

Tema 4. Moviments curvilinis en dues dimensions.

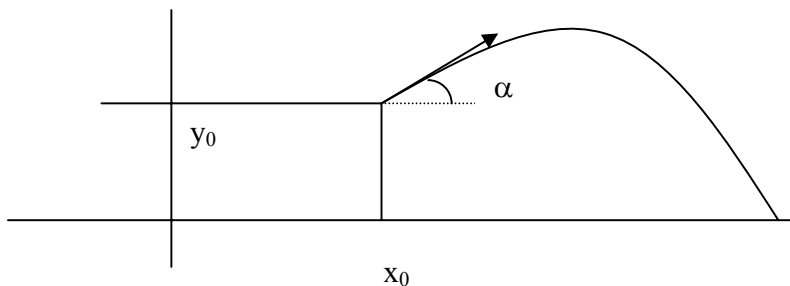
No sempre les partícules descriuen moviments rectilinis. En realitat sempre les partícules es mouen descrivint trajectòries curvilinies en tres dimensions. En aquest capítol però només estudiarem els moviments curvilinis en dues dimensions, concretament:

- El tir parabòlic.
- El moviment circular.
 - o El moviment circular uniforme.
 - o El moviment rectilini uniformement accelerat.

4.1.El tir parabòlic.

Quan llanceu un objecte verticalment tothom té clar que aquest descriu una trajectòria vertical. Però quan el llancem obliquament veiem que descriu una trajectòria plana i corba. Aquest és el cas del tir parabòlic. Les variables característiques per l'estudi del tir parabòlic són:

- La velocitat inicial (v_0).
- L'angle de llançament (α)
- La posició inicial del llançament. (x_0, y_0).



Si un observa l'ombra de la partícula sobre el terra, veurà que es mou en línia recta i a velocitat constant. Per altre banda si observeu frontalment el moviment de la partícula veureu que descriu un moviment de caiguda lliure.

Per tant el tir parabòlic es pot descompondre en dos moviments:

- Un moviment rectilini uniforme (en la direcció horitzontal.)
- Un moviment rectilini uniformement accelerat (caiguda lliure) en la direcció vertical.

Així les equacions que descriuen el moviment són:

POSICIÓ :

$$\begin{cases} x = x_0 + v_{0x} \cdot t \\ y = y_0 + v_{0y} \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2 \end{cases}$$

On la velocitat inicial s'ha de descompondre en components $v_{0x} = v_0 \cdot \cos \alpha$ i $v_{0y} = v_0 \cdot \sin \alpha$

VELOCITAT:

$$\begin{cases} v_x = v_{x0} \\ v_y = v_{0y} - g \cdot t \end{cases}$$

ACCELERACIÓ:

$$\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases}$$

Observeu que l'acceleració és negativa ja que apunta cap avall.

Exemple 5. Un canó dispara un projectil amb una velocitat de 200 m/s. L'angle de tir és de 30° . El canó està situat a terra.

- Escriviu les equacions que descriuen el tir parabòlic.
- Quina és la posició i la velocitat del projectil quan el temps val 5 s?
- En quin instant de temps el projectil arribarà a terra?

- **L'abast màxim.**

Entenem per abast màxim la distància horitzontal mesurada des del punt de partida de la partícula fins que aquesta arriba a terra.

Com que normalment en tots els problemes considerem que l'altura corresponent al terra és $y = 0$, aquesta és la condició que hem d'imposar per determinar l'abast màxim.

Procedirem sempre així:

- $y = 0$
- Substituïm aquesta condició a l'equació de la posició vertical i determinarem el temps. Aquest és el temps que trigarà la partícula en arribar a terra.
- Substituïm el temps a l'equació de la posició horitzontal per determinar l'abast màxim.

- **L'altura màxima.**

Entenem per altura màxima la distància vertical més gran que hi ha entre la partícula i el terra. Observeu que el punt de màxima altura serà aquell on la v_y és nul·la. Per determinar-la procedirem de la següent manera.

- $v_y = 0$
- Substituïm aquesta condició a l'equació de la velocitat vertical i determinarem el temps. Aquest és el temps que trigarà la partícula en arribar a la màxima altura.
- Substituïm el temps a l'equació de la posició vertical per determinar l'altura màxima.

Exemple 6. Un canó dispara un projectil amb una velocitat de 200 m/s. L'angle de tir és de 30° . El canó està situat a terra. Determineu l'abast màxim i l'altura màxima.

• **L'equació de la trajectòria.**

L'equació de la trajectòria és una expressió de la forma $y = f(x)$. Per determinar-la prendrem les equacions de la posició en funció del temps.

$$\begin{cases} x = x_0 + v_{0x} \cdot t \\ y = y_0 + v_{0y} \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2 \end{cases}$$

Aïllarem el temps de la primera i el substituïrem a la segona. També si considerem les equacions de les velocitats inicials $v_{0x} = v_0 \cdot \cos \alpha$ i $v_{0y} = v_0 \cdot \sin \alpha$ ens quedarà...

$$y = y_0 + v_0 \cdot \sin \alpha \left(\frac{x - x_0}{v_0 \cdot \cos \alpha} \right) - \frac{1}{2} g \left(\frac{x - x_0}{v_0 \cdot \cos \alpha} \right)^2$$

desenvolupant els quadrats de l'equació anterior obtenim:

$$y = \left(y_0 - x_0 \cdot \tan \alpha - \frac{1}{2} \frac{g x_0^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha} \right) + \left(\tan \alpha + \frac{g x_0}{v_0^2 \cos^2 \alpha} \right) \cdot x - \left(\frac{1}{2} \frac{g}{v_0^2 \cos^2 \alpha} \right) \cdot x^2$$

Fixeu-vos que l'equació anterior és de la forma $y = C + B \cdot x + A \cdot x^2$, que correspon a l'equació d'una paràbola. Per tant la trajectòria que descriuen les partícules quan es llancen obliquament és una paràbola. D'aquí ve el nom de tir parabòlic.

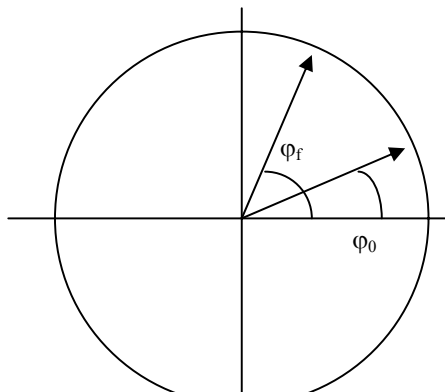
4.2. El moviment circular uniforme.

Considereu un mòbil puntual que descriu una trajectòria circular de radi R . La posició de la partícula ve determinada per uns eixos de coordenades centrats al centre de la circumferència. La posició de la partícula en qualsevol instant de temps queda perfectament descrita a partir de l'angle que forma el vector posició respecte l'eix positiu de les x (φ). També es pot establir la posició de la partícula si coneixem l'arc de la circumferència recorregut per la partícula (s). No cal especificar en cap moment el mòdul del vector posició ja que aquest és constant.

Podem relacionar les dues variables a través de:

$$s = \varphi \cdot R$$

Si la partícula es mou de la posició p_0 a la posició p_f les posicions finals i inicials es poden relacionar a través de la relació anterior.



$$\Delta s = \Delta \varphi \cdot R \quad (1)$$

4.3. Velocitat angular.

Entenem per velocitat angular l'angle escombrat per vector posició en un cert temps t . Podem parlar de velocitat angular mitja ω_{mitja} i de velocitat angular instantània ω . En el moviment circular uniforme les dues coincideixen.

$$\omega_{mitja} = \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} \quad \omega = \frac{d\varphi}{dt}$$

El moviment circular uniforme es caracteritza per tenir la velocitat angular costant. Les seves unitats són els radians per segon.

$$[\omega] = 1 \frac{rad}{s}$$

Podem relacionar la velocitat angular amb la velocitat lineal de la partícula. Si prenem l'equació (1), i derivem:

$$\Delta s = \Delta \varphi \cdot R \quad \rightarrow \quad \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} \cdot R \quad \rightarrow \quad v = \omega \cdot R$$

4.4. Equació del moviment circular uniforme.

De la definició de la velocitat angular mitja traurem l'equació del moviment circular uniforme.

$$\omega = \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} \quad \rightarrow \quad \Delta \varphi = \omega \cdot \Delta t \quad \rightarrow \quad \varphi_f - \varphi_0 = \omega \cdot (t_f - t_0)$$

$$\begin{cases} \varphi_f = \varphi_0 + \omega \cdot (t_f - t_0) \\ \omega = \text{cons tan } t. \end{cases}$$

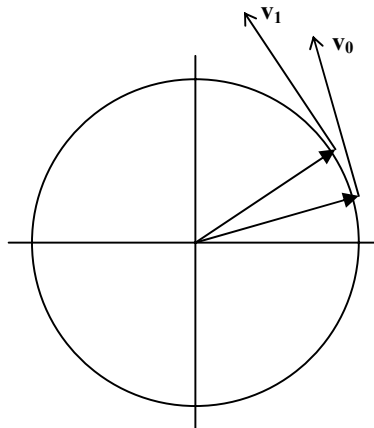
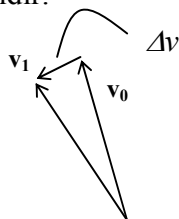
Normalment es pren $t_0 = 0$.

4.5. Acceleració centrípeta.

En el tema 1 vàrem veure que la velocitat instantània d'una partícula és sempre tangent a la trajectòria. Si ens centrem en el moviment rectilini uniforme observem el vector velocitat instantània entre dos instants molt propers.

Observeu que $\mathbf{v}_1$ i $\mathbf{v}_0$ són diferents. La velocitat instantània ha canviat de direcció. Per tant la velocitat instantània no és constant¹. Si el vector velocitat canvia això vol dir que la partícula accelera². L'acceleració responsable que el vector velocitat instantània canviï de direcció s'anomena **acceleració centrípeta**.

Els vectors velocitats instantànies són vectors lliures i per tant els podem moure lliurement i els podem fer coincidir.



Els vectors $\mathbf{v}_1$ i $\mathbf{v}_0$ són quasi paral·lels quan l'interval de temps que els separen és molt petit. En aquesta mateixa situació el vector $\Delta \mathbf{v}$ és gairebé perpendicular als altres dos vectors.

Com que l'acceleració instantània es defineix com:

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Veiem que l'acceleració tindrà la mateixa direcció i sentit que el vector $d\mathbf{v}$. Aquesta és l'acceleració centrípeta. Es pot demostrar que l'acceleració centrípeta en mòdul ve donada per:

$$a_c = \frac{v^2}{R} = \omega^2 \cdot R$$

I es mesura en m/s^2 .

$$[a_c] = 1\text{m} / \text{s}^2.$$

4.6. Període del moviment circular uniforme.

El període és el temps que triga una partícula que realitza un moviment circular uniforme, en donar una volta. El període ve donat per $T = \frac{2\pi}{\omega}$ i es mesura en segons $[T] = 1\text{s}$.

4.7. Moviment circular uniformement accelerat.

Diem que una partícula realitza un moviment circular uniformement accelerat si la velocitat angular d'aquest no es manté constant. La variació de la velocitat angular entre dos instants de temps s'anomena acceleració angular.

$$\alpha = \frac{\Delta \omega}{\Delta t}$$

¹ Recordeu que la velocitat instantània és constant si 1) és constant en mòdul i 2) la direcció no canvia.

² Veure apartat **Tema 1** apartat **1.4**.

(2)
I es mesura en radians per segon $[\alpha] = 1 \text{ rad} / \text{s}^2$

L'equació anterior podem rescriure-la de la forma més usual.

$$\alpha = \frac{\omega - \omega_0}{t - t_0} \longrightarrow \omega = \omega_0 + \alpha \cdot (t - t_0)$$

Com que normalment fem $t_0 = 0 \text{ s}$.

$$\omega = \omega_0 + \alpha \cdot t$$

Si multipliquem l'equació (2) pel radi R obtindrem una nova magnitud, **l'acceleració tangencial**.

$$\alpha R = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \cdot R \longrightarrow a_t = \alpha R = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \cdot R = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Les unitats de l'acceleració tangencial són: $[a_t] = 1 \text{ m} / \text{s}^2$

L'acceleració tangencial és la responsable de canviar el mòdul de la velocitat lineal. De les relacions anteriors es dedueix que l'equació³ del moviment circular uniformement accelerat és.

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 \cdot t + \frac{1}{2} \alpha \cdot t^2$$

Exemple 7. Una partícula realitza un m.c.u. de manera que descriu un cercle de $R = 5 \text{ m}$. Si dóna 50 voltes per minut Determineu:

- El període.
- La velocitat angular.
- L'acceleració centrípeta.
- L'equació del mcu.

Exemple 8. Una partícula realitza un m.c.u.a. de radi $R = 7 \text{ m}$. Si parteix del repòs i té una acceleració angular de 3 rad/s^2 . Trobeu.

- L'equació del moviment.
- L'angle recorregut quan $t = 5 \text{ s}$.
- L'acceleració centrípeta a $t = 7 \text{ s}$.
- L'acceleració total a $t = 7 \text{ s}$.
- La velocitat angular quan $t = 7 \text{ s}$.
- La velocitat lineal a $t = 7 \text{ s}$.

³ La deducció d'aquesta equació cau fora del nivell de primer de batxillerat ja que es necessita el càlcul integral.