1. Simplifiqueu i racionalitzeu quan calgui de manera que en els resultats no apareguin exponents negatius ni fraccionaris. (No utilitzeu els nombres decimals ni la calculadora):

a) $\sqrt[6]{\dfrac{16^{500}}{0.25^{997}}}$ b) $\dfrac{\sqrt[4]{a^7\,b^2}\;\sqrt[10]{a^8\,b^7}}{\sqrt[6]{a^5\,b^9}}$ c) $\sqrt{80}-3\sqrt{45}+\dfrac{10}{\sqrt{125}}$ d) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+4}$

a) $\sqrt[6]{\dfrac{16^{500}}{0.25^{997}}}=\sqrt[6]{\dfrac{(2^4)^{500}}{(2^{-2})^{997}}}=\sqrt[6]{\dfrac{2^{2000}}{2^{-1994}}}=\sqrt[6]{2^{3994}}=2^{665}\sqrt[6]{2^4}=\boxed{2^{665}\sqrt[3]{4}}.$

b) $\dfrac{\sqrt[4]{a^7\,b^2}\;\sqrt[10]{a^8\,b^7}}{\sqrt[6]{a^5\,b^9}}=\sqrt[60]{a^{105+48-50}\cdot b^{30+42-90}}=\sqrt[60]{\dfrac{a^{103}}{b^{18}}}=\dfrac{\sqrt[60]{a^{103}}}{\sqrt[60]{b^{18}}}\cdot\dfrac{\sqrt[60]{b^{42}}}{\sqrt[60]{b^{42}}}=\boxed{\dfrac{a\;\sqrt[60]{a^{43}b^{42}}}{b}}.$

c) $\sqrt{80}-3\sqrt{45}+\dfrac{10}{\sqrt{125}}=\sqrt{16\cdot 5}-3\sqrt{9\cdot 5}+\dfrac{10}{\sqrt{25\cdot 5}}=4\sqrt{5}-9\sqrt{5}+\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

$=-5\sqrt{5}+\dfrac{2\sqrt{5}}{5}=\boxed{-\dfrac{23\sqrt{5}}{5}}.$

d) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+4}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+4}\cdot\dfrac{\sqrt{2}-4}{\sqrt{2}-4}=\dfrac{2-4\sqrt{2}}{2-16}=\dfrac{-2\left(2\sqrt{2}-1\right)}{-14}=\boxed{\dfrac{2\sqrt{2}-1}{7}}.$

2. Resoleu l'equació: $\sqrt{1-x}-\dfrac{x}{3}=x-\dfrac{2}{27}$.

$$\sqrt{1-x}-\frac{x}{3}=x-\frac{2}{27}\implies\sqrt{1-x}=\frac{4x}{3}-\frac{2}{27}\implies 27^2(1-x)=(36x-2)^2$$
$$\implies 729-729x=1296x^2-144x+4\implies 1296x^2+585x-725=0$$
$$\implies x=\frac{-585\pm\sqrt{342225+3758400}}{2592}=\frac{-585\pm 2025}{2592}=\begin{cases}\boxed{\dfrac{5}{9}}\\[2mm] -\dfrac{145}{144}\end{cases}$$

La segona solució no és bona perquè el primer membre esdevé negatiu mentre que el segon és positiu. La solució és correcte perquè els dos membres prenen el valor 13/27.

3. Resoleu **una de les dues** qüestions següents:

A. Els valors del polinomi $p(x)=x^2+mx+9$ són positius per a qualsevol valor de x. Trobeu, raonadament, els valors possibles de m i dibuixeu el gràfic de $p(x)$ per a $m=4$.

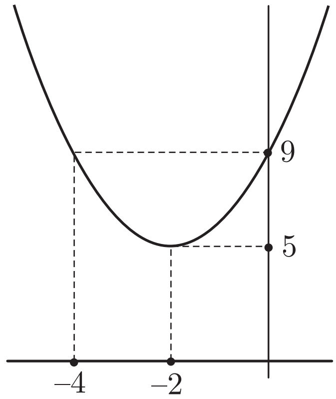
B. Trobeu dos polinomis $p(x)$ i $q(x)$ tals que $\dfrac{x^3-2}{x+4}=p(x)+\dfrac{q(x)}{x+4}$.

A. Perquè $p(x)$ tingui tots els seu valors positius és necessari que no tingui arrels. Per tant el discriminant de l'equació $p(x)=0$ ha de ser negatiu. És a dir,

$$m^2-4\cdot 9<0\implies m^2<36\implies\boxed{-6<m<6}.$$

Per aquest valors de m es compleix $p(x)>0$ i, en ser el coeficient de x^2 és positiu.

En ser $m = 4$ el polinomi no té arrels i el seu gràfic, —una paràbola d'eix de simetria paral·lel a l'eix de les ordenades—, no talla l'eix de les abscisses. Cerquem el seu vèrtex i el tall amb les ordenades.



$$\text{Vèrtex: } x_v = -\frac{4}{2} = -2 \Longrightarrow y_v = p(-2) = 4 - 8 + 9 = 5.$$
$$\text{Tall } OY : x = 0 \Longrightarrow p(0) = 9.$$

Llavors, per simetria, un altre punt de la paràbola serà $(-4, 9)$.

B. No considerem la solució trivial $p(x) = 0$ i $q(x) = x^3 - 2$ perquè ja està contemplada en l'enunciat. Hi ha moltes solucions. Una d'elles s'obté de fer la divisió.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & 0 & -2 \\ -4 & & -4 & 16 & -64 \\ \hline & 1 & -4 & 16 & -66 \end{array} \Longrightarrow \boxed{p(x) = x^2 - 4x + 16 \quad \text{i} \quad q(x) = -66}.$$

4. Simplifiqueu la suma $\dfrac{3}{x^3 - 9x} + \dfrac{2 - x}{x^3 - 4x^2 + 3x}$.

$$\left.\begin{array}{l} x^3 - 9x = x(x^2 - 9) = x(x-3)(x+3) \\ x^3 - 4x^2 + 3x = x(x^2 - 4x + 3) = x(x-1)(x-3) \end{array}\right\} \Longrightarrow \text{mcm } = x(x-3)(x+3)(x-1).$$

$$\begin{aligned} \frac{3}{x^3 - 9x} + \frac{2-x}{x^3 - 4x^2 + 3x} &= \frac{3(x-1) + (2-x)(x+3)}{x(x-3)(x+3)(x-1)} = \frac{3x - 3 - x^2 - x + 6}{x(x-3)(x+3)(x-1)} \\ &= \frac{-x^2 - 2x + 3}{x(x-3)(x+3)(x-1)} = \frac{-(x-3)(x+1)}{x(x-3)(x+3)(x-1)} \\ &= \boxed{\frac{-x-1}{x(x+3)(x-1)} = \frac{-x-1}{x^3 + 2x^2 - 3x}}. \end{aligned}$$

5. Considereu el polinomi $p(x) = -2x^3 - 5x^2 + 2x + 5$.

a) Trobeu les seves arrels.

b) Feu-ne la descomposició factorial.

c) Estudieu, mitjançant el traçat de gràfics de rectes i/o paràboles, quins són els nombres x tals que $p(x) > 0$.

d) Traceu un gràfic de $p(x)$.

e) Trobeu el nombre x_0 tal que el valor $p(x_0)$ és màxim localment.

$$\left.\begin{array}{r|rrrr} & -2 & -5 & 2 & 5 \\ 1 & & -2 & -7 & -5 \\ \hline & -2 & -7 & -5 & 0 \\ -1 & & 2 & 5 & \\ \hline & -2 & -5 & 0 & \\ \multicolumn{5}{l}{-2x - 5 = 0 \Longrightarrow x = -\frac{5}{2}} \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

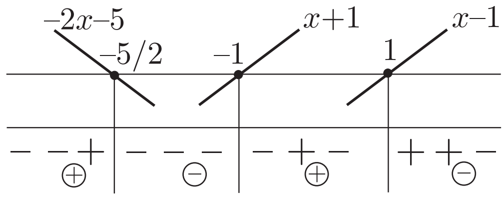
a) Després d'aplicar la regla de Ruffini hem obtingut les arrels,

$$\boxed{1, -1, -\frac{5}{2}}.$$

b) També hem obtingut la descomposició factorial,

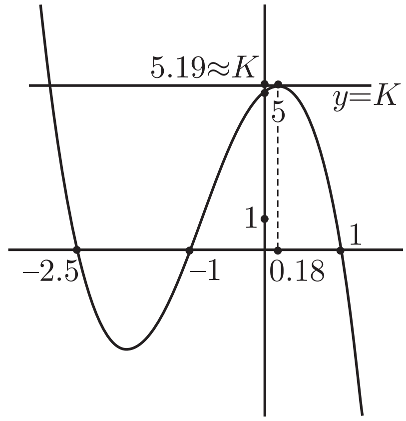
$$\boxed{p(x) = (x-1)(x+1)(-2x-5)}.$$

c) Tracem els gràfics dels tres factors de la descomposició. Representem el seu signe seguint l'ordre de la descomposició. En resulta,



$$\boxed{p(x) > 0 \Longleftrightarrow x \in \left(-\infty, -\frac{5}{2}\right) \cup (-1, 1)}.$$

d) i e) El valor màxim K s'obtindrà, en una arrel doble de $p(x) = K$. És a dir, en un punt x tal que,



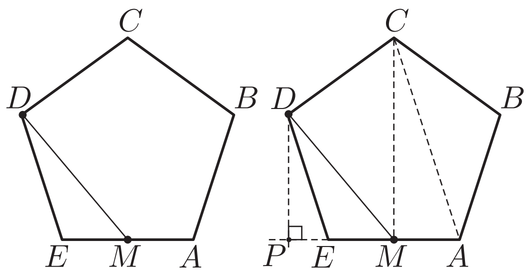
$$\begin{cases} -2x^3 - 5x^2 + 2x + 5 = K \\ -6x^2 - 10x + 2 = 0 \end{cases}$$

Llavors, $x = \dfrac{5 \pm \sqrt{25+12}}{-6} \approx \begin{cases} -1.85 \\ 0.18\,. \end{cases}$

Per tant, s'obté el màxim en $\boxed{x \approx 0.18}$ i el seu valor és aproximadament $\boxed{p(0.18) = 5.19}$.

L'elecció del punt x es justifica en ser negatiu el coeficient de x^3 i, consegüentment, el gràfic de $p(x)$ decreixent en els extrems de la recta real.

6. Considereu el pentàgon regular $ABCDE$ de la primera figura adjunta. El seu costat té mesura igual a 1. El punt M és el punt mitjà del costat AE. Calculeu els valors exacte i aproximat de la longitud MD, sense l'ajut de la trigonometria.
Indicació: Un mode de tractament del problema passa per considerar les línies que hem afegit a la segona figura.



Calcularem, en aquest ordre, PE, DP i MD. Partirem del resultat conegut, $AC = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

- $\triangle EDP \sim ACM \Longrightarrow \dfrac{PE}{MA} = \dfrac{ED}{AC} \Longrightarrow PE = \dfrac{1 \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = \dfrac{1}{1+\sqrt{5}} \cdot \dfrac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}-1} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$.
- Apliquem el teorema de Pitàgores sobre $\triangle EDP$.

$$DP = \sqrt{DE^2 - PE^2} = \sqrt{1^2 - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{16 - (6 - 2\sqrt{5})}{16}} = \frac{1}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}\,.$$

- Apliquem el teorema de Pitàgores sobre $\triangle MDP$.

$$MD = DP^2 + MP^2 \Longrightarrow MD = \sqrt{\frac{1}{16}\left(10 + 2\sqrt{5}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{10 + 2\sqrt{5}}{16} + \frac{\left(1+\sqrt{5}\right)^2}{16}} = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5} + 6 + 2\sqrt{5}}}{4} = \frac{\sqrt{16 + 4\sqrt{5}}}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{4(4+\sqrt{5})}}{4} = \frac{2\sqrt{4+\sqrt{5}}}{4} = \boxed{\frac{\sqrt{4+\sqrt{5}}}{2} \approx 1.2486}.$$