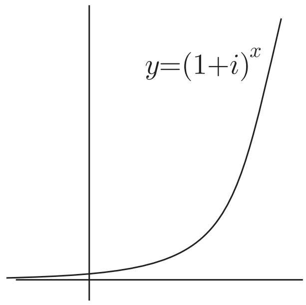
Matemàtica Comercial



RAMON NOLLA
Departament de Matemàtiques
IES Pons d'Icart

1 Introducció

En els assumptes financers trobem:

– Persones o entitats que *ofereixen capital* a d'altres persones o entitats.

– Persones o entitats que *demanen capital* a d'altres.

– *Intermediaris* a través dels quals es realitzen aquestes operacions.

Un exemple ben clar d'aquesta presentació, el constitueix el banc que fa d'intermediari entre la persona que té un compte d'estalvi, —i per tant, està oferint capital—, i la persona que es dirigeix al banc per demanar un préstec.

El capital que s'ofereix és un capital productiu per al subjecte que fa l'oferta, perquè els demandants de préstecs, —sempre per mitjà de les entitats financeres—, tornen després d'un temps prefixat, el capital prestat més una quantitat addicional que anomenem *interessos*. Aquests interessos es destinen a:

– Cobrir les despeses de l'entitat financera.

– L'obtenció de beneficis per part d'aquesta entitat.

– L'obtenció de beneficis per part dels oferents de capital.

A la pràctica tant l'oferent com el demandant de capital tracten directament amb l'entitat financera intermediària i es mantenen aliens als tractes que té aquesta amb l'altra part. Així quan un subjecte té uns diners per invertir només es preocupa de la productivitat del capital invertit oferta per l'entitat financera. De la mateixa manera el subjecte que necessita diners es preocuparà de quins seran els interessos que, segons l'entitat financera, haurà d'afegir a la quantitat prestada per liquidar el deute.

La quantitat addicional que el demandant —o *deutor*— paga, o que l'oferent —o *creditor*— rep cada any, trimestre, mes, etc., per cada 100 euros[1] rep, respectivament, el nom de *taxa* o *tipus d'interès* anual, trimestral, mensual, etc. S'expressa en llenguatge *percentual —tant*

[1]De fet, ens podríem referir a qualsevol tipus d'unitat monetària

per cent—. Així, per exemple, es parla d'un tipus d'interès anual del 5% per expressar que un capital ha produït 5 euros de beneficis per cada 100 euros, o que cada 100 euros de capital s'han convertit en 105 euros. També se sol presentar aquesta taxa com la quantitat que es rep o es paga per cada euro, llavors es parla en termes de *tant per u*. Així, en l'últim exemple, parlaríem d'un tipus d'interès anual del $0,05$ per u anual. Quan es diu que un tipus d'interès ha sofert una variació d'un punt, dos, tres, o qualsevol altre nombre de punts, es fa referència a unitats percentuals.

2 Interès simple i interès compost

• Direm que un capital està sotmès a un règim d'*interès simple* quan els interessos produïts pel capital inicial no s'acumulen sobre aquest per produir nous interessos. És a dir el capital productor d'interessos es manté constant i igual a l'inicial.

Per calcular els interessos obtinguts, considerem C_0 un capital sotmès a un interès simple anual i, —expressat en tant per u—,[2] durant t anys. Llavors el capital C_t, quan han passat t anys compleix

$$C_0 = C_0,\ C_1 = C_0 + C_0 \cdot i,\ C_2 = C_1 + C_0 \cdot i,\ \ldots, C_t = C_{t-1} + C_0 \cdot i.$$

És a dir que $C_0, C_1, \ldots, C_t$ és una progressió aritmètica de $t+1$ termes i diferència $C_0 \cdot i$. Per tant, el capital inicial C_0 s'haurà convertit al cap de t anys en

$$\boxed{C_t = C_0 + C_0 \cdot t \cdot i}.$$

Conseqüentment els interessos I_t obtinguts en t anys són

$$\boxed{I_t = C_0 \cdot t \cdot i}.$$

És fàcil comprovar que si la taxa d'interès i anual es liquida en períodes inferiors a l'any, resultants de dividir-lo en n parts iguals, això no té cap efecte sobre els interessos obtinguts en un nombre enter d'anys. Efectivament, l'interès en cada període és i/n, i en t anys tindrem, igual que abans,

$$C_t = C_0 + C_0 \cdot (n \cdot t) \cdot \frac{i}{n} = C_0 + C_0 \cdot t \cdot i \qquad \text{i} \qquad I_t = C_0 \cdot t \cdot i\,.$$

Exemple 1 *Capital en què es transformen* 1000 *euros sotmesos a un règim d'interès simple del* 6% *anual durant* 6 *anys i* 4 *mesos.*

Liquidació en mesos:
$C_6 = 1000 + 1000 \cdot 76 \cdot \dfrac{0.06}{12} = 1000 + 380 = 1380.$
Liquidació en anys i mesos:
$C_6 = 1000 + 1000 \cdot 6 \cdot 0.06 + 1000 \cdot 4 \cdot \dfrac{0.06}{12} = 1000 + 360 + 20 = 1380.$

[2] Sempre que representem la taxa d'interès per la lletra i, suposarem que està expressat en tant per u.

• Direm que un capital està sotmès a un règim d'*interès compost* quan finalitzat un període temporal mínim prefixat de dipòsit els interessos són acumulats al capital anterior per produir, conjuntament amb aquest, nous interessos. És a dir, els interessos es converteixen al final de cada període de dipòsit en capital productiu, la qual cosa no passava amb els interessos produïts en el règim d'interès simple. Els períodes de dipòsit prefixats s'anomenen *períodes de capitalització*. Per calcular els interessos obtinguts —i, per tant, la conversió del capital inicial C_0— en aquest règim, sigui i l'interès anual, en tant per u, al qual està sotmès durant t anys. Si el període de capitalització és anual obtenim

$$C_0 = C_0,\ C_1 = C_0 + C_0 \cdot i,\ C_2 = C_1 + C_1 \cdot i,\ \ldots,\ C_t = C_{t-1} + C_{t-1} \cdot i.$$

És a dir que obtenim la progressió geomètrica de $t+1$ termes i raó $1+i$,

$$C_0,\ C_1 = C_0(1+i),\ C_2 = C_1(1+i),\ \ldots,\ C_t = C_{t-1}(1+i).$$

Per tant,

$$C_t = C_0 \cdot (1+i)^t\,.$$

En aquest cas els interessos seran

$$I_t = C_0 \cdot (1+i)^t - C_0 = C_0 \cdot \left[(1+i)^t - 1\right].$$

Concretament, $(1+i)^t - 1$ euros seran els interessos que produeix 1 euro en t anys.

• Ara considerem l'interès compost quan el període de capitalització és inferior a l'any. Més concretament suposem que aquest període resulta de dividir l'any en n parts iguals. Si la taxa d'interès anual és i, es considera que la taxa en cadascun dels períodes és $\frac{i}{n}$. Llavors, en t anys, la successió de capitals corresponents al final de cada període, després de cada liquidació d'interessos, és

$$\underbrace{C_0, C_1, \ldots, C_n}_{\text{any } 1}, \underbrace{C_{n+1}, \ldots, C_{2n}}_{\text{any } 2}, \ldots, \underbrace{C_{(t-1)n+1}, \ldots, C_{tn}}_{\text{any } t}.$$

Aquí, C_k és el capital resultant després d'haver liquidat k vegades els interessos, i es compleix

$$C_k = C_{k-1}\left(1 + \frac{i}{n}\right),\ \forall k \geq 1.$$

O sigui que els successius C_k componen una progressió geomètrica de raó $\left(1+\frac{i}{n}\right)$, amb $t \cdot n + 1$ termes. Conseqüentment, si per tal d' abreujar la notació escrivim C_t en lloc de $C_{t \cdot n}$ per indicar el capital al cap de t anys, i I_t per indicar els seus interessos, tenim

$$\boxed{C_t = C_0 \cdot \left(1 + \frac{i}{n}\right)^{nt} \qquad \text{i} \qquad I_t = C_t - C_0 = C_0 \cdot \left[\left(1+\frac{i}{n}\right)^{nt} - 1\right]}. \tag{1}$$

Finalment, si fem $t = 1$ any i $C_0 = 1$ euro, obtindrem *els interessos que proporciona 1 euro en un any.* És a dir,

$$\boxed{\left(1 + \frac{i}{n}\right)^n - 1}.$$

Exemple 2 *Càlcul del capital que resulta de sotmetre, durant* 2 *anys i* 3 *mesos un capital inicial de* 200 *euros a un règim d'interès compost del* 4.5% *anual, amb liquidació mensual dels interessos.*

El nombre de liquidacions d'interessos en 2 anys i 3 mesos és $2 \cdot 12 + 3 = 27$. Per tant, el capital al final del període proposat és:

$$200\left(1+\frac{0.04}{12}\right)^{27} = 218.80 \text{ euros.}$$

Si es prefereix pensar en termes de la fórmula (1), l'exponent 27 es podia obtenir observant que $t = 2$ anys i 3 mesos, és a dir $t = 2.25$ anys i que $n \cdot t = 12 \cdot 2.25 = 27$.

Exemple 3 *Interessos que proporciona un euro en un any en règim d'interès compost del* 8%*, i períodes de capitalització mensual, trimestral, anual.*

$$\begin{array}{ll}
\text{Període mensual:} & \left(1+\dfrac{0.08}{12}\right)^{12} - 1 = 0.0830 \text{ euros.}\\
\text{Període trimestral:} & \left(1+\dfrac{0.08}{4}\right)^{4} - 1 = 0.0824 \text{ euros.}\\
\text{Període anual:} & (1+0.08)^{1} - 1 = 0.0800 \text{ euros.}
\end{array}$$

3 Equivalència de taxes o tipus d'interès

Si comparem els interessos produïts durant un any per un capital d'un euro en règim d'interès compost, amb període de capitalització anual i amb període inferior resultant de dividir l'any en n parts iguals, veiem que en aquest últim cas són més grans. Només cal observar que

$$\left(1+\frac{i}{n}\right)^{n} - 1 > i\,.$$

Efectivament, si utilitzem el desenvolupament del binomi de Newton, obtenim

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{i}{n}\right)^{n} - 1 &= \left[\binom{n}{0} + \binom{n}{1}\frac{i}{n} + \binom{n}{2}\frac{i^2}{n^2} + \cdots + \binom{n}{n}\frac{i^n}{n^n}\right] - 1 = \\
&= n\cdot\frac{i}{n} + \binom{n}{2}\frac{i^2}{n^2} + \cdots + \binom{n}{n}\frac{i^n}{n^n} = i + \left[\binom{n}{2}\frac{i^2}{n^2} + \cdots + \binom{n}{n}\frac{i^n}{n^n}\right] > i\,.
\end{aligned}$$

Les implicacions d'això són bastant evidents. Per exemple, si ens parlen d'una taxa anual d'interès compost del 5%, però la capitalització és mensual, tenim una taxa d'interès anual "real" superior, igual a

$$\left(1+\frac{0,05}{12}\right)^{12} - 1 = 0,05116, \text{ és a dir del } 5,116\% > 5\%\,.$$

Recordem que, segons hem vist al principi de l'apartat anterior, quan treballem amb règim d'interès simple no es donaven aquestes diferències. Era igual liquidar els interessos que proporcionava la taxa i al cap de l'any, que liquidar cada enèsima part de l'any els que proporcionava la taxa i/n.

Aquestes reflexions ens porten a considerar la qüestió de l'equivalència de taxes. Direm que *dues taxes són equivalents* si aplicades al mateix capital inicial durant el mateix temps produeixen els mateixos interessos i, conseqüentment, el mateix capital final.

Exemple 4

Si observem els exemples mostrats més amunt podem afirmar que:

- En règim d'interès compost, una taxa anual del $5,116\%$, amb liquidació anual, i una taxa mensual del $\frac{5}{12}\%$, amb liquidació mensual, són equivalents. No són equivalents una taxa anual del 5%, amb liquidació anual, i una mensual del $\frac{5}{12}\%$, amb liquidació mensual.
- En règim d'interès simple, una taxa anual i, amb liquidació anual, és equivalent a una taxa mensual $\frac{i}{12}$, amb liquidació mensual, i també a una taxa trimestral $\frac{i}{4}$, amb liquidació trimestral.

Taxa nominal i taxa anual equivalent (T.A.E.)

Quan treballem sota un règim d'interès compost hem demostrat la no equivalència entre la taxa anual i —amb període anual de capitalització—, i la taxa "real" resultant d'aquesta taxa anual "teòrica" en reduir el període de capitalització.

Anomenem *taxa nominal* a la taxa anual teòrica, i *taxa anual equivalent* (T.A.E.), a la taxa anual real que resulta de la taxa nominal en reduir el període de capitalització.

Exemple 5

- A una taxa nominal del 12% amb període de capitalització mensual li correspon una T.A.E. equivalent a la taxa d'interès mensual $\frac{0{,}12}{12} = 0,01$. Per tant la T.A.E. és

$$\left(1 + \frac{0,12}{12}\right)^{12} - 1 = 0,1268, \text{ és a dir del } 12,68\%\,.$$

- La taxa mensual $\frac{i}{12}$ equivalent a una T.A.E. del 12% compleix

$$\left(1 + \frac{i}{12}\right)^{12} - 1 = 0,12\,.$$

Per tant,

$$\frac{i}{12} = \sqrt[12]{1 + 0,12} - 1 = 0,00949, \text{ és a dir del } 0,949\%\,.$$

Conclusió: La taxa nominal que generaria una T.A.E. del 12% seria igual a $12 \cdot \dfrac{i}{12} = 12 \cdot 0,00949 = 0,11387$. O sigui, que la taxa nominal buscada seria del $11,387\%$.

4 Anualitats

- Anomenem *anualitat* a un capital constant que s'ingressa periòdicament en una entitat financera amb la finalitat d'acumular un capital més gran, o bé de liquidar un deute. Concretament:

  – *Anualitats de capitalització*: Són anualitats que s'ingressen al principi de cada any amb la finalitat d'acumular, juntament amb els seus interessos compostos, un capital al cap d'un cert nombre d'anys.

  També es parla d'anualitats de capitalització encara que aquestes no s'ingressin anualment, sinó en períodes inferiors de temps. Llavors, si no es diu el contrari, els períodes de capitalització coincideixen amb els períodes d'ingrés.

  – *Anualitats d'amortització*: Són anualitats que s'ingressen al final de cada any amb la finalitat de, juntament amb els interessos compostos, liquidar —també s'utilitza el terme *amortitzar*— un deute i els interessos compostos del deute.

  Igual que abans, els ingressos poden ser efectuats en períodes de temps inferiors a l'any, i els períodes de capitalització coincideixen amb els períodes d'ingrés.

- **Recerca de la relació entre l'anualitat de capitalització a i el capital C_t acumulat en t anys** per aquesta, en ser ingressada anualment durant t anys i sotmesa a una taxa anual i d'interès compost.

Observem que els capitals generats per les successives anualitats són els termes d'una progressió geomètrica que només caldrà sumar per obtenir C_t. Efectivament,

$$\begin{array}{lcl}
\text{Capital generat per la primera anualitat} & = & a(1+i)^t \\
\text{Capital generat per la segona anualitat} & = & a(1+i)^{t-1} \\
\text{Capital generat per la tercera anualitat} & = & a(1+i)^{t-2} \\
\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots & & \cdots \cdots \\
\text{Capital generat per l'última anualitat} & = & a(1+i)
\end{array}$$

Aquesta successió de t capitals és una progressió geomètrica de raó $(1+i)$ i si els sumem:

$$\begin{aligned}
C_t &= a(1+i)^t + a(1+i)^{t-1} + a(1+i)^{t-2} + \cdots + a(1+i) = \\
&= \frac{a(1+i)\left[(1+i)^t - 1\right]}{1+i-1} = \frac{a(1+i)\left[(1+i)^t - 1\right]}{i}.
\end{aligned}$$

Si els ingressos es fan en períodes resultants de dividir l'any en n parts iguals, la liquidació d'interessos es produeix en cadascun d'aquests períodes, i és immediat concloure que resulta una progressió geomètrica de $n \cdot t$ termes de raó $\left(1+\dfrac{i}{n}\right)$. Per tant,

$$\boxed{C_t = \frac{a\left(1+\frac{i}{n}\right)\left[\left(1+\frac{i}{n}\right)^{nt} - 1\right]}{\frac{i}{n}}}.$$

Exemple 6 *Càlcul del capital resultant, en* 5 *anys, de l'ingrés mensual de* 30 *euros al* 7% *d'interès anual.*

$$C_5 = \frac{30\left(1+\frac{0.07}{12}\right)\left[\left(1+\frac{0.07}{12}\right)^{60}-1\right]}{\frac{0.07}{12}} = 2160.32 \text{ euros}\,.$$

• **Recerca de la relació entre el deute D i l'anualitat** a que cal ingressar anualment, amb la taxa i d'interès compost, per amortitzar-lo en t anys.

El deute i els seus interessos s'amortitzen mitjançant la suma de la progressió geomètrica de les anualitats i els seus interessos:

$$D(1+i)^t \;=\; a(1+i)^{t-1}+a(1+i)^{t-2}+a(1+i)^{t-3}+\cdots+a(1+i)+a\,,$$

i per tant,

$$D(1+i)^t \;=\; \frac{a\left[(1+i)^t-1\right]}{i}.$$

Si es produeix, com abans, una reducció en els períodes d'ingrés i capitalització, es compleix:

$$\boxed{D\left(1+\frac{i}{n}\right)^{nt} = \frac{a\left[\left(1+\frac{i}{n}\right)^{nt}-1\right]}{\frac{i}{n}}}\,.$$

Exemple 7 *Càlcul de la mensualitat necessària per amortitzar un deute de* 10000 *euros en* 5 *anys al* 8% *anual.*

$$a = \frac{10000\left(1+\frac{0.08}{12}\right)^{60}\cdot\frac{0.08}{12}}{\left(1+\frac{0.08}{12}\right)^{60}-1} = 202.76 \text{ euros.}$$

5 Taules d'amortització

Quan s'amortitza un deute, una part de cadascuna de les anualitats que es satisfan es dirigeix a la liquidació del deute, i la part restant a la liquidació dels interessos. A la part esmentada en primer lloc l'anomenem *quota d'amortització*, i a la segona *quota d'interès*.

- La quota d'interès liquida els interessos produïts pel capital pendent que han sigut generats en el període de temps transcorregut entre l'última anualitat satisfeta i la que es satisfà en aquell moment.
- La quota d'amortització liquida la part del deute igual a la diferència entre els valors de l'anualitat i la quota d'interès.

A partir d'aquests conceptes s'elaboren unes taules en què es reflecteixen, a més d'aquestes quotes, el capital o deute amortitzat i el capital o deute pendent d'amortització.

Exemple 8 *S'ha de liquidar un deute de* 300.000 *euros en un any mitjançant pagaments mensuals, i taxa d'interès anual del* 9%. *Calcularem l'import de cada mensualitat a i el quadre d'amortització.*

$$300.000\left(1+\frac{0,09}{12}\right)^{12}=\frac{a\cdot\left[\left(1+\frac{0,09}{12}\right)^{12}-1\right]}{\frac{0,09}{12}} \qquad \Longrightarrow \qquad a=26.235,443 \text{ euros}\,.$$

Final del mes número	Anualitat — a —	Quota d'interès	Quota — QA_k — d'amortització	Capital o deute amortitzat	Capital o deute — D_k — pendent
					300.000,0
1	26.235,44	2.250,00	23.985,44	23.985,44	276.014,56
2	26.235,44	2.070,14	24.165,33	48.150,77	251.849,23
3	26.235,44	1.888,87	24.346,57	72.497,34	227.502,66
4	26.235,44	1.706,27	24.529,17	97.026,51	202.973,49
5	26.235,44	1.522,30	24.713,14	121.739,65	178.260,35
6	26.235,44	1.336,95	24.898,49	146.638,14	153.361,86
7	26.235,44	1.150,21	25.085,23	171.723,37	128.276,63
8	26.235,44	962,07	25.273,37	196.996,74	103.003,26
9	26.235,44	772,52	25.462,92	222.459,66	77.540,34
10	26.235,44	581,55	25.653,89	248.113,55	51.886,45
11	26.235,44	389,15	25.846,29	273.959,84	26.040,16
12	26.235,44	195,30	26.040,14	299.999,98	0,02

Observem, que en l'última anualitat s'hauran de pagar 0.02 euros més amb motiu dels arrodoniments. Finalment, no és difícil justificar, (aquí no ho farem), les fórmules generals que permeten conèixer la quota d'amortització QA_k en el pagament nombre k, i el deute pendent D_k després d'aquest pagament:

$$\begin{aligned} QA_k &= \left(a-D\cdot\frac{i}{n}\right)\left(1+\frac{i}{n}\right)^{k-1} \\ D_k &= D\left(1+\frac{i}{n}\right)^{k}-\frac{a\left[\left(1+\frac{i}{n}\right)^{k}-1\right]}{\frac{i}{n}}\,. \end{aligned}$$

Índex