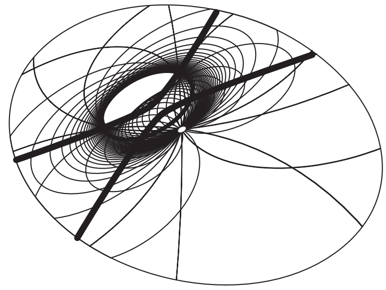
Seccions còniques



Ramon Nolla
Departament de Matemàtiques
IES Pons d'Icart

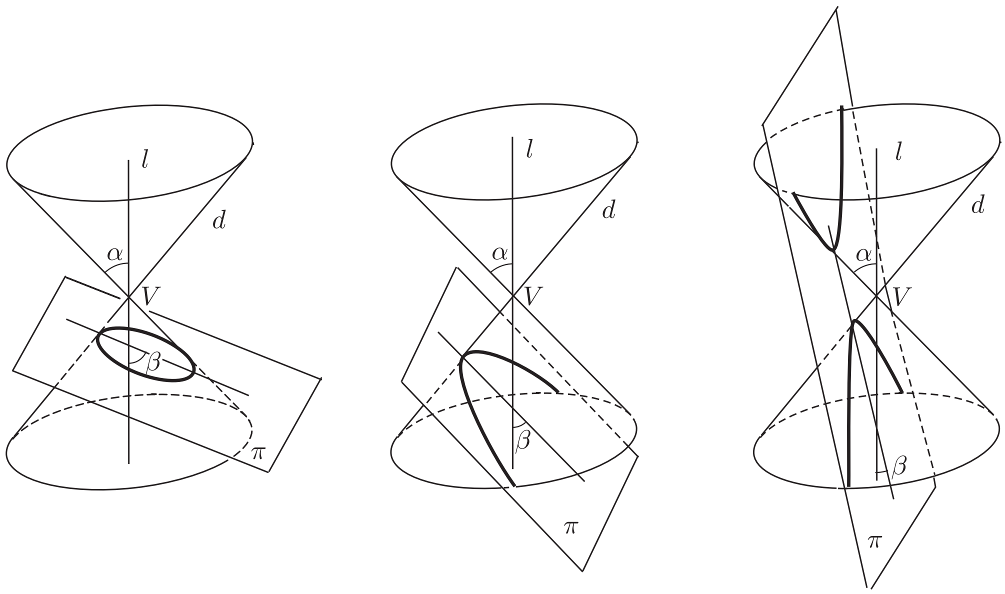
1 Introducció

S'atribueix a Menecm (IV aC) el descobriment de les seccions còniques. No se sap de quina manera el mateix Menecm o algun altre investigador trobà alguna d'aquestes corbes en el curs dels seus treballs. No hi ha cap prova que la interpretació que atribueix el descobriment a partir de l'estudi de les seccions d'un con, sigui encertada. Aquestes corbes haguessin pogut aparèixer en l'estudi d'algun altre problema i després ser relacionades amb les seccions d'un con. La cita en què es basa la suposició que Menecm en fos el descobridor permet interpretacions diverses.[1] En aquests apunts s'introduiran aquestes corbes mitjançant les seccions d'un con. Després es caracteritzaran utilitzant una relació mètrica dels seus punts amb diversos elements del seu pla de secció. Això permetrà fer-ne una traducció, prèvia introducció d'un sistema de referència, al llenguatge algebraic de la geometria analítica.

2 Seccions d'un con per un pla

Considerem el con generat per la recta d en girar al voltant de la recta l, de manera que $d \cap l = V$ és un punt fix i l'angle α entre les dues rectes és constant.[2] Sigui un pla π que no conté el punt V i talla el con en diferents seccions, i l'angle β que forma amb la recta l. Llavors, establim les definicions següents:

- Anomenem **el·lipse** la intersecció de les dues superfícies quan $\beta > \alpha$.
- Anomenem **paràbola** la intersecció de les dues superfícies quan $\beta = \alpha$.
- Anomenem **hipèrbola** la intersecció de les dues superfícies quan $\beta < \alpha$.



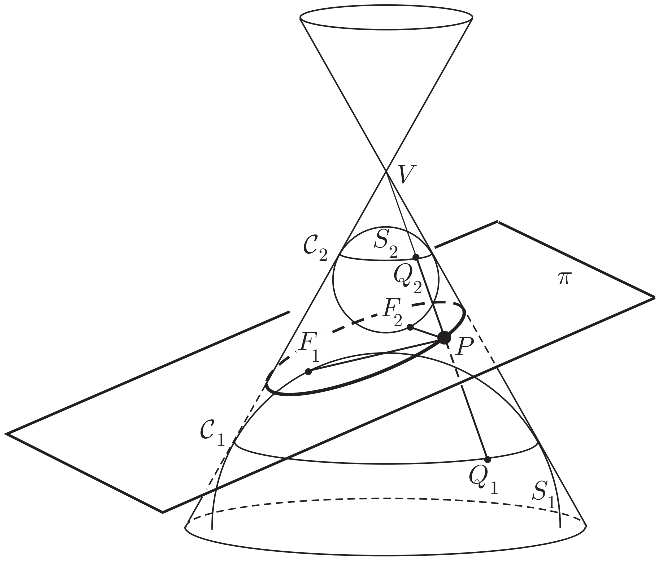
[1]Vegeu l'apèndix final

[2]Anomenem *generatriu* qualsevol recta d que generi el con, i la recta l rep el nom d'*eix* del con.

Pretenem fer un tractament algebraic en el pla d'aquestes seccions. Per aconseguir-ho cercarem una caracterització mètrica dels seus punts. Utilitzarem el camí seguit per Germinal Dandelin(1794–1847) l'any 1822.

2.1 Caracterització de l'el·lipse per punts

Considerem les esferes S_1 i S_2 inscrites en el con, tangents al pla π de la secció. Siguin F_1 i F_2 els punts de tangència. Si estudiem per a qualsevol punt P de l'el·lipse la suma de distàncies $d(P,F_1)+d(P,F_2)$, es compleix que és independent de P i igual a la distància determinada pel segment Q_1Q_2, —seguint qualsevol generatriu del con—, entre les dues circumferències $\mathcal{C}_1$ i $\mathcal{C}_2$ de contacte de les esferes amb el con. Efectivament,



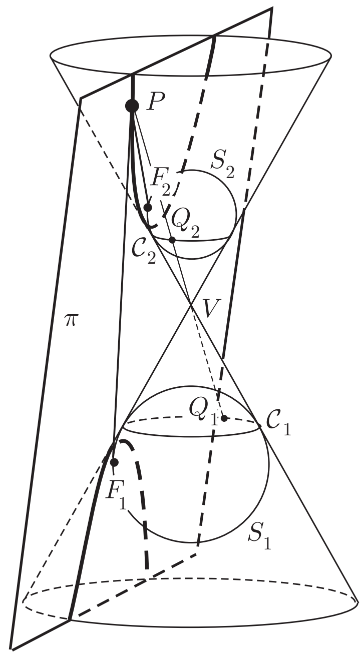
Sigui la generatriu VP del con. Aquesta toca les circumferències $\mathcal{C}_1$ i $\mathcal{C}_2$ en els punts Q_1 i Q_2. En ser aquestes circumferències perpendiculars a l'eix del con, la distància $d(Q_1,Q_2)$ és constant quan P es mou sobre l'el·lipse. Llavors, en ser PQ_1 i PF_1 tangents a l'esfera S_1, i PQ_2 i PF_2 tangents a l'esfera S_2,

$$d(Q_1,Q_2) = d(P,Q_1) + d(P,Q_2) = d(P,F_1) + d(P,F_2).$$

Per tant, tenim caracteritzats els punts P de l'el·lipse, a partir de dos punts F_1 i F_2 i una suma de distàncies que es manté constant i major, per la desigualtat triangular, que $d(F_1,F_2)$.

2.2 Caracterització de la hipèrbola per punts

Considerem, com abans, les esferes S_1 i S_2 inscrites en el con i tangents al pla π de la secció. Siguin F_1 i F_2 els punts de tangència. Si estudiem per a qualsevol punt P de la hipèrbola la diferència de distàncies $d(P,F_1) - d(P,F_2)$, es compleix que el seu valor absolut és independent de P i igual a la distància determinada per Q_1Q_2, —seguint qualsevol generatriu del con—, entre les dues circumferències $\mathcal{C}_1$ i $\mathcal{C}_2$ de contacte de les esferes amb el con. Efectivament,
Com en el cas de l'el·lipse, la generatriu VP toca les circumferències $\mathcal{C}_1$ i $\mathcal{C}_2$ en els punts Q_1 i Q_2, i $d(Q_1,Q_2)$ és manté constant en variar P. Llavors, en ser PQ_1 i PF_1 tangents a l'esfera S_1, i PQ_2 i PF_2 tangents a l'esfera S_2,

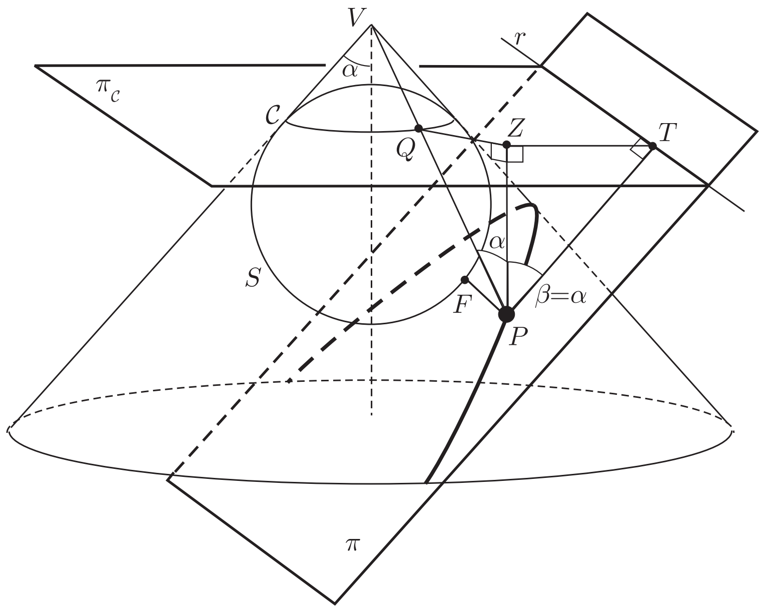


$$d(Q_1, Q_2) = |d(P, Q_1) - d(P, Q_2)| = |d(P, F_1) - d(P, F_2)|.$$

Per tant, s'han caracteritzat els punts P de la hipèrbola, a partir de dos punts F_1 i F_2 i una diferència de distàncies que es manté constant en valor absolut i menor, per la desigualtat triangular, que $d(F_1, F_2)$.

2.3 Caracterització de la paràbola per punts. Presentació *focus–directriu* de les còniques

El pla π de secció de la paràbola i el con només determinen una esfera S tangent inscrita que tingui el seu centre, com en els casos anteriors, en l'eix del con. Per trobar una caracterització mètrica dels punts P de la paràbola es considera el pla $\pi_{\mathcal{C}}$ que conté la circumferència de contacte d'aquesta esfera amb el con. Llavors, la línia d'actuació passa per considerar la recta r, —anomenada *directriu*—, d'intersecció del pla $\pi_{\mathcal{C}}$ amb el pla π de secció de la paràbola, el punt de tangència F de l'esfera amb el pla π i la seva relació mètrica amb els punts P de la paràbola. Aquest tractament també es pot fer amb les altres dues seccions còniques i proporciona una caracterització mètrica alternativa unificada de les tres seccions còniques.



Sigui α la meitat de l'angle en el vèrtex del con, i β l'angle del pla π de la secció amb l'eix del con. Siguin els punts:

- R: Intersecció del cercle $\mathcal{C}$ amb la generatriu VP.
- Z: Projecció ortogonal de P sobre el pla $\pi_{\mathcal{C}}$.
- T: Projecció ortogonal de P sobre la recta r.

El tractament general, —el qual il·lustrem per al cas de la paràbola, $\beta = \alpha$—, es fa a partir dels triangles PZQ, PZT i la comparació dels segments PF i PT. Per trigonometria de triangles rectangles i per les propietats de les rectes tangents a una esfera observem,

$$\left.\begin{array}{l} PZ = PR\cos\alpha \\ PZ = PT\cos\beta \\ PR = PF \end{array}\right\} \Longrightarrow PF\cos\alpha = PT\cos\beta.$$

Llavors, en ser PT perpendicular a r, tenim $d(P,T) = d(P,r)$ i, per tant,

$$d(P,F) = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha}\, d(P,r).$$

Utilitzem la notació $e = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha}$, i anomenem el seu valor *excentricitat*. Llavors, hem obtingut una caracterització mètrica, anomenada *focus-directriu*, per als punts P de la paràbola i, també, de les altres dues seccions còniques. Efectivament,

Cònica		Excentricitat	Caracterització mètrica
Paràbola	$\beta = \alpha$	$e = 1$	$d(P,F) = d(P,r)$
El·lipse	$\beta > \alpha$	$e < 1$	$d(P,F) = e \cdot d(P,r)$
Hipèrbola	$\beta < \alpha$	$e > 1$	$d(P,F) = e \cdot d(P,r)$.

3 Tractament mètric i equacions de les còniques

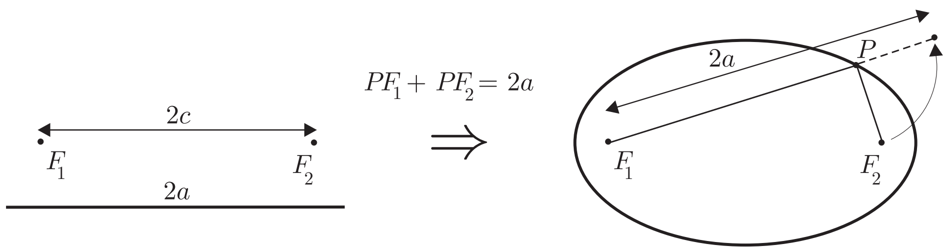
Les propietats trobades a la secció anterior, que caracteritzaven mètricament cadascuna de les seccions còniques, permeten definir-les d'una forma alternativa.

3.1 El·lipse

Definició 1 *En un pla π, donats dos punts F_1 i F_2 diferents, i un nombre real a tal que $2a > d(F_1,F_2)$, anomenem* el·lipse *de* focus F_1 *i* F_2, *i* eix major *o* principal $2a$,

$$\text{el lloc geomètric dels punts } P \in \pi \text{ tals que } d(P,F_1) + d(P,F_2) = 2a. \tag{1}$$

Anomenarem *distància focal* la distància $d(F_1,F_2)$ i la representarem per $2c$ en què c és un nombre real positiu. La inclusió del factor 2 en $2c$ permet que el tractament analític de la corba sigui més còmode.



3.1.1 Equació reduïda de l'el·lipse

Farem una elecció d'un sistema de referència en el pla de l'el·lipse, que proporcionarà una representació algebraica de l'el·lipse força simplificada. Concretament, considerem la referència

$$\{O;\vec{e}_1,\vec{e}_2\}, \text{ tal que } \begin{cases} O \text{ és el punt mitjà de } F_1 \text{ i } F_2, \\ \vec{e}_1 = \dfrac{\overrightarrow{OF}_2}{|\overrightarrow{OF}_2|}, \\ \text{angle orientat } (\vec{e}_1,\vec{e}_2) = +90°, \quad \text{i} \quad |\vec{e}_2| = 1. \end{cases}$$

Ara, el càlcul del lligam entre les coordenades x, y dels punts de l'el·lipse es redueix a una mica d'àlgebra de segon grau.

En la referència donada tenim $F_1(-c, 0)$ i $F_2(c, 0)$ i, si $P(x, y)$ és qualsevol punt de l'el·lipse, de la igualtat (1) s'obté

$$\begin{aligned} d(P,F_1)+d(P,F_2)=2a &\iff \sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a \iff \\ \iff\ & (x+c)^2+y^2=(x-c)^2+y^2+4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} \iff \\ \iff\ & -cx+a^2=a\sqrt{(x-c)^2+y^2} \iff a^2(a^2-c^2)=(a^2-c^2)x^2+a^2y^2. \end{aligned} \qquad (2)$$

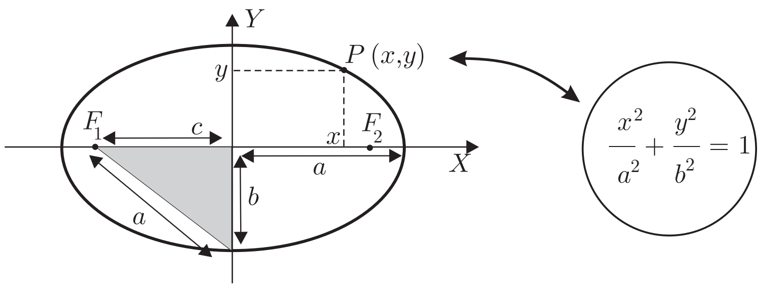
Llavors, en ser, per definició, $a > c$, tenim $a^2 - c^2 > 0$. Per tant podem representar $a^2 - c^2$ com un nombre quadrat. Així, si fem $b^2 = a^2 - c^2$ i dividim l'última equació (2) per l'expressió a^2b^2, obtenim l'equació reduïda

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}.$$

3.1.2 Algunes observacions sobre l'el·lipse

A partir de l'equació reduïda és de fàcil comprovació que:

- L'el·lipse té dos eixos de simetria: La recta F_1F_2 determinada pels dos focus i la recta perpendicular a F_1F_2 pel punt mitjà O de F_1 i F_2. Les interseccions d'aquests eixos amb la corba reben el nom de *vèrtexs* de l'el·lipse.
- Les coordenades dels vèrtexs són $(a, 0)$, $(-a, 0)$, $(0, b)$ i $(0, -b)$.
- El punt en que es tallen els dos eixos de simetria és centre de simetria de l'el·lipse.
- Cadascun dels dos segments d'extrems un focus i un punt P de l'el·lipse, rep el nom de *radi vector* del punt P.
- L'excentricitat e de l'el·lipse és igual al valor de $\frac{c}{a}$.
- Si mantenim els vèrtexs, sobre l'eix principal, fixos, l'el·lipse degenera cap a un segment quan $e \longrightarrow 1$ i cap a una circumferència quan $e \longrightarrow 0$.

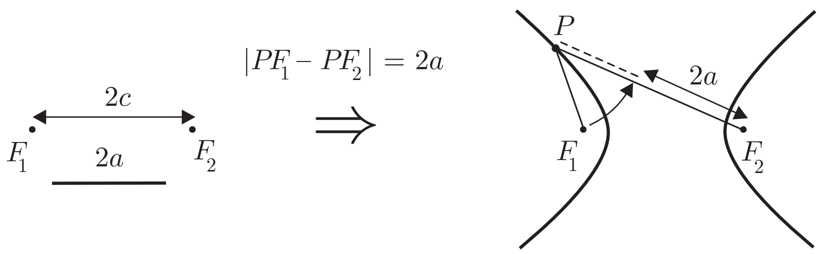


3.2 Hipèrbola

Definició 2 *En un pla π, donats dos punts F_1 i F_2 diferents, i un nombre real a tal que $2a < d(F_1, F_2)$, anomenem* hipèrbola *de focus F_1 i F_2, i eix principal $2a$,*

$$\textit{el lloc geomètric dels punts } P \in \pi \textit{ tals que } |d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a. \qquad (3)$$

Igual que per a l'el·lipse, anomenarem *distància focal* la distància $d(F_1, F_2)$ i la representarem per $2c$ en què c és un nombre real positiu.



3.2.1 Equació reduïda de la hipèrbola

Farem una elecció d'un sistema de referència com en el cas de l'el·lipse. Recordem,

$$\{O;\vec{e}_1,\vec{e}_2\},\ \text{tal que}\ \begin{cases} O \text{ és el punt mitjà de } F_1 \text{ i } F_2, \\ \vec{e}_1 = \dfrac{\overrightarrow{OF}_2}{|\overrightarrow{OF}_2|}, \\ \text{angle orientat } (\vec{e}_1,\vec{e}_2) = +90°, \quad \text{i} \quad |\vec{e}_2| = 1. \end{cases}$$

En la referència donada tenim $F_1(-c,0)$ i $F_2(c,0)$ i, si $P(x,y)$ és qualsevol punt de l'hipèrbola, de la igualtat (3) s'obté

$$\begin{aligned} &|d(P,F_1) - d(P,F_2)| = 2a \iff \sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2} = \pm 2a \iff \\ &\iff \ (x+c)^2 + y^2 = (x-c)^2 + y^2 + 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} \iff \\ &\iff \ -cx + a^2 = \pm a\sqrt{(x-c)^2+y^2} \iff a^2(a^2-c^2) = (a^2-c^2)x^2 + a^2y^2. \end{aligned} \tag{4}$$

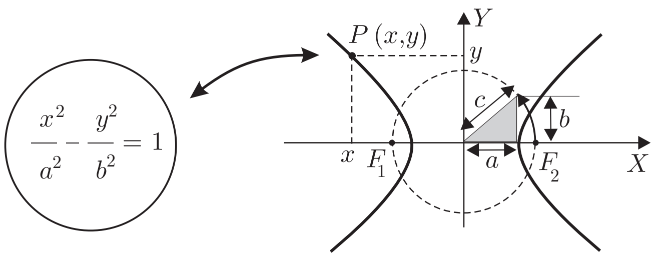
Llavors, en ser, per definició, $a < c$, tenim $c^2 - a^2 > 0$. Per tant podem representar $c^2 - a^2$ com un nombre quadrat. Ara, si com en el cas de l'el·lipse, fem $b^2 = c^2 - a^2$ i dividim l'última equació (4) per l'expressió a^2b^2, obtenim

$$-a^2b^2 = -b^2x^2 + a^2y^2 \iff \boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}.$$

3.2.2 Algunes observacions sobre la hipèrbola

A partir de l'equació reduïda és de fàcil comprovació que:

- La hipèrbola té dos eixos de simetria: La recta F_1F_2 determinada pels dos focus i la recta perpendicular a F_1F_2 pel punt mitjà O de F_1 i F_2. Les dues interseccions de l'eix F_1F_2 amb la corba reben el nom de *vèrtexs* de la hipèrbola.
- El punt en que es tallen els dos eixos de simetria és un centre de simetria de la hipèrbola.
- Les coordenades dels vèrtexs són $(a,0)$ i $(-a,0)$.
- Cadascun dels dos segments d'extrems un focus i un punt P de la hipèrbola, rep el nom de *radi vector* del punt P.
- L'excentricitat e de la hipèrbola es pot calcular mitjançant la fracció $\frac{c}{a}$.
- Si mantenim els vèrtexs, sobre l'eix principal, fixos, la hipèrbola degenera cap a un parell de rectes paral·leles quan $e \longrightarrow \infty$ i cap a un parell de semirectes quan $e \longrightarrow 1$.



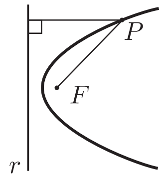
3.3 Paràbola

Definició 3 *En un pla π, donats una recta r i un punt F exterior a r, anomenem* paràbola *de* focus F *i* directriu r,

$$\textit{el lloc geomètric dels punts } P \in \pi \ \textit{ tals que } d(P,F) = d(P,r). \tag{5}$$

La distància $p = d(F, r)$ rep el nom de *paràmetre* de la paràbola.

$$F \notin r$$
$$d(P, F) = d(P, r)$$



3.3.1 Equació reduïda de la paràbola

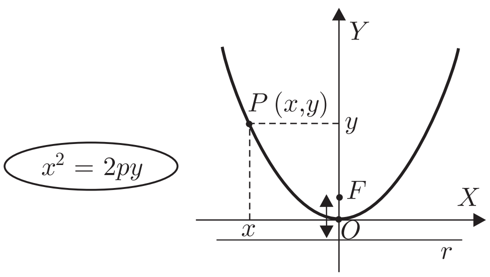
Fem l'elecció d'un sistema de referència $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ tal que

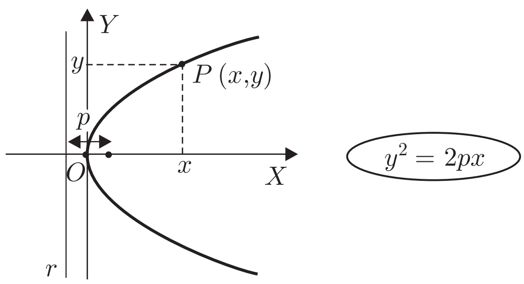
$$\begin{cases} O \text{ pertany a la recta, per } F, \text{ perpendicular a } r \text{ i } \ d(O,F) = d(O,r), \\ \vec{e}_1 = \dfrac{\overrightarrow{OF}}{|\overrightarrow{OF}|}, \\ \text{angle orientat } (\vec{e}_1, \vec{e}_2) = +90°, \quad \text{i} \quad |\vec{e}_2| = 1. \end{cases}$$

En la referència donada tenim $F(\frac{p}{2}, 0)$, $r : x = -\frac{p}{2}$ i, si $P(x, y)$ és qualsevol punt de la paràbola, de la igualtat (5) s'obté

$$d(P,F) = d(P,r) \Longleftrightarrow \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \frac{\left|x + \frac{p}{2}\right|}{\sqrt{1^2 + 0^2}} \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \quad x^2 + \frac{p^2}{4} - px + y^2 = x^2 + \frac{p^2}{4} + px \Longleftrightarrow \boxed{y^2 = 2px}.$$

Si en l'elecció de referència intercanviem els papers de $\vec{e}_1$ i $\vec{e}_2$, obtenim l'equació $\boxed{x^2 = 2py}$.





3.3.2 Algunes observacions sobre la paràbola

- La paràbola té un eix de simetria: La recta que passa pel seu focus F i és perpendicular a la directriu. La intersecció de l'eix amb la corba rep el nom de *vèrtex* de la paràbola.
- El segment d'extrems F i un punt P de la paràbola, rep el nom de *radi vector* de P.
- La paràbola es pot obtenir com la corba límit d'una el·lipse quan un focus i el vèrtex adjacent es mantenen fixos i l'altre focus es desplaça a l'infinit.

4 Equació polar de les còniques. Excentricitat

Considerem una cònica i un sistema de referència ortonormal tals que:

– El focus F de la cònica és el punt $(0, 0)$.

– La directriu r és la recta $x = k > 0$.

– P un punt genèric de la cònica.

Llavors, si anomenem $d(P,F) = \rho$, i $\widehat{PFX} = \theta$ tenim, a partir de la presentació focus-directriu,

$$d(P,F) = e \cdot d(P,r) \Longleftrightarrow \rho = |k - \rho\cos\theta|.$$

Aquesta equació, rep el nom d'equació polar de la cònica i es pot presentar explícitament així:

a) Si P pertany al semiplà determinat per r i F, tenim $\rho = e(k - \rho\cos\theta)$ i la cònica s'expressa

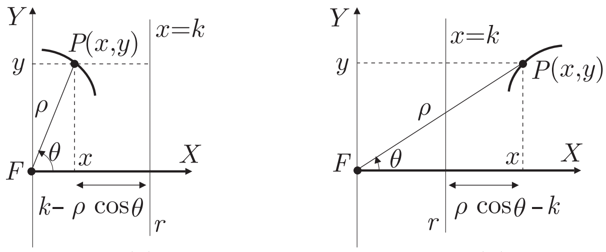
$$\rho = \frac{ek}{1 + e\cos\theta},$$

en la qual, en ser $\rho > 0$, e pot tenir qualsevol valor positiu. O sigui que aquesta equació pot representar una el·lipse, una branca d'hipèrbola o una paràbola.

b) Si P no pertany al semiplà esmentat, tenim $\rho = e(\rho\cos\theta - k)$ i la cònica s'expressa

$$\rho = \frac{ek}{e\cos\theta - 1},$$

en la qual, en ser $\rho > 0$, s'ha de complir $e > 1$. O sigui que aquesta equació només pot representar una branca d'hipèrbola.



Cas (a) Cas (b)

A partir d'aquestes expressions es pot comprovar que l'excentricitat e compleix, en el cas de l'el·lipse i la hipèrbola, $e = \frac{c}{a}$. Efectivament, ho veurem en el cas de l'el·lipse mitjançant la recerca de la seva equació reduïda:

$$\rho = \frac{ek}{1+e\cos\theta} \Longleftrightarrow \sqrt{x^2+y^2} = \frac{ek}{1 + e\,\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}} \Longleftrightarrow \sqrt{x^2+y^2} = e(k+x) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow (1-e^2)x^2 + y^2 + 2e^2kx = e^2k^2 \Longleftrightarrow x^2 + \frac{y^2}{1-e^2} + \frac{2e^2k}{1-e^2}\,x = \frac{e^2k^2}{1-e^2}.$$

Si completem quadrats amb la finalitat d'eliminar la part lineal de l'equació i poder fer un trasllat d'eixos de referència, tenim

$$\left(x + \frac{e^2k}{1-e^2}\right)^2 + \frac{y^2}{1-e^2} = \frac{e^2k^2}{1-e^2} + \frac{e^4k^2}{(1-e^2)^2}.$$

Llavors si treballem amb les coordenades $x_N = x + \dfrac{e^2k}{1-e^2}$, $y_N = y$, obtenim l'equació reduïda

$$x_N^2 + \frac{y_N^2}{1-e^2} = \frac{e^2k^2}{(1-e^2)^2} \Longleftrightarrow \frac{x_N^2}{\frac{e^2k^2}{(1-e^2)^2}} + \frac{y_N^2}{\frac{e^2k^2}{1-e^2}} = 1.$$

Llavors,

$$\left(\frac{c}{a}\right)^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2} = 1 - \frac{b^2}{a^2} = 1 - \frac{\frac{e^2k^2}{1-e^2}}{\frac{e^2k^2}{(1-e^2)^2}} = 1 - (1-e^2) = e^2 \Longrightarrow \frac{c}{a} = e.$$

5 Tangents i asímptotes.

Cercarem les equacions de tangents i asímptotes a les còniques quan aquestes venen donades per les seves equacions reduïdes. Utilitzarem el concepte de tangent i asímptota que proporcionen el càlcul de límits i el càlcul diferencial.

5.1 Recta tangent a l'el·lipse per un dels seus punts

Sigui $(x_0, y_0) \in$ el·lipse d'equació $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. La derivada en x_0 satisfà

$$\frac{2x_0}{a^2} + \frac{2y_0y_0'}{b^2} = 0 \Longleftrightarrow y_0' = -\frac{b^2x_0}{a^2y_0}\,.$$

Llavors, l'equació de la recta tangent en el punt (x_0, y_0) és

$$y - y_0 = -\frac{b^2x_0}{a^2y_0}(x - x_0) \Longleftrightarrow b^2x_0x + a^2y_0y = b^2x_0^2 + a^2y_0^2.$$

Ara bé, en ser $(x_0, y_0) \in$ el·lipse, tenim $b^2x_0^2 + a^2y_0^2 = a^2b^2$. Per tant, la recta tangent es pot presentar

$$b^2x_0x + a^2y_0y = a^2b^2 \Longleftrightarrow \boxed{\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} = 1}.$$

És immediat comprovar que les rectes amb un sol punt de contacte amb l'el·lipse són tangents a l'el·lipse.

5.2 Recta tangent a la hipèrbola per un dels seus punts

Sigui $(x_0, y_0) \in$ hipèrbola d'equació $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. La derivada en x_0 satisfà

$$\frac{2x_0}{a^2} - \frac{2y_0y_0'}{b^2} = 0 \Longleftrightarrow y_0' = \frac{b^2x_0}{a^2y_0}\,.$$

Llavors, l'equació de la recta tangent en el punt (x_0, y_0) és

$$y - y_0 = \frac{b^2x_0}{a^2y_0}(x - x_0) \Longleftrightarrow b^2x_0x - a^2y_0y = b^2x_0^2 - a^2y_0^2.$$

Com abans, en ser $(x_0, y_0) \in$ hipèrbola, tenim $b^2x_0^2 - a^2y_0^2 = a^2b^2$. Per tant, la recta tangent té equació

$$b^2x_0x - a^2y_0y = a^2b^2 \Longleftrightarrow \boxed{\frac{x_0x}{a^2} - \frac{y_0y}{b^2} = 1}.$$

5.3 Recta tangent a la paràbola per un dels seus punts

Sigui $(x_0, y_0) \in$ paràbola d'equació $y^2 = 2px$. La derivada en x_0 satisfà

$$2y_0y_0' = 2p \Longleftrightarrow y_0' = \frac{p}{y_0}\,.$$

Llavors, l'equació de la recta tangent en el punt (x_0, y_0) és

$$y - y_0 = \frac{p}{y_0}(x - x_0) \Longleftrightarrow yy_0 - 2px_0 = px - px_0 \Longleftrightarrow \boxed{yy_0 = p(x + x_0)}\,.$$

És immediat comprovar que les rectes amb un sol punt de contacte amb la paràbola i no paral·leles a l'eix són tangents a la paràbola.

5.4 Asímptotes d'una hipèrbola

Veurem que la hipèrbola té sempre dues asímptotes. Ho demostrarem en llenguatge analític, a partir de la referència que proporcionava la seva equació reduïda. Concretament, considerarem els punts de la hipèrbola amb ordenada y positiva. Llavors, per la simetria de la corba respecte l'eix OX podrem completar l'estudi.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ i } y \geq 0 \Longrightarrow y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

És immediat comprovar que no té asímptotes verticals ni horitzontals. Quant a les asímptotes oblíqües $y = mx + n$ tenim,

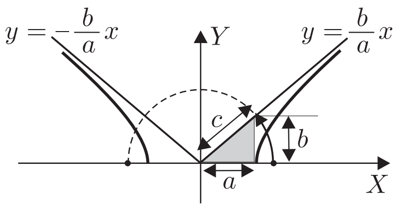
$$\begin{cases} m = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}{x} = \dfrac{b}{a}\cdot \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{1 - \dfrac{a^2}{x^2}} = \dfrac{b}{a} \\ n = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2} - \dfrac{b}{a}x\right) = \dfrac{b}{a}\cdot \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-a^2-x^2}{\sqrt{x^2-a^2}+x} = \dfrac{-a^2}{+\infty} = 0. \end{cases}$$

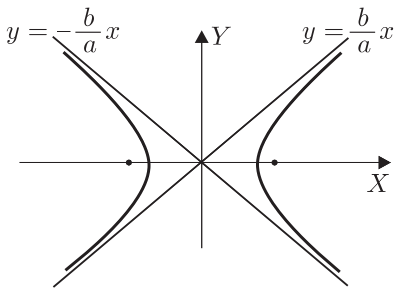
$$\begin{cases} m = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}{x} = \dfrac{b}{a}\cdot \lim\limits_{x\to-\infty} -\sqrt{1 - \dfrac{a^2}{x^2}} = -\dfrac{b}{a} \\ n = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2} + \dfrac{b}{a}x\right) = \dfrac{b}{a}\cdot \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2-a^2-x^2}{\sqrt{x^2-a^2}-x} = \dfrac{-a^2}{+\infty} = 0. \end{cases}$$

O sigui que, quan $y > 0$, per a $x \to +\infty$ i per a $x \to -\infty$, les asímptotes són, respectivament,

$$y = \frac{b}{a}x \quad \text{i} \quad y = -\frac{b}{a}x.$$

A partir d'aquí, tenint en compte la simetria respecte l'eix OX, les dues rectes anteriors són asímptotes quan $x \to \pm\infty$, tal com es mostra en el gràfic adjunt.





És immediat comprovar que les rectes amb un sol punt de contacte amb la hipèrbola i no paral·leles a les asímptotes són tangents a la hipèrbola.

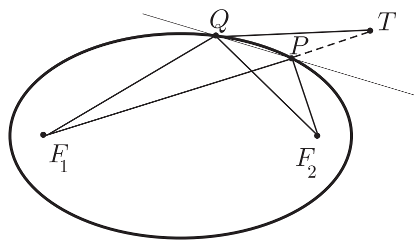
6 Una propietat de les tangents

Teorema 1 *La tangent a una el·lipse, de focus F_1, F_2 i eix principal $2a$, en un punt P d'aquesta, és la bisectriu exterior dels radi-vectors d'aquest punt.*

Teorema 2 *La tangent a una hipèrbola, de focus F_1, F_2 i eix principal $2a$, en un punt P d'aquesta, és la bisectriu dels radi-vectors d'aquest punt.*

Teorema 3 *La tangent a una paràbola, de focus F i eix de simetria r, en un punt P d'aquesta, és la bisectriu exterior de l'angle que forma el radi-vector d'aquest punt amb la paral·lela a l'eix de simetria pel punt.*

Farem dues demostracions detallades del primer d'aquests teoremes. Per als altres dos es poden fer demostracions molt similars.



• **Demostració sintètica:** Si això no fos veritat la bisectriu tallaria en un altre punt Q a l'el·lipse. Llavors, si considerem el punt T, simètric de F_2 respecte de la bisectriu, aquesta bisectriu és mediatriu del segment F_2T. Per tant, per la propietat dels punts de l'el·lipse i per la desigualtat triangular aplicada a F_1QT,

$$2a = F_1Q + QF_2 = F_1Q + QT > F_1T = F_1P + PT = F_1P + PF_2 = 2a \Longrightarrow 2a > 2a,$$

la qual cosa és contradictòria. Conseqüentment la suposició de sortida és falsa i el teorema queda demostrat.

• **Demostració analítica:** Treballem amb el sistema de referència que proporcionava l'equació reduïda de l'el·lipse. Llavors, amb les notacions de la demostració anterior

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{y_0}{x_0+c} = \text{pendent de la recta } F_1P \\ m_2 &= \frac{y_0}{x_0-c} = \text{pendent de la recta } F_2P \\ m_t &= -\frac{b^2x_0}{a^2y_0} = \text{pendent de la recta tangent en } P. \end{aligned}$$

Veurem que es compleix la igualtat de l'angle entre F_1P i la tangent, i F_2P i la tangent, és a dir

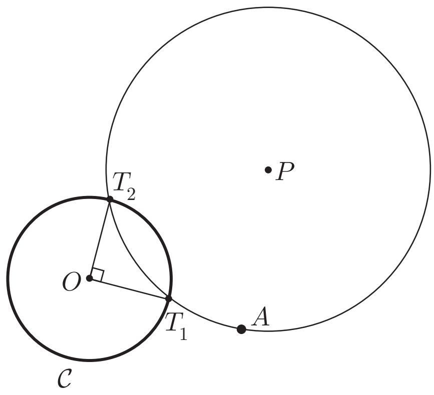
$$\left|\frac{m_1-m_t}{1+m_1m_t}\right| = \left|\frac{m_2-m_t}{1+m_2m_t}\right|.$$

Efectivament,

$$\begin{aligned} \left|\frac{m_1-m_t}{1+m_1m_t}\right| &= \left|\frac{\dfrac{y_0}{x_0+c}+\dfrac{b^2x_0}{a^2y_0}}{1-\dfrac{y_0}{x_0+c}\cdot\dfrac{b^2x_0}{a^2y_0}}\right| = \left|\frac{a^2y_0^2+b^2x_0^2+b^2x_0c}{(x_0+c)a^2y_0-y_0b^2x_0}\right| = \left|\frac{b^2a^2+b^2x_0c}{y_0(x_0(a^2-b^2)+a^2c)}\right| = \\ &= \left|\frac{b^2(a^2+cx_0)}{y_0c(cx_0+a^2)}\right| = \left|\frac{b^2}{y_0c}\right|. \\ \left|\frac{m_2-m_t}{1+m_2m_t}\right| &= \left|\frac{\dfrac{y_0}{x_0-c}+\dfrac{b^2x_0}{a^2y_0}}{1-\dfrac{y_0}{x_0-c}\cdot\dfrac{b^2x_0}{a^2y_0}}\right| = \left|\frac{a^2y_0^2+b^2x_0^2-b^2x_0c}{(x_0-c)a^2y_0-y_0b^2x_0}\right| = \left|\frac{b^2a^2-b^2x_0c}{y_0(x_0(a^2-b^2)-a^2c)}\right| = \\ &= \left|\frac{b^2(a^2-cx_0)}{y_0c(cx_0-a^2)}\right| = \left|-\frac{b^2}{y_0c}\right| = \left|\frac{b^2}{y_0c}\right|. \end{aligned}$$

7 Un problema en què es generen les tres còniques

Presentem l'estudi gràfic i analític d'un lloc geomètric generat pels centres d'unes circumferències que satisfan dues condicions. Té l'interès afegit que si es varien les condicions inicials apareixen les tres seccions que hem estudiat i, també, una circumferència i dues rectes que es tallen.

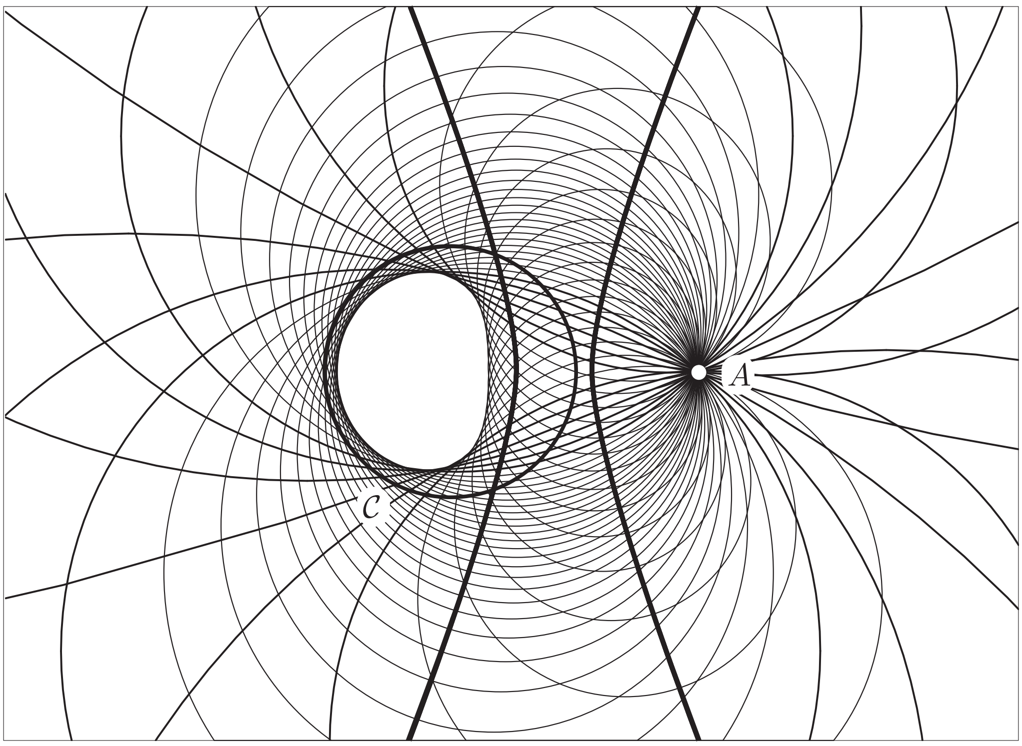


> En un pla, donada una circumferència $\mathcal{C}$ de centre O i radi r i un punt A, cerquem el lloc geomètric dels centres P de les circumferències que passen per A i tallen la circumferència $\mathcal{C}$ en dos punts $T_1,\ T_2$ tals que $\widehat{T_1OT_2} = 90°$.

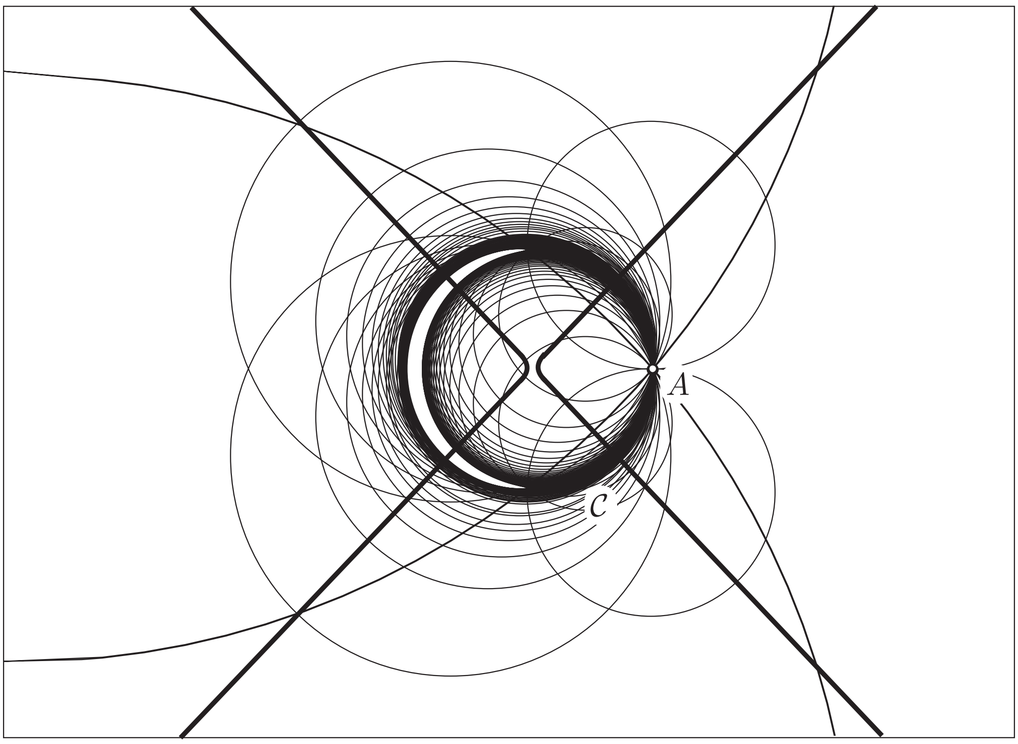
7.1 Estudi gràfic

Una aproximació gràfica al problema es pot fer amb el programa CABRI de geometria dinàmica. Allí es pot visualitzar el lloc geomètric de les circumferències i els seus centres i observar de quina manera depenen de les condicions inicials del problema. Les diferents configuracions que observem per als centres són:

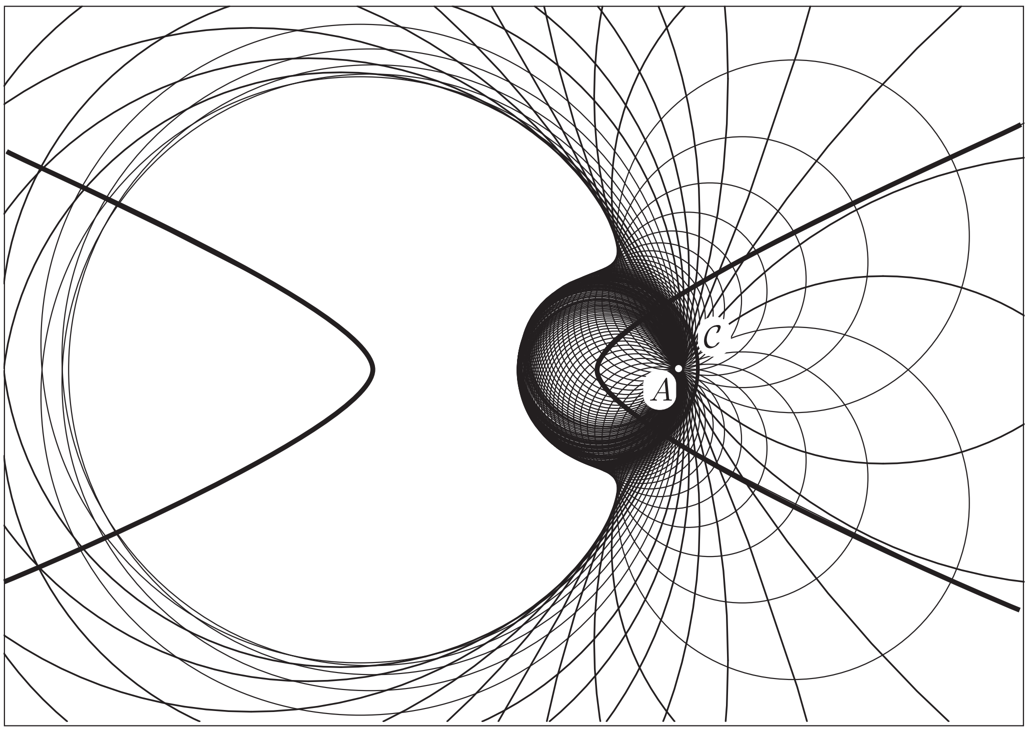
- Quan A és exterior a la circumferència $\mathcal{C}$ descriuen una hipèrbola.



- Quan A pertany a la circumferència $\mathcal{C}$ descriuen un parell de rectes que es tallen.[3]

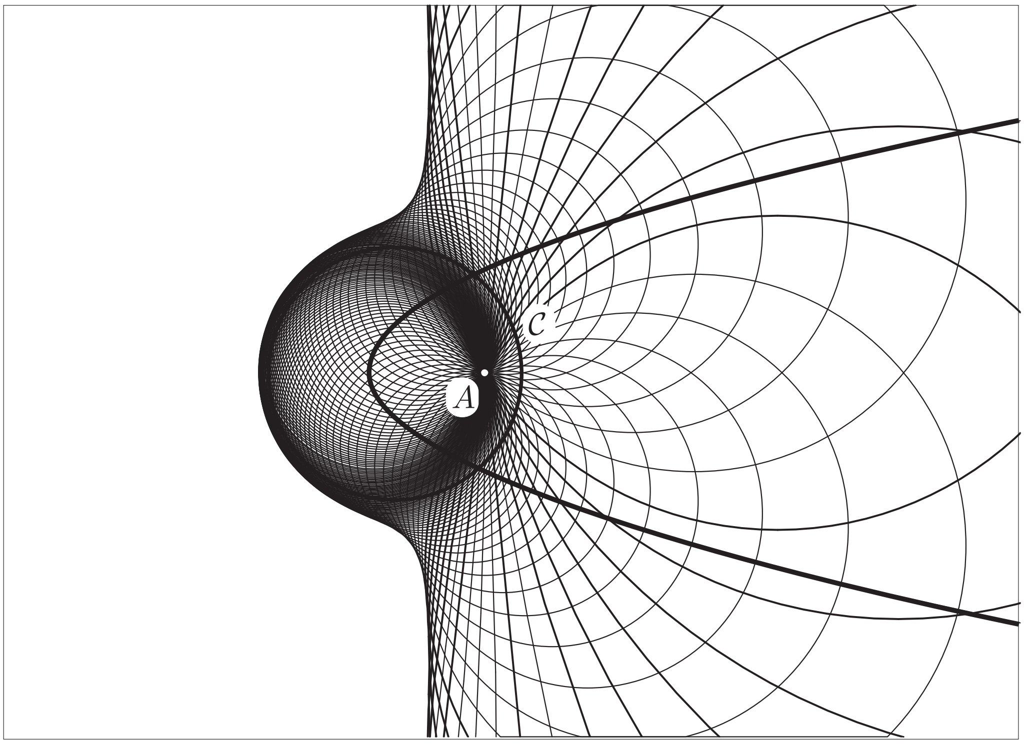


- Quan A és un punt interior a la circumferència $\mathcal{C}$ descriuen diverses corbes que depenen de la distància del punt A al centre O de la circumferència $\mathcal{C}$. A mesura que A s'apropa al centre O apareixen:
  - Una hipèrbola.



[3]Representem la situació en què A es troba molt proper a la circumferència $\mathcal{C}$.

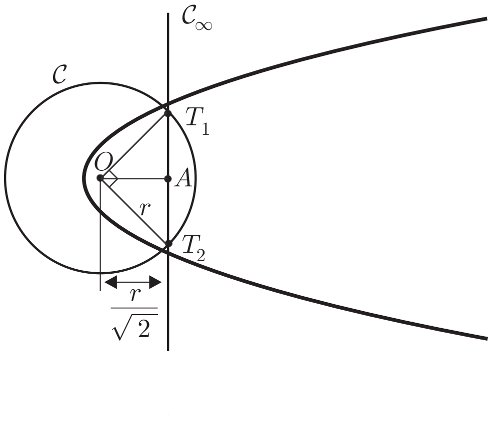
– Una paràbola.



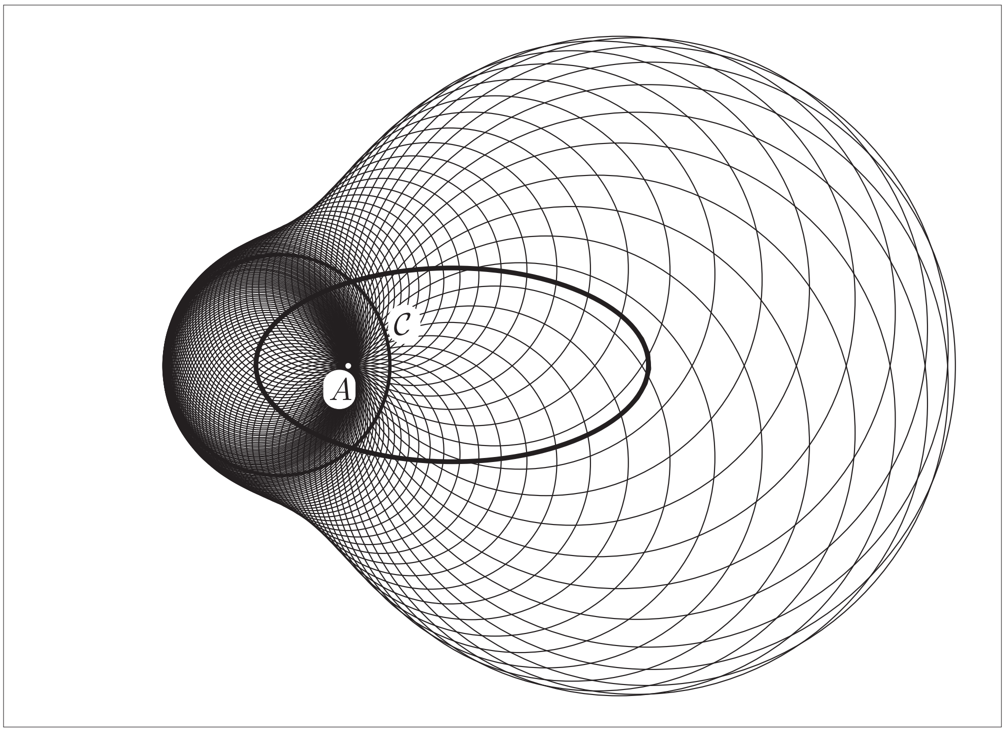
Una observació més acurada d'aquest cas posa al descobert que

$$d(O, A) = \frac{r}{\sqrt{2}}.$$

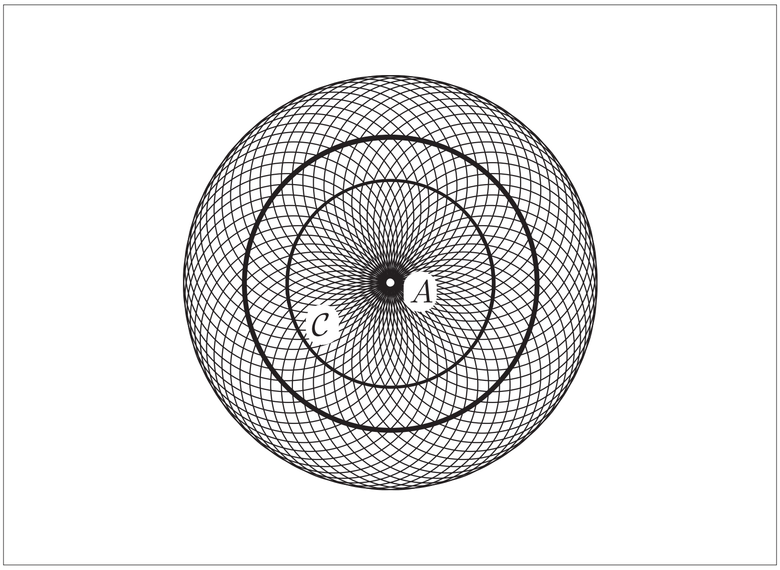
Aquesta és una conjectura que provarem analíticament més endavant. De moment veiem que la paràbola apareix quan la bisectriu de $\widehat{T_1OT_2} = 90°$ conté A i aquest punt es troba sobre la recta T_1T_2. Això implica, per geometria dels triangles rectangles equilàters que $d(O, A) = r/\sqrt{2}$. Si féssim una classificació de les còniques a partir dels punts que tenen a l'infinit, observaríem que aquesta té un punt a l'infinit. Aquest és el centre de la "circumferència" $\mathcal{C}_\infty$ que passa per T_1, A, T_2 quan estan en línia recta i A es troba a distància $r/\sqrt{2}$ de O.



– Una el·lipse



– Una circumferència.



7.2 Estudi analític

Considerem la referència ortonormal, d'orientació antihorària, amb origen en el centre de la circumferència $\mathcal{C}$ de radi r i eix d'abscisses en la recta que passa pel punt A. Hem de trobar el lloc dels centres de les circumferències que passen per $A(a, 0)$ i dos punt de la circumferència $\mathcal{C}$ separats per un quart de circumferència. Aquests punts tindran coordenades $(r\cos\theta, r\sin\theta)$, $(-r\sin\theta, r\cos\theta)$, en què θ varia entre 0 i 2π. Aquestes circumferències satisfan una equació del tipus

$$x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0.$$

Per determinar els valors de m, n i p caldrà resoldre el sistema que resulta d'imposar que la circumferència passi pels tres punts esmentats.

$$\left\{\begin{array}{l}(r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2+mr\cos\theta+nr\sin\theta+p=0\\(-r\sin\theta)^2+(r\cos\theta)^2-mr\sin\theta+nr\cos\theta+p=0\\a^2+ma+p=0\end{array}\right. \iff$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l}r^2+mr\cos\theta+nr\sin\theta+p=0\\r^2-mr\sin\theta+nr\cos\theta+p=0\\a^2+ma+p=0\end{array}\right. \implies \left\{\begin{array}{l}m=\dfrac{(r^2-a^2)(\cos\theta-\sin\theta)}{a(\cos\theta-\sin\theta)-r}\\n=\dfrac{(r^2-a^2)(\cos\theta+\sin\theta)}{a(\cos\theta-\sin\theta)-r}\end{array}\right. \tag{6}$$

Farem un canvi de variables per tal de simplificar les notacions,

$$\cos\theta-\sin\theta=\lambda,\quad \cos\theta+\sin\theta=\mu,\quad \lambda^2+\mu^2=(\cos\theta-\sin\theta)^2+(\cos\theta+\sin\theta)^2=2.$$

Representem els centres de les circumferències per (x,y) i recordem que $m=-2x$ i $n=-2y$. Llavors, de les igualtats (6), s'obté

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{-2x}{r^2-a^2}=\dfrac{\lambda}{a\lambda-r}\\\dfrac{-2y}{r^2-a^2}=\dfrac{\mu}{a\lambda-r}\\\lambda^2+\mu^2=2\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l}\dfrac{x}{y}=\dfrac{\lambda}{\mu}\\\lambda=\dfrac{2xr}{r^2-a^2+2ax}\\\lambda^2+\mu^2=2\end{array}\right. \iff$$

$$\iff \frac{x^2}{y^2}=\frac{\lambda^2}{2-\lambda^2}=\frac{\dfrac{4x^2r^2}{(r^2-a^2+2ax)^2}}{2-\dfrac{4x^2r^2}{(r^2-a^2+2ax)^2}}=\frac{4x^2r^2}{2(r^2-a^2+2ax)^2-4x^2r^2}\iff$$

$$\iff 4(r^2-2a^2)x^2+4r^2y^2+\underbrace{8a(a^2-r^2)x}_{\text{part lineal}}-2(a^2-r^2)^2=0 \tag{7}$$

Si volem eliminar la part lineal de l'equació (7), fem un canvi de variable $x=x_N+p$, i la part variable en x es converteix en

$$4(r^2-2a^2)x_N^2+8\left[(r^2-2a^2)p+a(a^2-r^2)\right]x_N+4(r^2-2a^2)p^2+8a(a^2-r^2)p.$$

Llavors, només imposem que el coeficient de x_N sigui zero i obtenim

$$(r^2-2a^2)p+a(a^2-r^2)=0\iff p=\frac{a(a^2-r^2)}{2a^2-r^2},\quad \text{per a } 2a^2-r^2\neq 0.$$

Si fem efectiu el canvi de variable amb aquest valor de p, s'obté l'equació

$$4(r^2-2a^2)x_N^2+4r^2y^2+\frac{2r^2(a^2-r^2)^2}{2a^2-r^2}=0. \tag{8}$$

Per unificar les notacions de les variables escrivim $x_N=X,\ y=Y$. Llavors, si $a^2-r^2\neq 0$, l'equació (8) es pot escriure

$$\frac{x^2}{\dfrac{r^2(a^2-r^2)^2}{2(r^2-2a^2)^2}}+\frac{y^2}{\dfrac{(a^2-r^2)^2}{2(r^2-2a^2)}}=1. \tag{9}$$

Anàlisi de les equacions que descriuen el lloc dels centres

- **Cas 1:** L'equació (9) descriu el lloc quan $a^2-r^2\neq 0$ i $2a^2-r^2\neq 0$. És a dir quan el punt A no pertany al perímetre de la circumferència $\mathcal{C}$, ni està a distància $r/\sqrt{2}$ del centre d'aquesta circumferència. Es presenten en aquest cas tres llocs geomètrics diferents:

a) $r^2 - 2a^2 < 0$ i $A \notin \mathcal{C} \iff |a| > r/\sqrt{2}$ i $A \notin \mathcal{C} \iff$ el lloc és una **hipèrbola**.

b) $r^2 - 2a^2 > 0$ i $A \notin \mathcal{C} \iff |a| < r/\sqrt{2} \iff$ el lloc és una **el·lipse** si $a \neq 0$.

c) Si $a = 0$, —el punt A coincideix amb el centre de $\mathcal{C}$—, el lloc és la **circumferència** $X^2 + Y^2 = \left(\dfrac{r}{\sqrt{2}}\right)^2$, de centre A i radi $r/\sqrt{2}$.

• **Cas 2:** Si $r^2 - 2a^2 = 0$, de l'equació (7) obtenim la descripció del lloc dels centres mitjançant les equacions

$$8a^2y^2 - 8a^3x - 2a^4 = 0 \iff 4y^2 - 4ax - a^2 = 0 \iff y^2 = a\left(x + \frac{a}{4}\right).$$

Aquesta última, amb el canvi $Y = y,\ X = x + \frac{a}{4}$, ens informa que, quan el punt A està a distància $r/\sqrt{2}$ del centre de $\mathcal{C}$, el lloc geomètric és la **paràbola** d'equació $Y = aX$. En aquest cas és fàcil comprovar que el focus és el centre de $\mathcal{C}$.
• **Cas 3:** Si $r^2 - a^2 = 0$, de l'equació (8) obtenim $X^2 - Y^2 = 0$. O sigui que quan el punt A es troba en el perímetre de la circumferència $\mathcal{C}$ el lloc dels centres és un **parell de rectes** que formen un angle de 90° i es tallen en el centre de $\mathcal{C}$.

8 Identificació de còniques presentades algebraicament

Es tracta de discernir quin tipus de cònica representa una equació de segon grau amb dues variables, si aquestes representen coordenades de punts en una base ortonormal. Concretament, a partir d'una expressió

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0. \tag{10}$$

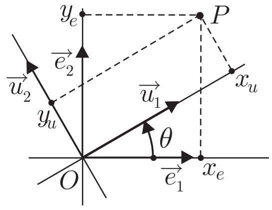
volem identificar la corba que descriu. Per tal d'aconseguir-ho es practica una rotació d'eixos de referència adequada per tal d'eliminar el sumand cxy, i una translació d'eixos per tal d'eliminar, si és possible, la part lineal $dx + ey$.

8.1 Equacions del canvi de coordenades quan es practica una rotació d'eixos

Considerem el punt P i les referències ortonormals $\mathcal{R} : \{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$, $\mathcal{R}_\theta : \{O; \vec{u}_1, \vec{u}_2\}$, en què els vectors de la referència $\mathcal{R}_\theta$ resulten de girar un angle θ els vectors de la referència $\mathcal{R}$.

Si observem el gràfic adjunt, és immediat que

$$\begin{cases} \vec{u}_1 = \cos\theta \vec{e}_1 + \sin\theta \vec{e}_2 \\ \vec{u}_2 = -\sin\theta \vec{e}_1 + \cos\theta \vec{e}_2. \end{cases}$$

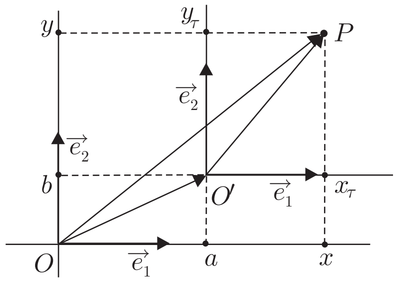


Per tant, si $P = (x_e, y_e)$ en la referència $\mathcal{R}$ i $P = (x_u, y_u)$ en la referència $\mathcal{R}_\theta$, obtenim

$$\begin{aligned} x_u\vec{u}_1 + y_u\vec{u}_2 = x_e\vec{e}_1 + y_e\vec{e}_2 \ &\Longrightarrow\ x_u(\cos\theta\vec{e}_1 + \sin\theta\vec{e}_2) + y_u(-\sin\theta\vec{e}_1 + \cos\theta\vec{e}_2) = \\ &= \ x_e\vec{e}_1 + y_e\vec{e}_2 \Longrightarrow \boxed{\begin{cases} x_e = x_u\cos\theta - y_u\sin\theta \\ y_e = x_u\sin\theta + y_u\cos\theta. \end{cases}} \end{aligned}$$

8.2 Equacions del canvi de coordenades quan es practica una translació d'eixos

Considerem el punt P i les referències ortonormals $\mathcal{R} : \{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$, $\mathcal{R}_\tau : \{O'; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$, en què els eixos de la referència $\mathcal{R}_\tau$ resulten de fer una translació de vector $\overrightarrow{OO'} = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2$ sobre els eixos de la referència $\mathcal{R}$.



Llavors, si $P = (x, y)$ en la referència $\mathcal{R}$ i $P = (x_\tau, y_\tau)$ en la referència $\mathcal{R}_\tau$, obtenim

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P} \quad \Longrightarrow \quad x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + x_\tau\vec{e}_1 + y_\tau\vec{e}_2 \Longrightarrow \boxed{\left\{ \begin{array}{l} x = a + x_\tau \\ y = b + y_\tau. \end{array} \right.}$$

8.3 Recerca de l'equació reduïda

Es tracta d'identificar quina cònica representa l'equació (10) tal com hem indicat al principi d'aquesta secció. Si expressem la cònica en uns eixos de referència OX_θ, OY_θ que resultin de girar els eixos OX, OY un angle θ, la seva equació (10) es transforma en l'equació

$$Ax_\theta^2 + By_\theta^2 + Cx_\theta y_\theta + Dx_\theta + Ey_\theta + F = 0, \tag{11}$$

en què

$$\begin{array}{rcl} A &=& a\cos^2\theta + b\sin^2\theta + c\sin\theta\cos\theta \\ B &=& a\sin^2\theta + b\cos^2\theta - c\sin\theta\cos\theta \\ C &=& (b-a)\sin 2\theta + c(\cos^2\theta - \sin^2\theta) \\ D &=& d\cos\theta + e\sin\theta \\ E &=& e\cos\theta - d\sin\theta \\ F &=& f \end{array}$$

Si pretenem eliminar el terme $Cx_\theta y_\theta$, només cal imposar $C = 0$ i s'obté que l'angle θ de la rotació ha de satisfer,

$$(b-a)\sin 2\theta + c(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = 0, \quad \text{és a dir, si } a - b \neq 0, \quad \tan 2\theta = \frac{c}{a-b}.$$

En els altres casos és fàcil comprovar que si

- $c \neq 0$ i $a - b = 0$, s'ha de satisfer $\theta = \dfrac{\pi}{4}$.
- $c = 0$ i $a - b = 0$, l'equació (10) representa una **circumferència** de centre $\left(-\dfrac{d}{2a}, -\dfrac{e}{2a}\right)$ i radi $\dfrac{\sqrt{d^2 + e^2 - 4af}}{2a}$.

Un cop tenim l'equació

$$Ax_\theta^2 + By_\theta^2 + Dx_\theta + Ey_\theta + F = 0, \tag{12}$$

es poden presentar dos casos:

1. $A \neq 0$ i $B \neq 0$: Per tal d'eliminar la part lineal practiquem sobre (12) una translació d'eixos de referència d'equacions $x_\theta = v_1 + x_\tau$, $y_\theta = v_2 + y_\tau$. Obtenim l'equació

$$Ax_\tau^2 + By_\tau^2 + (2Av_1 + D)x_\tau + (2Bv_2 + E)y_\tau + (Av_1^2 + Bv_2^2 + Dv_1 + Ev_2 + F) = 0.$$

Llavors, si considerem

$$v_1 = \frac{-D}{2A} \quad \text{i} \quad v_2 = \frac{-E}{2B}\,,$$

resulta l'equació

$$Ax_\tau^2 + By_\tau^2 + \left(\frac{D^2}{4A} + \frac{E^2}{4B} - \frac{D^2}{2A} - \frac{E^2}{2B} + F\right) = 0.$$

Aquesta és fàcil d'identificar amb una de les cinc següents, —escrivim per alleujar la notació x, y en lloc de x_τ, y_τ i en alguns casos caldrà girar els eixos 90°—:

a) $\dfrac{x^2}{p^2} + \dfrac{y^2}{q^2} = 1 \longleftrightarrow$ **El·lipse**.

b) $\dfrac{x^2}{p^2} - \dfrac{y^2}{q^2} = 1 \longleftrightarrow$ **Hipèrbola**.

c) $\dfrac{x^2}{p^2} + \dfrac{y^2}{q^2} = -1 \longleftrightarrow$ **El·lipse imaginària**.

d) $\dfrac{x^2}{p^2} - \dfrac{y^2}{q^2} = 0 \longleftrightarrow$ **Dues rectes que es tallen**.

e) $\dfrac{x^2}{p^2} + \dfrac{y^2}{q^2} = 0 \longleftrightarrow$ **Punt**. Dues rectes imaginàries que es tallen en un punt real.

2. $A \neq 0$ i $B = 0$ o a l'inrevés: Per tal d'eliminar la part lineal practiquem sobre (12) una translació d'eixos de referència d'equacions $x_\theta = v_1 + x_\tau$, $y_\theta = v_2 + y_\tau$. Si $A \neq 0$, obtenim l'equació

$$Ax_\tau^2 + (2Av_1 + D)x_\tau + Ey_\tau + (Av_1^2 + Dv_1 + Ev_2 + F) = 0.$$

Llavors, si considerem

$$v_1 = \frac{-D}{2A} \quad \text{i, si } E \neq 0, \quad v_2 = \frac{-Av_1^2 - Dv_1 - F}{E} = \frac{D^2 - 4AF}{4AE}\,,$$

resulta el cas número sis —escrivim x, y en lloc de x_τ, y_τ—:

f) $x^2 = -\dfrac{E}{A}\, y \longleftrightarrow$ **Paràbola**.

Finalment, si $E = 0$, considerem la translació $x_\theta = v_1 + x_\tau$, $y_\theta = y_\tau$. En resulta

$$Ax_\tau^2 + (2Av_1 + D)x_\tau + (Av_1^2 + Dv_1 + F) = 0.$$

Llavors, si fem $v_1 = \dfrac{-D}{2A}$, obtenim

$$Ax_\tau^2 + \frac{4AF - D^2}{4A} = 0.$$

Aquesta s'identifica de forma immediata amb una de les tres següents:

g) $x^2 = k^2 \longleftrightarrow$ **Dues rectes paral·leles**.

h) $x^2 = -k^2 \longleftrightarrow$ **Dues rectes paral·leles imaginàries**.

i) $x^2 = 0 \longleftrightarrow$ **Dues rectes coincidents**.

Si s'estudia el cas $B \neq 0$, s'obtenen resultats equivalents. Concretament, després d'haver fet, si $D \neq 0$, la translació de vector (v_1, v_2),

$$v_1 = \frac{-E}{2B} \quad \text{i, si } D \neq 0, \quad v_2 = \frac{E^2 - 4BF}{4BD},$$

f) $y^2 = -\dfrac{D}{B}\, x \longleftrightarrow$ **Paràbola**.

Si $D = 0$, considerem la translació de vector (v_1, v_2), $v_1 = \dfrac{-E}{2B}$, $\quad v_2 = 0$, i obtenim

$$By_\tau^2 + \frac{4BF - E^2}{4B} = 0.$$

Aquesta, com abans, s'identifica amb una de les següents:

g) $y^2 = k^2 \longleftrightarrow$ **Dues rectes paral·leles**.

h) $y^2 = -k^2 \longleftrightarrow$ **Dues rectes paral·leles imaginàries**.

i) $y^2 = 0 \longleftrightarrow$ **Dues rectes coincidents**.

9 Apèndix

A Origen de les seccions còniques. Una mica d'història

L'atribució del descobriment de les còniques a Menecm es basa en què la primera resolució d'un problema mitjançant aquestes corbes la trobem en els «Comentaris» d'Eutoci (VI) sobre les obres d'Arquimedes. Allí presenta, entre d'altres qüestions, la solució del problema de les dues rectes, el qual podria tenir el seu origen en una reducció del problema de la duplicació del cub, mitjançant les "tríades de Menecm". Aquest és el nom que es dóna a les seccions còniques en una carta d'Eratòstenes de Cirene (III aC) al rei Ptolemeu III Euergetes, que Eutoci transcriu en els seus «Comentaris».[4]

A.1 El problema de la duplicació del cub

Disposem de dues narracions sobre l'origen d'aquest problema. S'atribueixen a Eratòstenes. La primera d'elles la recull Teó d'Esmirna (II),[5] i la segona la presenta Eutoci en la carta que hem citat més amunt.

- Relat de Teó d'Esmirna:

> Eratòstenes, en el llibre que té per títol *Platònic*, relata que els delians, havent interrogat l'oracle sobre la manera de deslliurar-se de la pesta, van rebre l'ordre de déu de construir un altar doble del que ja existia. Aquest problema abocà els arquitectes contra un obstacle singular. Es preguntaven de quina manera es podia fer un sòlid doble d'un altre. Interrogaren Plató sobre la dificultat. Aquest els respongué que déu s'havia dirigit així a l'oracle, no perquè ell tingués necessitat d'un altar doble, sinó per retreure els grecs la seva negligència en l'estudi de les matemàtiques i per fer poc cas de la geometria.

- Relat d'Eutoci:

> Eratòstenes al rei Ptolemeu, salut!
> Es diu que un dels poetes tràgics antics havia representat Minos fent preparar una tomba a Glaucó [el seu fill], i havent insistit que tingués cent peus d'allargada en tots els seus costats, digué: "Has triat la cambra sepulcral del rei petita, que sigui doblada; no et confonguis sobre el que convé, i dobla el més aviat possible cada part de la tomba."
> Sembla que Minos s'equivoqui, perquè quan es doblen els costats, un pla esdevé quàdruple i un sòlid vuit vegades més gran. Entre els geòmetres també s'ha cercat la manera de doblar un sòlid donat de manera que conservi la forma, i el problema d'aquesta classe s'anomenà la duplicació del cub, perquè havent-se proposat un cub, aquests geòmetres s'esforçaren en doblar-lo. Després de molt temps de confusió, fou Hipòcrates de Quios (V aC) el primer a adonar-se que un cub seria doblat si s'arribaven a trobar dues mitjanes proporcionals en proporció contínua entre dues línies rectes de les quals la més gran és el doble de la més petita; de manera que canvià la dificultat en una altra dificultat no més petita. Es diu que més tard uns delians, encarregats per un oracle de doblar un dels seus altars, i abocats a la mateixa dificultat, foren enviats a veure Plató, i demanaren als geòmetres de l'Acadèmia que trobessin allò que cercaven.

[4] Aquests comentaris es poden trobar a «Commentaires d'Eutocius d'Ascalon» en la traducció de Eecke P.V. *Les oeuvres complètes d'Archimède*, 609-615. Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard, Paris, 1960.

[5] *Exposition des connaissances mathématiques utiles pour la lecture de Platon*, 5. Hachette, Paris, 1892.

En el segon relat trobem que Hipòcrates redueix el problema de duplicar el cub al problema de "dificultat no més petita" de cercar dues mitjanes proporcionals en proporció contínua entre dues rectes a i $2a$, el qual s'anomena *problema de les dues rectes*. No sabem quin fou l'anàlisi d'Hipòcrates però en conjecturarem un a partir de les propietats entre figures semblants.

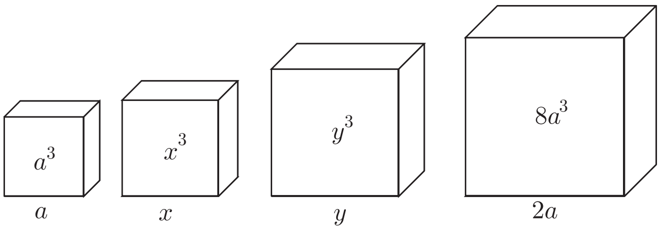
En ser els cubs figures semblants se sap que la raó entre els seus volums és igual al cub de la raó entre els seus costats. D'aquesta manera és fàcil de construir un cub de volum òctuple. Només cal duplicar la longitud del costat a del cub inicial. Llavors, tenim dos cubs d'arestes i volums respectius,

$$a, 2a \qquad \text{i} \qquad a^3, 8a^3.$$

Si volem construir el cub de volum $2a^3$, podem interpolar en progressió geomètrica dos cubs de manera que s'obtenen cubs de volums i costats respectius,

$$a^3, 2a^3, 4a^3, 8a^3 \qquad \text{i} \qquad a, x, y, 2a,$$

en què x i y són els costats desconeguts dels cubs de volums $2a^3$ i $4a^3$.



En ser, per la semblança, la raó entre els volums dels cubs, el cub de la raó entre els costats, s'obté

$$\frac{1}{2} = \frac{2a^3}{4a^3} = \left(\frac{a}{x}\right)^3 = \left(\frac{x}{y}\right)^3 = \left(\frac{y}{2a}\right)^3 \Longrightarrow \frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}\,.$$

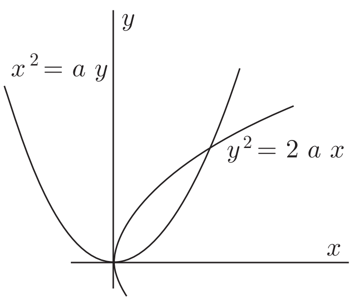
D'aquesta manera, el problema ha quedat reduït a la inserció de dues mitjanes proporcionals entre dues rectes a i $2a$.

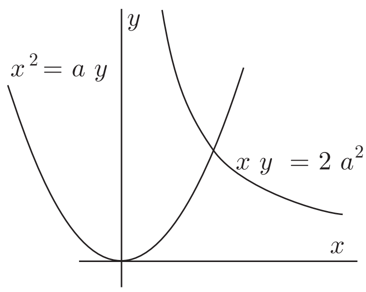
A.2 Anàlisi de Menecm del problema de les dues rectes. Construcció punt a punt de les seccions còniques

Menecm fa una anàlisi que el condueix a expressar les igualtats de raons $\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}$ com a igualtats d'àrees. Concretament, en el nostre llenguatge algebraic el problema queda reduït a la resolució del sistema:

$$\begin{cases} x^2 = a \cdot y \\ y^2 = 2a \cdot x \end{cases} \qquad \text{o bé} \qquad \begin{cases} x^2 = a \cdot y \\ x \cdot y = 2a^2\,. \end{cases}$$

O sigui que el problema es pot reduir, com es desprèn de les seccions anteriors, a la construcció de les interseccions de dues paràboles o d'una paràbola i una hipèrbola.

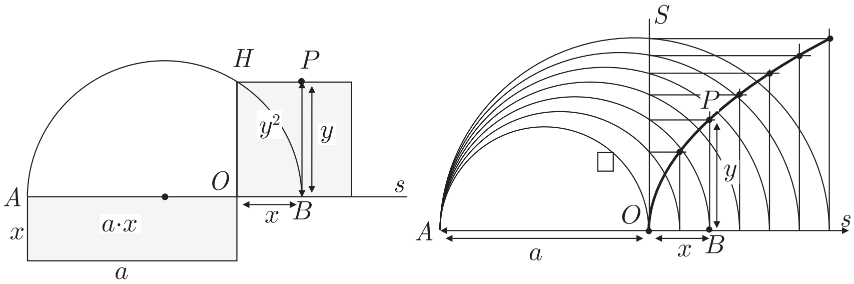




El que no sabem és de quina manera Menecm construeix aquestes corbes ni si sabia que es podien obtenir com a seccions d'un con per un pla. Una de les possibilitats és que construís les corbes punt a punt per consideracions estrictament planes, sense intervenció de cap objecte de l'espai com, per exemple, un con un con.

Indicarem com podria fer-se al construcció de les paràboles implicades en la primera reducció, $a \cdot x = y^2$ i $x^2 = 2a \cdot y$.

Construcció de la paràbola $a \cdot x = y^2$: Donat el segment a, per a cada valor del segment $x = OB$ construirem un segment $y = BP$ perpendicular a OB, tal que el quadrat de costat y tingui la mateixa àrea que el rectangle de costats a i x. Això s'aconsegueix a partir de la construcció que Euclides presenta en la proposició II.14 dels seus *Elements* de la manera es presenta en la figura adjunta, i que nosaltres anomenem *teorema de l'altura*, $(OH^2 = AO \cdot OB)$:



– El segment $x = OB$ se situa amb un extrem O fixat a l'extrem d'una semirecta s, i l'altre extrem variable sobre aquesta.

– El segment $y = BP$ se situa perpendicularment a x pel punt B.

– La construcció punt a punt de la paràbola s'obté com el conjunt de punts P que resulten d'aplicar els passos anteriors un nombre indeterminat de vegades.

La construcció per a $x^2 = 2a \cdot y$ es faria igual, considerant $2a$ en el lloc de a, sobre un eix vertical. Llavors, de la intersecció de les dues paràboles obtindríem el segment x cercat.

B Exercicis i problemes resolts

1. Trobeu el lloc geomètric dels punts tals que la relació entre la seva distància al punt $A(2, 0)$ i la seva distància a la recta $r : x = \frac{9}{2}$ és igual a $\frac{2}{3}$.

Sigui $P(x, y)$ qualsevol punt del lloc geomètric. Llavors,

$$\begin{aligned} d(P,A) = d(P,r) \iff & \sqrt{(x-2)^2 + y^2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\left|x - \frac{9}{2}\right|}{\sqrt{1^2 + 0^2}} \iff \\ \iff & 9x^2 + 9y^2 - 36x + 36 = 4x^2 - 36x + 81 \iff 5x^2 + 9y^2 = 45 \iff \\ \iff & \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1. \end{aligned}$$

El resultat és una el·lipse de distància focal $2c = 2\sqrt{9-5} = 4$, $2a = 6$ i $2b = 2\sqrt{5}$. És a dir té els focus en $(2, 0), (-2, 0)$, els vèrtexs sobre l'eix principal en $(3, 0), (-3, 0)$, i els vèrtexs sobre l'eix menor en $(2\sqrt{5}, -2\sqrt{5})$.

2. Cerqueu l'equació de la paràbola tal que la distància entre el focus i la directriu és igual a 5, en la referència tal que l'eix OX és la recta que passa pel focus, perpendicular a la directriu, l'eix OY és la recta perpendicular a OX que passa pel vèrtex de la paràbola.

Hem estudiat que l'equació serà del tipus $x^2 = 2py$, si el focus determina la direcció positiva de l'eix OY i p és la distància focus-directriu. Per tant, l'equació és

$$x^2 = 10y.$$

3. Una hipèrbola passa pel punt $A(6, 6\sqrt{3})$, té els seus focus sobre l'eix OX, i té les rectes $y = \pm 2x$ per asímptotes. Cerqueu les rectes tangents, paral·leles a la recta $y = 4x$.

La hipèrbola satisfà una equació del tipus $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Llavors,

$$\left\{\begin{array}{l} y = \pm 2x \quad \text{són asímptotes} \Longrightarrow \dfrac{b}{a} = 2 \\ (6, 6\sqrt{3}) \in \text{hipèrbola} \Longrightarrow \dfrac{36}{a^2} - \dfrac{108}{b^2} = 1 \end{array}\right. \Longrightarrow \frac{36}{a^2} - \frac{108}{4a^2} = 1 \Longrightarrow 36 = 4a^2 \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a^2 = 9 \\ b^2 = 36. \end{array}\right.$$

Per tant, l'equació de la hipèrbola serà $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{36} = 1$. Llavors, per al punt (x_0, y_0) de tangència

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Recta tangent: } \dfrac{x_0 x}{9} - \dfrac{y_0 y}{36} = 1 \Longrightarrow 4 = \text{pendent} = \dfrac{36x_0}{9y_0} \Longrightarrow \dfrac{x_0}{y_0} = 1 \\ (x_0, y_0) \in \text{hipèrbola} \Longrightarrow \dfrac{x_0^2}{9} - \dfrac{y_0^2}{36} = 1 \end{array}\right. \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow x_0^2 \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{36}\right) = 1 \Longrightarrow x_0^2 = 12 \Longrightarrow y_0^2 = 36\left(\frac{12}{9} - 1\right) = 12.$$

Per tant, els punts de tangència són $(2\sqrt{3}, 2\sqrt{3})$ i $(-2\sqrt{3}, -2\sqrt{3})$ i, si substituïm a l'equació de la recta tangent, obtenim les rectes

$$4x - y - 6\sqrt{3} = 0, \qquad 4x - y + 6\sqrt{3} = 0.$$

4. Les hipèrboles que tenen les asímptotes perpendiculars s'anomenen equilàteres. Considereu l'equació reduïda d'una hipèrbola equilàtera i proveu que es pot escriure sota la forma $x^2 - y^2 = a^2$. Gireu els eixos de referència un angle $\theta = -\pi/4$ i comproveu que l'equació en la nova referència x_θ, y_θ és

$$x_\theta y_\theta = \frac{a^2}{2}.$$

En ser les asímptotes simètriques respecte l'eix OX, els seus pendents són $\pm(b/a) = \pm\tan(\pi/4) = \pm 1$. Per tant $a = b$ i s'obté l'equació $x^2 - y^2 = a^2$.

Les equacions del canvi d'eixos són

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2} x_\theta + \frac{\sqrt{2}}{2} y_\theta, \quad y = -\frac{\sqrt{2}}{2} x_\theta + \frac{\sqrt{2}}{2} y_\theta.$$

Si substituïm a l'equació en la referència antiga s'obté

$$\frac{1}{2}(x_\theta^2 + y_\theta^2 + 2x_\theta y_\theta) - \frac{1}{2}(x_\theta^2 + y_\theta^2 + 2x_\theta y_\theta) = a^2 \Longleftrightarrow 4x_\theta y_\theta = 2a^2 \Longleftrightarrow x_\theta y_\theta = \frac{a^2}{2}.$$

5. Demostreu que l'àrea del triangle determinat per les dues asímptotes d'una hipèrbola i qualsevol recta tangent és constant.

Considerem la hipèrbola referida als seus eixos de simetria. La seva equació, la de la recta tangent en un punt (x_0, y_0) de la hipèrbola i la de les seves asímptotes són:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad \frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1, \qquad y = \pm\frac{b}{a}\,x.$$

Cerquem les interseccions $T_1,\ T_2$ de la tangent amb les asímptotes,

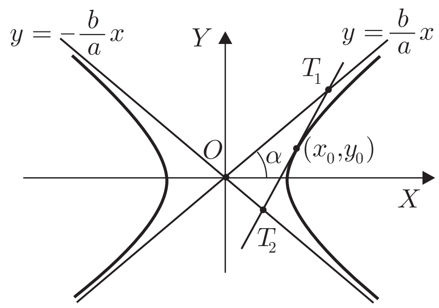
$$\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0\left(\pm\frac{b}{a}\,x\right)}{b^2} = 1 \Longrightarrow x\left(\frac{x_0}{a^2} \mp \frac{y_0}{ab}\right) = 1 \Longrightarrow \begin{cases} T_1:\ x = \dfrac{a^2 b}{bx_0 - ay_0}, & y = \dfrac{ab^2}{bx_0 - ay_0} \\ T_2:\ x = \dfrac{a^2 b}{bx_0 + ay_0}, & y = \dfrac{-ab^2}{bx_0 + ay_0}. \end{cases}$$

Calcularem l'àrea dels triangles OT_1T_2, mitjançant el producte

$$\frac{1}{2}\,T_1 \cdot OT_2 \cdot \sin 2\alpha.$$

Sabem, des de la trigonometria, que

$$\sin 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha} = \frac{2\frac{b}{a}}{1+\frac{b^2}{a^2}} = \frac{2ab}{a^2+b^2}.$$



Llavors, l'àrea serà

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^4b^2}{(bx_0+ay_0)^2} + \frac{a^2b^4}{(bx_0+ay_0)^2}} \cdot \sqrt{\frac{a^4b^2}{(bx_0-ay_0)^2} + \frac{a^2b^4}{(bx_0-ay_0)^2}} \cdot \frac{2ab}{a^2+b^2} =$$

$$= a^2b^2 \cdot \frac{a^2+b^2}{(bx_0)^2-(ay_0)^2} \cdot \frac{ab}{a^2+b^2} = \frac{a^2b^2(a^2+b^2)ab}{a^2b^2(a^2+b^2)} = \boxed{ab}.$$

Per tant, l'àrea no depèn de (x_0, y_0) i és manté constant i igual a ab.

6. Calculeu l'àrea de l'el·lipse, utilitzant el càlcul integral.

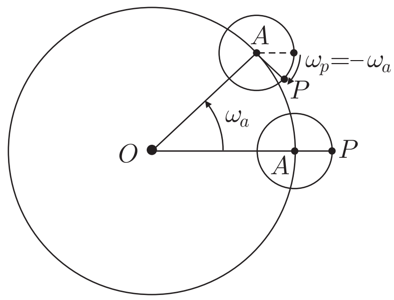
Considerem l'el·lipse referida als seus eixos, $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Els punts d'ordenada positiva satisfan la condició $y = \dfrac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$. Si tenim en compte les simetries, trobarem l'àrea amb el càlcul següent

$$4 \cdot \int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2} = \frac{4b}{a} \cdot \int_0^a \sqrt{a^2-x^2}.$$

Utilitzem el canvi de variable $x = a\,\sin t$ i obtenim

$$\begin{aligned} \frac{4b}{a} \cdot \int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx &= \frac{4b}{a} \cdot \int_0^{\pi/2} a\sqrt{1-sin^2 t} \cdot a\,\cos t\,dt = \frac{4b}{a} \cdot a^2 \cdot \int_0^{\pi/2} \cos^2 t\,dt = \\ &= 4ab \cdot \int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = 4ab\left[\frac{1}{2}\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right)\right]_0^{\pi/2} = \\ &= 4ab\,\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = 4ab\,\frac{\pi \cdot a^2}{4} = \boxed{\pi ab}. \end{aligned}$$

7. Un punt A descriu una trajectòria circular, al voltant d'un punt O fix, a velocitat angular constant ω_a. Un punt P descriu una trajectòria circular al voltant de A amb velocitat angular $\omega_p = -\omega_a$. Quina corba traça el punt P per a un espectador que no es mou respecte O. (Considerem el moviment de P en què la posició inicial d'aquest punt sobre la seva trajectòria circular ve determinada en cada moment per la direcció paral·lela a la direcció inicial de OA.)



Anomenem, respectivament, R i r els radis OA i OP, i $\alpha = \omega_a \cdot t$, en què t és el temps transcorregut des de la posició O, A, P alineats. La posició (x, y) del punt P en una referència ortonormal d'origen O i eix OX determinat per la posició O, A, P alineats, ve donada per les equacions

$$x = R\cos\alpha + r\cos(-\alpha) = (R+r)\cos\alpha$$
$$y = R\sin\alpha + r\sin(-\alpha) = (R-r)\sin\alpha.$$

Llavors, si $R \neq r$, es compleix

$$1 = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \frac{x^2}{(R+r)^2} + \frac{y^2}{(R-r)^2}.$$

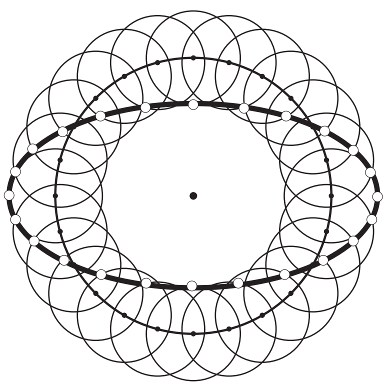
En el cas que $R = r$, s'obté

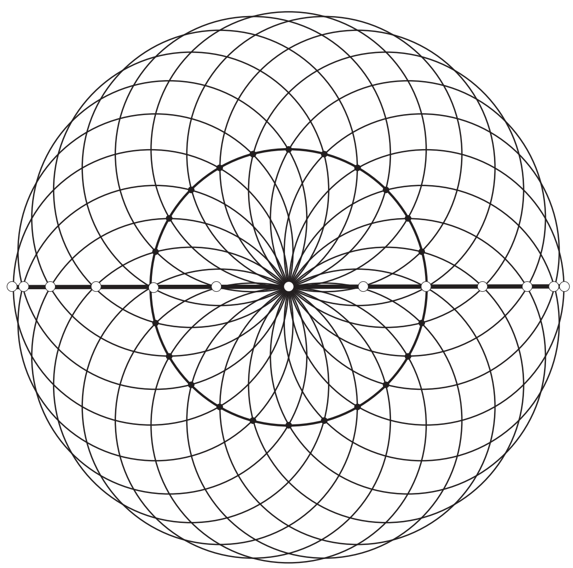
$$R - r \leq x \leq R + r \quad \text{i} \quad y = 0.$$

Per tant, les trajectòries descrites són:

- Si $R \neq r$, una **el·lipse** de semieixos $R + r$ i $R - r$.
- Si $R = r$, un **segment** sobre $y = 0$, centrat en O que té longitud

$$|(R+r)\cos 0 - (R+r)\cos\pi| = 2(R+r).$$





8. Descriviu la cònica d'equació

$$x^2 + 4y^2 - 4xy - 42x - 16y + 145 = 0.$$

Per eliminar el terme $-4xy$ hem de fer una rotació d'eixos d'angle θ tal que $\tan(2\theta) = \frac{-4}{1-4} = \frac{4}{3}$. Llavors

$$\begin{aligned}
\sin^2\theta &= \frac{1-\cos 2\theta}{2} = \frac{1-\sqrt{\frac{1}{1+\tan^2 2\theta}}}{2} = \frac{1-\frac{3}{5}}{2} = \frac{1}{5}.\\
\cos^2\theta &= \frac{1+\cos 2\theta}{2} = \frac{1+\sqrt{\frac{1}{1+\tan^2 2\theta}}}{2} = \frac{1+\frac{3}{5}}{2} = \frac{4}{5}.
\end{aligned}$$

Llavors, si utilitzem els resultats de la secció 8.3, pàgina 18, obtenim

$$\left(\frac{4}{5}+\frac{4}{5}-\frac{8}{5}\right)x_\theta^2 + \left(\frac{1}{5}+\frac{16}{5}+\frac{8}{5}\right)y_\theta^2 - \frac{100}{\sqrt{5}}\,x_\theta + \frac{10}{\sqrt{5}}\,y_\theta + 145 = 0 \Longleftrightarrow$$

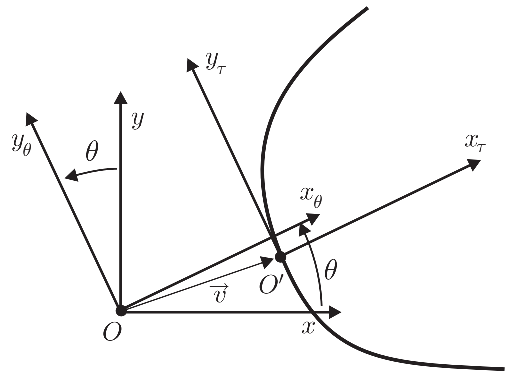
$$\Longleftrightarrow 5y_\theta^2 - 20\sqrt{5}x_\theta + 2\sqrt{5}y_\theta + 145 = 0.$$

Finalment, si fem una translació d'eixos de vector

$$\vec{v} = \left(\frac{(2\sqrt{5})^2 - 4\cdot 5\cdot 145}{4\cdot 5\cdot(-20\sqrt{5})}, \frac{-2\sqrt{5}}{2\cdot 5}\right) = \left(\frac{36\sqrt{5}}{25}, -\frac{\sqrt{5}}{5}\right),$$

obtenim, segons la secció 8.3, pàgina 20, la paràbola de distància focus-directriu igual a $2\sqrt{5}$ i equació en els nous eixos

$$y_\tau^2 = 4\sqrt{5}\,x_\tau.$$



Índex