IES Pons d'Icart
MATEMÀTIQUES – 1R BAT CCSS 24/11/2008
Estadística, rudiments d'àlgebra i combinatòria [6+14+(6+14)]+[18+6]+[12]+[4×4]+[4×2]=100

1. La factura de la compra en euros dels 800 clients que un supermercat ha tingut en un dia té la següent distribució de freqüències:

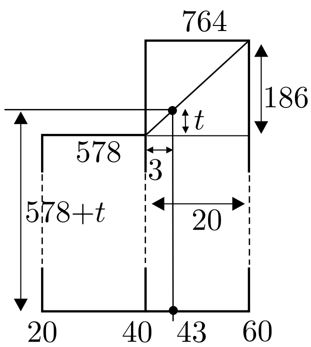
Factura en €	[0 , 20)	[20 , 40)	[40 , 60)	[60 , 80)	[80 , 100)
Nombre de clients	250	328	186	30	6

a) Descriviu la població objecte de l'estudi, la variable estadística i el seu tipus.
b) Calculeu el percentatge de clients tals que la factura no supera els 43 €.
c) Calculeu la mitjana i la mediana.

a) **Població:** 800 clients. **Variable:** Factura de la compra. **Tipus:** Quantitativa contínua.

b) Calculem el valor de t en el gràfic:

$$\frac{t}{43-40} = \frac{764-578}{60-40} \Longrightarrow t = \frac{186 \cdot 3}{20} = 27.9.$$

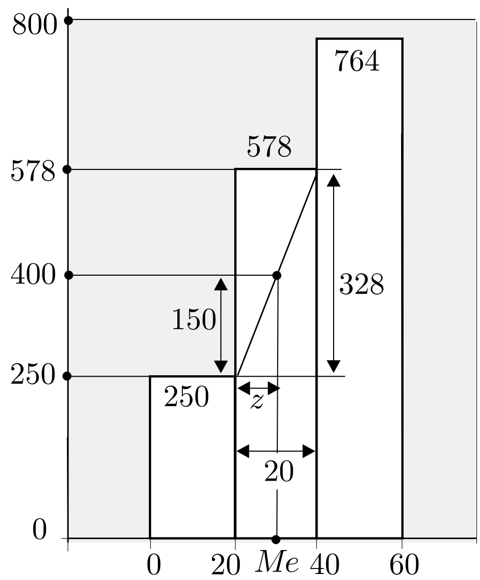


Per tant, hi ha $578 + 27.9 = 605.9$ observacions en què no se superen els 43 €. Correspon a una freqüència relativa acumulada de valor $\dfrac{605.9}{800} = 0.757375$, és a dir un $\boxed{75.74\%}$. Així, $\boxed{43\text{ €} \approx P_{76}}$.

c)

m_i	n_i	$m_i \cdot n_i$
10	250	2500
30	328	9840
50	186	9300
70	30	2100
90	6	540
	800	24280

$$\Longrightarrow \bar{x} = \frac{24280}{800} = \boxed{30.35\text{ €}}.$$



Me $= 20 + z$, en què $\dfrac{z}{40-20} = \dfrac{400-250}{578-250}$.

Conseqüentment, **Me** $= 20 + \dfrac{20 \cdot 150}{328} \approx \boxed{29.146}$.

2. En la taula adjunta teniu les notes en matemàtiques i filosofia d'un grup de 8 alumnes.

X : Notes en matemàtiques	3	4	5	4	7	7	9	9
Y : Notes en filosofia	2	4	4	5	6	5	6	8

(enunciat corregit)

Sabem que $\bar{x} = 6$, $\sigma_x = \sqrt{4.75}$, $\bar{y} = 5$ i $\sigma_y = \sqrt{2.75}$.

a) Trobeu l'equació de la recta de regressió de Y sobre X i representeu-la gràficament junt amb el núvol de punts de la distribució bidimensional.

b) Quina seria l'estimació en la nota de filosofia, a partir de la recta de regressió, per a un alumne que treu un 7 en matemàtiques, (aproximeu-la a les dècimes de punt)?

a) Càlcul de la covariància $\sigma_{xy} = \dfrac{\sum x_i \cdot y_j \cdot n_{ij}}{8} - 6 \cdot 5$, (observem que $i = j$ i $n_{ij} = 1$):

x_i	y_j	$x_i \cdot y_j$
3	2	6
4	4	16
5	4	20
4	5	20
7	6	42
7	5	35
9	6	54
9	8	72
		265

$\Longrightarrow$

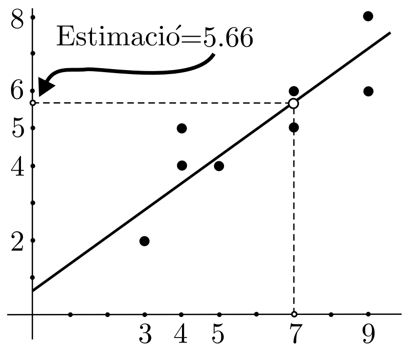
$$\sigma_{xy} = \frac{265}{8} - 6 \cdot 5 = 3.125 \Longrightarrow r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{3.125}{\sqrt{4.75} \cdot \sqrt{2.75}} \approx 0.86464\,.$$

Aquest valor de r indica correlació lineal de grau bastant fort i sentit positiu.

La recta de regressió de y sobre x és:

$$y - \bar{y} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}(x - \bar{x}) \Longleftrightarrow y - 5 = \frac{3.125}{4.75}(x - 6)$$

$$\Longleftrightarrow \boxed{y = 0.65789 \cdot x + 1.05263}\,.$$



b) L'estimació de la nota de filosofia per a un 7 de matemàtiques és:

$$\hat{y} = 0.65789 \cdot 7 + 1.05263 \approx \boxed{5.7}\,.$$

3. Considereu el sistema d'equacions $\begin{cases} x - 3y = 0 \\ x - y = 2. \end{cases}$

Resoleu-lo analítica i gràficament i presenteu els valors dels punts de tall amb els eixos de coordenades i els pendents de les rectes associades.

Apliquem el mètode de reducció. Anomenem E_1 i E_2 les equacions. El sistema de l'enunciat és equivalent al sistema:

$$\left.\begin{aligned} E_1 :&\quad x - 3y = 0 \\ E_1 - E_2 :&\quad -3y + y = -2 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{aligned} x - 3y &= 0 \\ -2y &= -2 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \boxed{y = \frac{-2}{-2} = 1 \text{ i } x = 3y = 3 \cdot 1 = 3}\,.$$

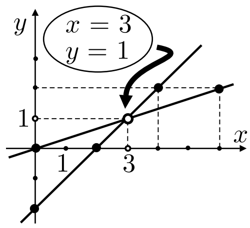
Construïm les taules de valors per a tres solucions de cadascuna de les equacions que incloguin els talls amb els eixos de coordenades:

$\boxed{E_1}$

x	$y = \dfrac{x}{3}$
0	0
3	1
6	2

$\boxed{E_2}$

x	$y = x - 2$
0	-2
2	0
4	2



Les coordenades del punt de tall $(3\,,\,1)$, coincideixen amb els valors numèrics de la resolució analítica del sistema.

Els valors dels pendents de les rectes són els coeficients de la variable x en la presentació expl-icita de les equacions. És a dir, $\boxed{\dfrac{1}{3} \;\text{ i }\; 1}$.

4. Amb les xifres 1, 2, 3, 5 i 7, calculeu **"raonadament"** **quatre** dels cinc apartats següents:

a) El nombre de productes de tres factors, de **resultat diferent**, que es poden construir.

b) El nombre de números de 5 **xifres diferents** que es poden construir.

c) El nombre de números de 5 xifres que es poden construir.

d) El nombre de números de 10 xifres que tinguin 6 uns, 1 dos, 1 tres, 1 cinc i 1 set, que es poden construir.

e) El nombre de números de 5 xifres que tenen 3 sets, —ni un més ni un menys—, que es poden construir.

En tots els apartats anomenem $\begin{cases} n = \text{nombre d'elements diferents} \\ k = \text{nombre d'elements de cada col·lecció} \end{cases}$

a) Les col·leccions són productes de $k = 3$ factors triats entre $n = 5$ en què es poden repetir els factors i, per la propietat commutativa, l'ordre no importa. Per tant,

$$\text{Nombre de productes} = \mathrm{CR}_5^3 = \mathrm{C}_{5+3-1}^3 = \mathrm{C}_7^3 = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \boxed{35}\,.$$

b) Aquí tenim $n = k = 5$, en què la posició de les xifres importa i, per tant, són col·leccions ordenades i no hi ha repetició, en ser les xifres diferents. Per tant,

$$\text{Nombre de números} = \mathrm{V}_5^5 = \mathrm{P}_5 = 5\,! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = \boxed{120}\,.$$

c) Aquest apartat és igual a l'anterior amb una excepció, les xifres es poden repetir. Per tant,

$$\text{Nombre de números} = \mathrm{VR}_5^5 = 5^5 = \boxed{3125}\,.$$

d) Ara tenim $k = 10$ i $n = 5$. Són col·leccions ordenades en què està fixat el nombre de vegades, $\alpha_1 = 6, \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = 1$, que es repeteix cada xifra. Així,

$$\text{Nombre de números} = \mathrm{PR}_{10}^{6,1,1,1,1} = \mathrm{PR}_{10}^{6} = \frac{10\,!}{6\,!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = \boxed{5040}\,.$$

e) Distribuir 3 sets entre 5 llocs, equival a construir col·leccions no ordenades de 3 llocs (entre 5) no repetits. És a dir, C_5^3. Llavors, per cada manera de situar els 3 sets hem de comptar quantes col·leccions ordenades amb repetició es poden fer amb els quatre números, 1, 2, 3, 5, que queden. Conseqüentment.

$$\text{Nombre de números} = \mathrm{C}_5^3 \cdot \mathrm{VR}_4^2 = \frac{5\cdot 4}{2\cdot 1}\cdot 16 = \boxed{160}\,.$$

5. Resoleu **dues** de les tres qüestions següents:

a) Desenvolupeu i simplifiqueu $(2x^2-1)^4$ com una suma de 5 sumands utilitzant la fórmula de la potència d'un binomi.

b) Calculeu: i) $\mathrm{PR}_7^{3,2,2}$ ii) C_8^4 iii) CR_3^4 iv) $\binom{2009}{2006}+\binom{2009}{2007}+\binom{2009}{2008}+\binom{2009}{2009}$

c) Raoneu si és cert o fals que:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot 3^k = \binom{n}{0}+\binom{n}{1}\cdot 3+\binom{n}{2}\cdot 3^2+\cdots+\binom{n}{n}\cdot 3^n = 4^n.$$

a) $$\binom{4}{0}\left(2x^2\right)^4+\binom{4}{1}\left(2x^2\right)^3\cdot(-1)+\binom{4}{2}\left(2x^2\right)^2\cdot(-1)^2+\binom{4}{3}\left(2x^2\right)\cdot(-1)^3+\binom{4}{4}\cdot(-1)^4$$
$$= \boxed{16x^8-32x^6+24x^4-8x^2+1}\,.$$

b) i) $\mathrm{PR}_7^{3,2,2} = \dfrac{7\,!}{3\,!\,2\,!\,2\,!} = 7\cdot 5\cdot 3\cdot 2 = \boxed{210}$.

ii) $\mathrm{C}_8^4 = \dfrac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 7\cdot 2\cdot 5 = \boxed{70}$.

iii) $\mathrm{CR}_3^4 = \mathrm{C}_{3+4-1}^4 = \mathrm{C}_6^4 = \mathrm{C}_6^2 = \dfrac{6\cdot 5}{2} = \boxed{15}$.

iv) $$\binom{2009}{2006}+\binom{2009}{2007}+\binom{2009}{2008}+\binom{2009}{2009} = \binom{2010}{2007}+\binom{2010}{2009} = \binom{2010}{3}+\binom{2010}{1}$$
$$= \frac{2010\cdot 2009\cdot 2008}{6}+2010 = \boxed{1351416130}\,.$$

c) És cert perquè,

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}3^k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^{n-k}\cdot 3^k = (1+3)^n = 4^n\,.$$