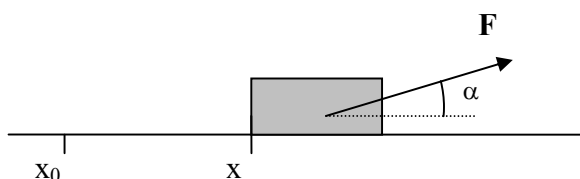


Tema 9. Treball i energia.

9.1. Treball causat per a una força F.

Un bloc està recolzat sobre una taula horitzontal. Sobre el bloc actua una força $\mathbf{F}$ amb un angle d'inclinació α respecte l'horitzontal. El bloc es desplaça des d'una posició inicial $\mathbf{x}_0$ fins la posició final $\mathbf{x}$, tal com mostra el dibuix.



Definim **treball de la força F** com el producte escalar dels vectors força i desplaçament.

$$W = \vec{F} \cdot \Delta \vec{r}$$

El producte escalar de dos vectors es pot escriure com:

$$W = \vec{F} \cdot \Delta \vec{r} = \begin{cases} F_x \Delta x + F_y \Delta y + F_z \Delta z \\ |\vec{F}| |\Delta \vec{r}| \cos \alpha \end{cases}$$

on F_x , F_y i F_z són els components del vector força $\mathbf{F}$ i Δx , Δy i Δz són els components del vector desplaçament $\Delta \mathbf{r}$. L'angle α és el que formen la força $\mathbf{F}$ i el desplaçament $\Delta \mathbf{r}$. $|\mathbf{F}|$ i $|\Delta \mathbf{r}|$ són els mòduls dels vectors $\mathbf{F}$ i $\Delta \mathbf{r}$.

9.2. Unitats del treball.

La unitat del treball en el sistema internacional és el joule (J). El joule és equivalent al producte del Newton pel metre.

$$[W] = [F][\Delta x] = 1N \cdot m = 1J$$

Altres unitats que s'acostumen a usar són els erg (erg) o els electronvolts (eV). L'equivalència amb el joule és es cada cas:

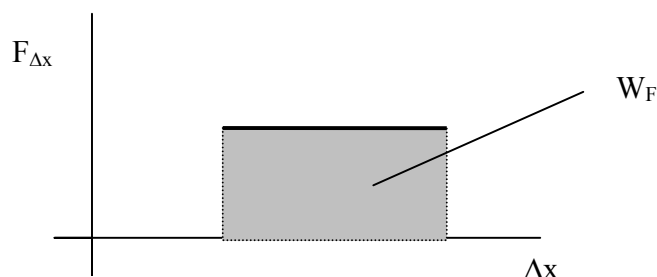
- $1 \text{ J} = 10^7 \text{ erg}$
- $1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 1 \text{ eV}$.

9.3. Representació gràfica del treball.

Per representar gràficament el treball prenem la següent expressió de treball:

$$W_F = F \cdot \Delta x \cdot \cos \theta = F \cdot \cos \theta \cdot \Delta x = F_{\Delta x} \cdot \Delta x$$

Prenem uns eixos de coordenades on en l'eix y quedarà representada la projecció de la força $\mathbf{F}$ sobre el desplaçament $\Delta \mathbf{x}$. Si la força és constant, en mòdul i direcció, al llarg de tot el desplaçament podem entendre el treball com l'àrea que queda sota la gràfica següent.

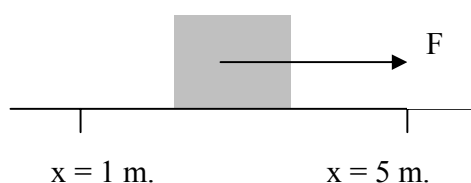


La utilitat d'aquesta gràfica la trobem per determinar el treball de forces variables en el temps o en l'espai. En molts d'aquests casos el càlcul del treball implica un càlcul integral que encara no coneixeu, però en alguns casos quan quedi la gràfica de figures regulars es pot calcular el treball de forma senzilla.

Per exemple. Un bloc de 15 kg de massa es mou des de la posició $x = 1$ m fins la posició $x=5$ m sota l'acció d'una força horitzontal i variable.

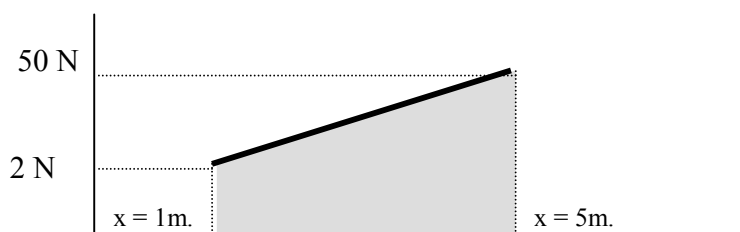
$$|\mathbf{F}| = 12x - 10$$

Calculeu el treball causat per la força $\mathbf{F}$.



Resposta:

Dibuixarem la projecció de la força en la direcció del desplaçament. La gràfica que queda és:



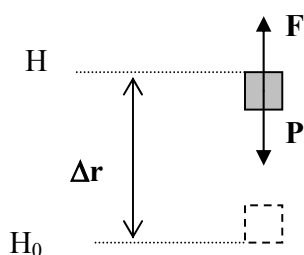
L'àrea sota la corba és el treball buscat:

$$W = F \cdot \Delta x = ((50-2) \cdot 4)/2 + 2 \cdot 4 = 104 \text{ J}$$

9.4. L'energia potencial gravitatòria.

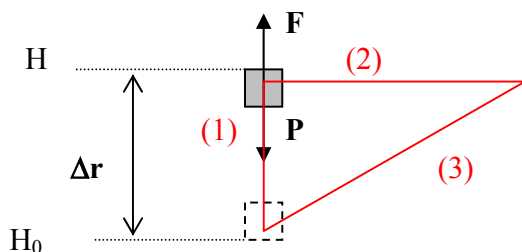
- Forces conservatives.

Prenguem un bloc de massa **m** situat a una altura H_0 de la superfície terrestre. El bloc s'eleva fins una altura H a causa de l'acció d'una força **F**. El treball de la força pes serà:



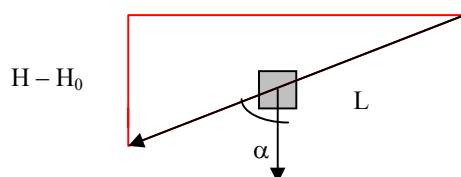
$$W_{\vec{P}} = \vec{P} \cdot \Delta \vec{r} = |\vec{P}| \cdot |\Delta \vec{r}| \cdot \cos \alpha = mg \cdot (H - H_0) \cdot \cos 180^\circ = -mg(\Delta H)$$

Ara portarem el bloc fins la posició inicial a través dels camins (2) i (3).



El treball en el tram (2) és nul ja que l'angle que formen el pes i el desplaçament és de 90° . El tram (3) el treball del pes és calcula aplicant la definició de treball és:

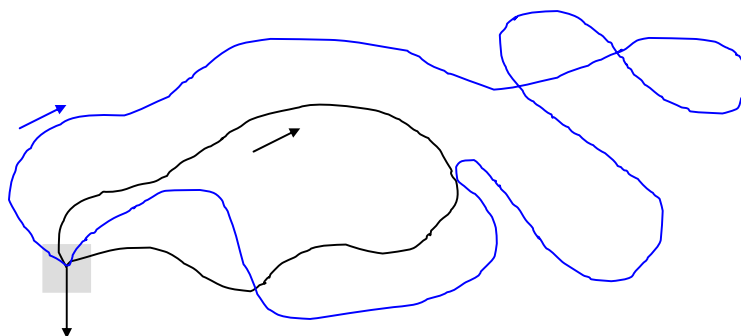
$$W^{(3)}_{\vec{P}} = \vec{P} \cdot \Delta \vec{r} = |\vec{P}| \cdot |\Delta \vec{r}| \cdot \cos \alpha = mg \cdot L \cdot \frac{(H - H_0)}{L} = mg(\Delta H)$$



Es veu doncs que el treball del pes en el cicle tancat és nul.

$$W_P^{(1)} + W_P^{(2)} + W_P^{(3)} = -mg\Delta H + 0 + mg\Delta H = 0J$$

En realitat el treball dels pes i per a qualsevol cicle és sempre nul. Aquí només s'ha demostrat per un cicle en particular.



$$W_{P(\text{cicle 1})} = W_{P(\text{cicle 2})} = 0 J$$

Això és molt important ja que una conseqüència directa és que el treball del pes és independent del camí seguit per la partícula. Aquesta característica és el que defineix les forces anomenades **conservatives**.

“Si el treball d’una força entre dos punts és independent del camí seguit diem que la força és conservativa.”

- **Classificació de forces conservatives i no conservatives.**

Totes les forces que coneixeu són **NO** conservatives excepte¹:

- El pes o força gravitatòria.
- Les forces que depenen de la posició $F(r)$.
- La força elèctrica causada per càrregues elèctriques.
- Les forces centrals.

COMPTE: En general la **normal** és una força **no conservativa** però en molts problemes el treball causat per ella és nul ja que és perpendicular al desplaçament.

¹ Compte: En un problema una força pot ser conservativa i en un altre problema la mateixa força pot ser no ho sigui.

- **Definició de l'energia potencial gravitatòria.**

Com que el pes és una força conservativa es pot definir una funció anomenada energia potencial gravitatòria², on la variació d'energia potencial és el treball del pes canviat de signe.

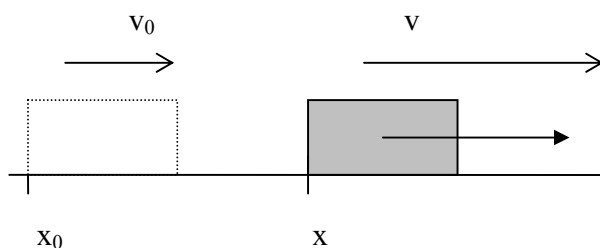
$$\Delta E_p = - W_p$$

Tenint en compte que el treball del pes només depèn de l'altura inicial i de l'altura final, podem definir de forma absoluta l'energia potencial gravitatòria com

$$E_p = mgh$$

9.5. **Energia cinètica.**

Considerem un bloc recolzat sobre una superfície horitzontal sense fregament. Sobre el bloc s'aplica una força horitzontal $\mathbf{F}$. Supposeu que el bloc es movia inicialment a una velocitat v_0 en la direcció de $\mathbf{F}$. Després de recórrer una distància Δx el bloc haurà augmentat la seva velocitat. Podem observar que el moviment que descriu el bloc és un moviment rectilini uniformement accelerat.



De la cinemàtica tenim:

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$$

i rescrivint l'equació anterior:

$$\frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}v_0^2 = a(x - x_0)$$

Podem multiplicar per la massa a cada banda de l'equació ens queda:

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = ma(x - x_0)$$

On el producte ma es pot substituir per la força resultant ($\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}$), on la suma de forces en aquest cas és:

$$\Sigma \vec{F} = \vec{F} + \vec{P} + \vec{N}$$

² Qualsevol força conservativa té associada la seva funció energia potencial. ($\Delta U = -W_F$)

Fixeu-vos que la normal i el pes s'anul·len i per tant ($\Sigma \mathbf{F} = \mathbf{F}$):

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = F(x - x_0) \quad (1)$$

L'expressió $\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$ és igual al treball d'una força i per tant tenen les mateixes unitats. Si tenen les mateixes unitats aquestes dues expressions representaran magnituds de característiques semblants. Anomenem doncs energia cinètica a la funció:

$$E_C = \frac{1}{2}mv^2$$

9.6. Teorema de les forces vives.

Si afegim els termes nuls ($\cos 0^\circ$, $W_P = 0$, $W_N = 0$) a l'equació (1), aquesta ens quedarà:

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = F(x - x_0)\cos 0^\circ + W_P + W_N$$

Substituint l'equació anterior per cada un dels termes que corresponguin ens quedarà l'expressió del teorema de les forces vives que ens diu que:

$$E_C - E_{C0} = W_F + W_P + W_N$$

“La variació d'energia cinètica d'una partícula és la suma dels treballs de totes les forces que actuen sobre ella.”

9.7. Teorema de conservació de l'energia. Definició de l'energia mecànica.

• Efecte de les forces conservatives

Fins ara heu vist que a tota partícula li associem dos tipus d'energies: l'energia potencial gravitatòria que depèn de l'altura a la que es trobi la partícula i l'energia cinètica que depèn del quadrat de la seva velocitat.

L'energia cinètica ve donada per l'expressió: $E_C = \frac{1}{2}mv^2$

L'energia potencial ve donada per: $E_P = mgh$

Considereu ara el següent exemple:

Un bloc es llança verticalment des de terra amb una velocitat $v_0 = 3 \text{ m/s}$.

- Calculeu l'alçada màxima a la que arribarà.
- Quin tipus de forces actuen sobre la partícula? Són conservatives o no?
- Calculeu les energies cinètiques i potencials de la partícula a les posicions següents:

- A terra.
- A l'alçada màxima.
- A 1/3 de l'alçada màxima.

Un cop fet l'exemple us adonareu que la suma de l'energia cinètica i potencial en cada una de les posicions es manté constant. Aquesta suma és una nova magnitud que s'anomena **energia mecànica**.

El fet que l'energia mecànica es conserva en aquest exemple és conseqüència del teorema de conservació de l'energia que ens diu:

“Si sobre una partícula només actuen forces conservatives l'energia mecànica es manté constant.”

• **Efecte de les forces no conservatives.**

El teorema de conservació de l'energia que hem enunciat abans s'ha de corregir quan sobre les partícules actuen forces no conservatives. Per veure com es modifica l'enunciat anterior considereu el següent exemple:

Un bloc llisca per un pla inclinat amb fregament ($\mathbf{F}_f$). El bloc inicialment està aturat de manera que va augmentant la seva velocitat a mesura que baixa pel pla.

- Calculeu la variació de l'energia cinètica
- Calculeu la variació d'energia potencial del bloc.
- Calculeu la variació d'energia mecànica de la partícula.

1. Pel teorema de les forces vives:

$$\Delta E_c = \Sigma W_F \Rightarrow \Delta E_c = W_P + W_N + W_{Ff}$$

2. Per la definició d'energia potencial.

$$\Delta E_p = -W_P$$

3. La variació d'energia mecànica és la suma de les variacions d'energia cinètica i mecànica.

$$\Delta E_m = \Delta E_c + \Delta E_p \Rightarrow \Delta E_m = (\cancel{W_P} + \cancel{W_N} + W_{Ff}) - \cancel{W_P} \Rightarrow \Delta E_m = W_{Ff}$$

En aquest cas la variació de l'energia mecànica és el treball de les forces de fregament. Quan hi hagi més d'una força no conservativa el teorema de conservació de l'energia s'enunciarà com de la següent manera:

“Si sobre una partícula actuen forces no conservatives la variació d'energia mecànica de la partícula és igual a la suma dels treballs de les forces no conservatives.”

9.8. Potència.

Definim potència com la quantitat de treball que es pot fer per unitat de temps.

$$P = \frac{W}{\Delta t} = \frac{\vec{F} \cdot \Delta \vec{x}}{\Delta t} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

Les seves unitats són els vats. $[P] = 1 \text{ J/s} = 1 \text{ W}$.

9.9. Equivalència entre massa i energia.

Quan l'any 1789 Antoine Lavoisier (1743-1794) va establir el principi de conservació de la massa en tota reacció química, va quedar establert que en tot procés físic i químic la quantitat de matèria es conserva.

Ara bé, s'ha de tenir en compte que tots aquests processos als que Lavoisier es referia es produeixen a nivell microscòpic³ i a velocitats petites. No va ser fins a finals del segle XIX i principis del segle XX que no es va començar a estudiar l'àtom a nivell del nucli atòmic. Fins aleshores només es coneixia bé l'escorça de l'àtom.

Albert Einstein establí amb la seva teoria de la relativitat que els objectes quan es mouen a velocitats petites ($v \ll c$)⁴ la seva massa es manté quasi inalterable, però quan les velocitats són elevades ($v \sim c$) aleshores la massa de les partícules augmenta. Segons Einstein aquest augment ve donat per la relació següent:

$$\Delta m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - m_0$$

Aquest augment de massa que pateixen les partícules que es mouen a una velocitat v provoca que les partícules guanyin energia associada a aquest moviment. Segons Einstein l'augment d'energia ve donat per:

$$\Delta E = \Delta m \cdot c^2$$

Veiem doncs que això té relació amb l'energia associada al moviment, l'energia cinètica.

$$\Delta E = \Delta m \cdot c^2 = \left(\frac{\int \frac{c^2}{h \nu} - m^0}{m^0} - m^0 \right) \cdot c^2 = m^0 \cdot c^2 \cdot \left(\frac{\int \frac{c^2}{h \nu} - I}{I} - 1 \right)$$

³ En les reaccions químiques entre compostos químics les úniques parts de l'àtom que intervien en aquests processos són els electrons. Els intercanvis d'energia que apareixen tenen un origen molt diferent a l'equivalència entre massa i energia.

⁴ c : Indica el valor de la velocitat de la llum e el buit que és $299.795 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \approx 300.000 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$

Si tenim en compte que $\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ es pot desenvolupar com una sèrie de Taylor⁵:

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{v^2}{c^2}\right) + \frac{3}{8}\left(\frac{v^2}{c^2}\right)^2 + \dots$$

Aleshores substituint en la variació de l'energia ens quedarà ...

$$= m^0 \cdot \left(\frac{5}{I} h_5 + \frac{8}{3} \frac{c_5}{h_4} + \dots \right) = \frac{5}{I} m^0 h_5 + \frac{8}{3} m^0 \frac{c_5}{h_4} + \dots$$

$$\Delta E = m^0 \cdot c_5 \cdot \left(\frac{\sqrt{1 - \frac{c_5}{h_5}}}{I} - I \right) = m^0 \cdot c_5 \cdot \left(I + \frac{5}{I} \frac{c_5}{h_5} + \frac{8}{3} \left(\frac{c_5}{h_5} \right)_5 + \dots - I \right) =$$

Tal i com hem estudiat nosaltres en aquest tema les velocitats de les partícules sempre són molt més petites que la velocitat de la llum ($v \ll c$). Aleshores el terme v^4/c^2 i els d'ordre superiors són negligibles i ens queda que per a velocitats petites, l'equació d'Einstein és l'energia cinètica que tots coneixem.

$$\Delta E = m_0 \cdot c^2 \approx \frac{1}{2} m_0 v^2 \Leftrightarrow v \ll c$$

En el tema 12 veurem una aplicació més extensa de l'equivalència entre la massa i l'energia de les partícules.

⁵ Si una funció $f(x)$ és continua i derivable en un entorn de $x=a$ aleshores aquesta funció es pot aproximar per un desenvolupament en sèrie de Taylor donat per : $f(x) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \frac{d^k f(a)}{dx^k} \cdot (x-a)^k$