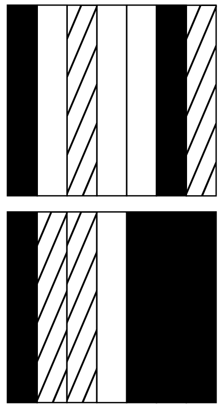
IES Pons d'Icart
MATEMÀTIQUES – 1R BAT CCSS 26/II/2009
2a avaluació – prova de preparació 24+24+12+12+12+12+12=108

FEU ELS DOS PRIMERS I CINC DE TRIATS ENTRE LA RESTA

1. Volem decorar una paret amb 7 plafons disposats verticalment un al costat de l'altre. Aquests poden ser del mateix tipus o fins un màxim de tres tipus diferents: negres, amb ratlles —igualment orientats—, o blancs. (Dos exemples de decoracions els teniu a la dreta d'aquest enunciat.) Esbrineu raonadament,



a) El nombre de dissenys diferents que es poden fer.

b) El nombre de dissenys diferents en què hi hagi 3 plafons blancs, 2 de negres i 2 de ratllats.

c) El nombre de dissenys diferents en què hi hagi 2 i només 2 plafons ratllats i els altres no ratllats.

a) Codifiquem $\begin{cases} B \longrightarrow \text{plafó blanc} \\ N \longrightarrow \text{plafó negre} \\ R \longrightarrow \text{plafó ratllat.} \end{cases}$

Les decoracions dels exemples es presentarien així: $\begin{cases} NBRBBNR \\ NRRBNNN \end{cases}$

Observem que són col·leccions ordenades de $k = 7$ elements triats entre $n = 3$ elements, on aquests es poden repetir de manera no fixada. Per tant,

$$\text{Nombre de dissenys } = \boxed{\mathrm{VR}_3^7 = 3^7 = 2187}\,.$$

b) En aquest cas són col·leccions ordenades de $k = 7$ elements triats entre $n = 3$, on aquests últims es repeteixen 3, 2 i 2 vegades respectivament. Per tant,

$$\text{Nombre de dissenys } = \boxed{\mathrm{PR}_7^{3,3,2} = \frac{7!}{3!\,2!\,2!} = 210}\,.$$

c) Primerament triem 2 llocs entre 7 per col·locar els dos plafons ratllats. L'ordre dels llocs no importa perquè els plafons són iguals i, a més, no podem agafar dos llocs repetits perquè els plafons han d'estar en llocs diferents. Per tant,

$$\text{Nombre de disposicions dels plafons ratllats } = \mathrm{C}_7^2 = \frac{7 \cdot 6}{2} = 21\,.$$

Seguidament cal col·locar 5 plafons blancs i/o negres. Aquí les col·leccions del tipus $BNBBN$ són ordenades i amb repetició no fixada. Per tant, per cada manera de col·locar els dos plafons ratllats tenim,

$$\text{Nombre de disposicions dels 5 plafons blancs i/o negres } = \mathrm{VR}_2^5 = 2^5 = 32\,.$$

Finalment s'obté: nombre de dissenys $= \boxed{\mathrm{C}_7^2 \cdot \mathrm{VR}_2^5 = 21 \cdot 32 = 672}\,.$

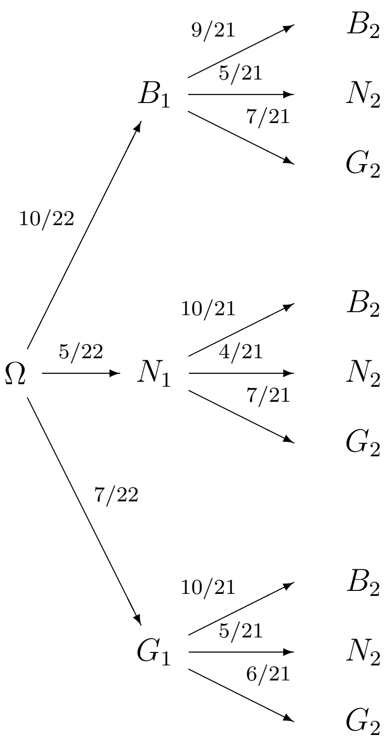
2. Tenim una urna amb 10 boles blanques, 5 negres i 7 grogues. Traiem dues boles sense reposició. Calculeu raonadament

a) La probabilitat que la primera sigui blanca i la segona groga.

b) La probabilitat que la segona sigui negra.

c) La probabilitat que si la segona és negra, hagi sigut blanca la primera.

Anomenem B_1, N_1 i G_1 els esdeveniments treure bola, respectivament, blanca, negra i groga en la primera extracció. De la mateixa manera, anomenem B_2, N_2 i G_2 treure blanca, negra i groga en la segona extracció. Llavors tenim l'arbre de probabilitats següent,



a) $P(G_2 \cap B_1) = P(G_2/B_1) \cdot P(B_1) = \dfrac{7}{21} \cdot \dfrac{10}{22} = \boxed{\dfrac{5}{33}}$.

b) $P(N_2) = P(N_2 \cap B_1) + P(N_2 \cap N_1) + P(N_2 \cap G_1)$

$$= \frac{10}{22} \cdot \frac{5}{21} + \frac{5}{22} \cdot \frac{4}{21} + \frac{7}{22} \cdot \frac{5}{21} = \frac{105}{22 \cdot 21} = \boxed{\frac{5}{22}}.$$

c) $P(B_1/N_2) = \dfrac{P(B_1 \cap N_2)}{P(N_2)} = \dfrac{P(N_2 \cap B_1)}{P(N_2)} = \dfrac{P(N_2/B_1) \cdot P(B_1)}{P(N_2)}$

$$= \frac{\frac{5}{21} \cdot \frac{10}{22}}{\frac{5}{22}} = \frac{5 \cdot 10}{5 \cdot 21} = \boxed{\frac{10}{21}}.$$

3. En una tenda venen 3 tipus de camises, T_1, T_2, T_3. Volem comprar 5 camises. Si fem la tria a l'atzar quina és la probabilitat que n'hi hagi dues i només dues del tipus T_1.

Representem per T_i la tria d'una camisa del tipus "i". Recordem que ens interessa que els esdeveniments elementals siguin equiprobables per així poder aplicar la fórmula de Laplace. De bon principi es pot pensar en dues hipòtesis de sortida no compatibles, relacionades amb la manera de fer la tria, que porten a solucions diferents:

- **La tria la fem pensant en conjunts de cinc camises.** És a dir, que és igualment probable el que, per exemple, siguin totes del tipus 1, o 2 del tipus 1 i 3 del tipus 2, o 1 del tipus 1, 2 del 2 i 2 del 3, etc. Això implica que els esdeveniments equiprobables són col·leccions <u>no ordenades</u> amb repetició.

- **La tria la fem prenent decisions camisa a camisa, d'una en una.** És a dir triem el tipus de la primera camisa, després el de la segona i així fins arribar al de la cinquena. Llavors, per exemple, $T_1T_1T_1T_1T_1$, $T_2T_1T_1T_2T_2$, $T_1T_2T_2T_2T_1$, ... són equiprobables. En canvi l'esdeveniment triar 5 camises del tipus 1 té menys probabilitat que el de triar-ne 2 del 1 i 3 del 2, perquè aquesta segona es pot fer de moltes maneres. Això no passava amb la primera hipòtesi. Amb aquesta segona hipòtesi els esdeveniments elementals equiprobables són col·leccions <u>ordenades</u> amb repetició.

Solució amb la hipòtesi 1:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Casos possibles} = \mathrm{CR}_3^5 \\ \text{Casos favorables} = \mathrm{CR}_2^3\end{array}\right\} \Longrightarrow P(T_1T_1) = \frac{\mathrm{CR}_2^3}{\mathrm{CR}_3^5} = \frac{\mathrm{C}_4^3}{\mathrm{C}_7^5} = \boxed{\frac{4}{21} \approx 0.190}.$$

Solució amb la hipòtesi 2:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Casos possibles} = \mathrm{VR}_3^5 \\ \text{Casos favorables} = \mathrm{C}_5^2 \cdot \mathrm{VR}_2^3\end{array}\right\} \Longrightarrow P(T_1T_1) = \frac{\mathrm{C}_5^2 \cdot \mathrm{VR}_2^3}{\mathrm{VR}_3^5} = \frac{10 \cdot 8}{243} = \boxed{\frac{80}{243} \approx 0.329}.$$

4. Opereu, simplifiqueu i racionalitzeu si és el cas: a) $\dfrac{\sqrt{x^3} \cdot \sqrt[4]{x^{22}y^7}}{\sqrt[10]{x^{10}y}}$ b) $\dfrac{\sqrt[3]{500} - \sqrt[3]{108}}{\sqrt[3]{16}}$

a) $\dfrac{\sqrt{x^3} \cdot \sqrt[4]{x^{22}y^7}}{\sqrt[10]{x^{10}y}} = \sqrt[20]{\dfrac{x^{30} \cdot x^{110} \cdot y^{35}}{x^{20} \cdot y^2}} = \sqrt[20]{x^{120} \cdot y^{33}} = \boxed{x^6\, y\, \sqrt[20]{y^{13}}}.$

b) $\dfrac{\sqrt[3]{500} - \sqrt[3]{108}}{\sqrt[3]{16}} = \dfrac{\sqrt[3]{4 \cdot 125} - \sqrt[3]{4 \cdot 27}}{\sqrt[3]{2^4}} = \dfrac{5\sqrt[3]{4} - 3\sqrt[3]{4}}{2\sqrt[3]{2}} = \dfrac{2\sqrt[3]{4}}{2\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\dfrac{4}{2}} = \boxed{\sqrt[3]{2}}.$

5. Si $a \neq 0$ i $b \neq 0$, demostreu que $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ i $\sqrt{a+b}$ sempre són diferents.

Són diferents perquè si fossin iguals tindríem que $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = a + b$ i, llavors

$$a + 2\sqrt{a}\sqrt{b} + b = a + b \Longrightarrow 2\sqrt{a}\sqrt{b} = 0 \Longrightarrow a = 0 \text{ o bé } b = 0,$$

la qual cosa és una contradicció amb la hipòtesi de partida.

6. Quants termes consecutius de la progressió

$$312,\ 305,\ 298,\ 291,\ \ldots$$

heu d'agafar perquè la seva suma sigui igual a 6987.

Observem que és una progressió aritmètica de diferència $d = -7$. Llavors

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \quad \Longrightarrow \quad 6987 = \frac{312 + 312 + (n-1)(-7)}{2} \cdot n \Longrightarrow 13974 = (624 - 7n + 7)\, n$$

$$\Longrightarrow \quad 7n^2 - 631n + 13974 = 0 \Longrightarrow n = \frac{631 \pm \sqrt{6889}}{14} = \frac{631 \pm 83}{14} = \begin{cases} \boxed{51} \\ 39.14 \end{cases}$$

7. Trobeu el valor exacte de la suma d'infinits termes

$$0.77 - 0.077 + 0.0077 - 0.00077 + \cdots$$

i digueu si és racional o irracional.

Observem que es tracta de la suma dels infinits termes d'una progressió geomètrica de raó $r = \dfrac{-1}{10}$. Per tant en ser $-1 < r < 1$, tenim

$$S_\infty = \frac{a_1}{1 - r} = \frac{0.77}{1 - \left(\dfrac{-1}{10}\right)} = \frac{0.77}{\dfrac{11}{10}} = \frac{77}{110} = \boxed{\frac{7}{10} = 0.7}.$$

8. Volem triplicar un capital en 12 anys. Quin interès compost hem de contractar?

Anomenem C el capital inicial. Llavors

$$3C = C(1+i)^{12} \Longrightarrow 3 = (1+i)^{12} \Longrightarrow 1+i = \sqrt[12]{3} \Longrightarrow i = \sqrt[12]{3} - 1 \approx 0.09587 = \boxed{9.59\%}.$$

9. Estudieu en quina de les dues situacions següents es produeixen més interessos. Col·loquem un mateix capital a,

a) Un interès compost del 5% anual, durant un any, amb període de capitalització semestral.

b) Un interès compost del 4.8% anual, durant un any, amb període de capitalització mensual.

Amb l'estudi de l'interès que produeix 1€, és a dir la T.A.E., és suficient:

- Primera opció: $\left(1+\dfrac{0.05}{2}\right)^2 - 1 = 1.025^2 - 1 = 0.050625 \approx 5.06\%.$
- Segona opció: $\left(1+\dfrac{0.048}{12}\right)^{12} - 1 = 1.004^{12} - 1 = 0.04907 \approx 4.91\%.$

Es produeixen més interessos amb la $\boxed{\text{primera opció}}$.

10. Volem recollir 3500 €per un viatge dipositant 6 mensualitats en un banc que ofereix un 4% d'interès compost anual. Quin és el valor de cadascuna de les mensualitats que ens permetrà recollir al final dels 6 mesos la suma de diners desitjada?

Apliquem directament la fórmula de les anualitats de capitalització, tenint en compte que fem dipòsits mensualment, és a dir que partim l'any en 12 parts en cadascuna de les quals es liquiden interessos. Si anomenem m la mensualitat,

$$3500 = \frac{m\left(1+\dfrac{0.04}{12}\right)\left[\left(1+\dfrac{0.04}{12}\right)^6 - 1\right]}{\dfrac{0.04}{12}}.$$

Llavors,

$$m = \frac{3500 \cdot 0.04}{12 \cdot \dfrac{12.04}{12}\left[\left(\dfrac{12.04}{12}\right)^6 - 1\right]} \approx \frac{140}{0.2428156} \approx \boxed{576.57€}.$$