array}\Bigg\}$$

Solucions: $(1-\lambda, 0, \lambda)$

- Si $a \neq 1$ i $a \neq 2$ $\to$ Sistema *compatible determinat*

b) $$\left.\begin{array}{r}ax+y-z=0\\2x+ay=2\\-x+z=1\end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c}a&1&-1&0\\2&a&0&2\\-1&0&1&1\end{array}\right) \to \begin{array}{l}3^a\\2^a\\1^a\end{array} \left(\begin{array}{ccc|c}-1&0&1&1\\2&a&0&2\\a&1&-1&0\end{array}\right) \to \begin{array}{l}1^a\\2^a\\3^a+1^a\end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}-1&0&1&1\\2&a&0&2\\a-1&1&0&1\end{array}\right) \to \begin{array}{l}1^a\\2^a\\-a\cdot 3^a+2^a\\ \scriptstyle a\neq 0\end{array} \left(\begin{array}{ccc|c}-1&0&1&1\\2&a&0&2\\-a^2+a+2&0&0&2-a\end{array}\right)$$

$$-a^2+a+2=0 \quad\to\quad a=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{-2}=\frac{-1\pm 3}{-2} \begin{array}{l} a=-1\\ a=2\end{array}$$

- Si $a = -1$, queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}-1&0&1&1\\2&-1&0&2\\0&0&0&3\end{array}\right) \to \text{ Sistema } \textit{incompatible}$$

- Si $a = 2$, queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}-1&0&1&1\\2&2&0&2\\0&0&0&0\end{array}\right) \to \begin{array}{l}1^a\\2^a:2\\3^a\end{array} \left(\begin{array}{ccc|c}-1&0&1&1\\1&1&0&1\\0&0&0&0\end{array}\right) \left.\begin{array}{r}-x+z=1\\x+y=1\end{array}\right\} \begin{array}{l}z=1+x\\y=1-x\\x=\lambda\end{array}$$

Sistema *compatible indeterminat*

Solucions: $(\lambda, 1-\lambda, 1+\lambda)$

- Si $a \neq -1$ i $a \neq 2$ $\to$ Sistema *compatible determinat*

42 **Discuteix el sistema següent segons els valors del paràmetre a. Interpreta'l geomètricament:**

$$\begin{cases} ax + y + z - 4 = 0 \\ x + y + z + 1 = 0 \\ x - ay + z - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{r} ax + y + z - 4 = 0 \\ x + y + z + 1 = 0 \\ x - ay + z - 1 = 0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} ax + y + z = 4 \\ x + y + z = -1 \\ x - ay + z = 1 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -a & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l} 2^a \\ 1^a \\ 3^a \end{array}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ a & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -a & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l} 1^a \\ 2^a - 1^a \\ 3^a - 1^a \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ a-1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & -a-1 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

- Si $a = 1$, queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \end{array}\right) \to \text{Sistema } \textit{incompatible}$$

Els dos primers plans són paral·lels, i el tercer els talla.

- Si $a = -1$, queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \to \text{Sistema } \textit{incompatible}$$

Els dos últims plans són paral·lels, i el primer els talla.

- Si $a \neq 1$ i $a \neq -1$ → Sistema *compatible determinat*. Són tres plans que es tallen en un punt.

43 **Resol el sistema següent:**

$$\begin{cases} x + y + z + t = 17 \\ x + y + z + w = 16 \\ x + y + t + w = 15 \\ x + z + t + w = 14 \\ y + z + t + w = 14 \end{cases}$$

☛ ***Si sumes les cinc igualtats, n'obtindràs una altra amb què se't poden simplificar molt els càlculs.***

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z + t = 17 \\ x + y + z + w = 16 \\ x + y + t + w = 15 \\ x + z + t + w = 14 \\ y + z + t + w = 14 \end{array}\right\}$$

Sumant les cinc igualtats, obtenim:

$4x + 4y + 4z + 4t + 4w = 76$, és a dir:

$4(x + y + z + t + w) = 76$, o bé:

$x + y + z + t + w = 19$

Per tant:

$$(x + y + z + t) + w = 17 + w = 19 \;\rightarrow\; w = 2$$
$$(x + y + z + w) + t = 16 + t = 19 \;\rightarrow\; t = 3$$
$$(x + y + t + w) + z = 15 + z = 19 \;\rightarrow\; z = 4$$
$$(x + z + t + w) + y = 14 + y = 19 \;\rightarrow\; y = 5$$
$$(y + z + t + w) + x = 14 + x = 19 \;\rightarrow\; x = 5$$

44 Ens diuen que x, y, z, t, w són nombres enters i que k val 36 o 38. Decideix raonadament quin dels dos és el seu valor i resol el sistema següent:

$$\left\{\begin{array}{l} x + y + z + t = 35 \\ x + y + z + w = 36 \\ x + y + t + w = 38 \\ x + z + t + w = 39 \\ y + z + t + w = k \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z + t = 35 \\ x + y + z + w = 36 \\ x + y + t + w = 38 \\ x + z + t + w = 39 \\ y + z + t + w = k \end{array}\right\}$$

Sumant les cinc igualtats, obtenim:

$4x + 4y + 4z + 4t + 4w = 148 + k$, és a dir:

$4(x + y + z + t + w) = 148 + k$, o bé:

$x + y + z + t + w = 37 + \dfrac{k}{4}$

Si x, y, z, t, w són nombres enters, llur suma també ho serà; així doncs, k ha de ser múltiple de 4. Com que ens diuen que val 36 o 38, tenim que ha de ser $k = 36$ (ja que 38 no és múltiple de 4).

Resolem el sistema, ara que sabem que $k = 36$:

La suma de les cinc igualtats donarà lloc a:

$x + y + z + t + w = 37 + \dfrac{36}{4} = 37 + 9 = 46$

Per tant:

$$(x + y + z + t) + w = 35 + w = 46 \;\rightarrow\; w = 11$$
$$(x + y + z + w) + t = 36 + t = 46 \;\rightarrow\; t = 10$$
$$(x + y + t + w) + z = 38 + z = 46 \;\rightarrow\; z = 8$$
$$(x + z + t + w) + y = 39 + y = 46 \;\rightarrow\; y = 7$$
$$(y + z + t + w) + x = 36 + x = 46 \;\rightarrow\; x = 10$$

45 **Una colla de 5 obrers es compromet a podar els 222 arbres d'una plantació. Treballen de dilluns a dissabte. Cada dia, quatre poden i el cinquè els atên (reposa eines, els dóna aigua, arreplega els troncs que cauen…). Cada obrer poda el mateix nombre d'arbres cada dia, és a dir, si l'Albert poda 8 arbres un dia, podarà 8 arbres cada dia que intervingui. Els resultats són:**

Dilluns: 35 arbres podats.

Dimarts: 36 arbres podats.

Dimecres: 36 arbres podats.

Dijous: 38 arbres podats.

Divendres: 38 arbres podats.

Dissabte: 39 arbres podats.

Calcula quants arbres diaris poda cada un dels cinc obrers sabent que cap d'ells poda els sis dies.

Anomenem:

w = nombre d'arbres diaris que poda l'obrer que descansa dilluns.

t = nombre d'arbres diaris que poda l'obrer que descansa dimarts.

(És un altre el que descansa, ja que la suma és diferent).

z = nombre d'arbres diaris que poda l'obrer que descansa dijous.

(És un altre diferent, ja que la suma és diferent).

y = nombre d'arbres diaris que poda l'obrer que descansa dissabte.

(És un altre, ja que la suma és diferent a les anteriors).

x = nombre d'arbres diaris que poda l'obrer que falta.

(Descansarà dimecres o divendres; coincidirà amb t o amb z).

Així, el nombre d'arbres que es poden cada dia serà:

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z + t \phantom{{}+w} = 35 \\ x + y + z \phantom{{}+t} + w = 36 \\ x + y \phantom{{}+z} + t + w = 38 \\ x \phantom{{}+y} + z + t + w = 39 \\ \phantom{x+{}} y + z + t + w = k \end{array}\right\} \quad x,\ y,\ z,\ t,\ w \text{ són enters}$$

k pot ser 36 o 38

Es tracta de resoldre aquest sistema.

Per l'exercici anterior, sabem que $k = 36$; i que:

$$x = 10,\quad y = 7,\quad z = 8,\quad t = 10,\quad w = 11$$

Per tant, el que poda 11 arbres descansa dilluns, un dels que poden 10 arbres descansa dimarts, el que poda 8 arbres descansa dijous i divendres, el que poda 7 arbres descansa dissabte i l'altre que poda 10 arbres descansa dimecres.