IES Pons d'Icart
MATEMÀTIQUES – 4T ESO B 10/01/2011
Nombres i equacions – 4 $3+1.5+1.5+4+3+1.5$

Alumnat que heu de recuperar. Resoleu els apartats 1, 2, 3 i 4.
Alumnat que no heu de recuperar. Resoleu els apartats 3, 4, 5 i 6.

---

1. Opereu, simplifiqueu i racionalitzeu quan calgui. No utilitzeu la calculadora ni els nombres decimals. En el resultat no han d'aparèixer ni exponents negatius, ni fraccionaris:

a) $\dfrac{\dfrac{16}{3}-4\left(\dfrac{1}{8}-1\right)}{\dfrac{16}{3}-4}$.

b) $\dfrac{10^{-5}\cdot 5^{20}}{25^9\cdot 0.01^3}$.

c) $\sqrt{1875}-\dfrac{225}{\sqrt{27}}$.

d) $\dfrac{\sqrt[5]{a^3\,b}\,\sqrt{a\,b}}{\sqrt[10]{a^4\,b}}$.

a) $$\frac{\dfrac{16}{3}-4\left(\dfrac{1}{8}-1\right)}{\dfrac{16}{3}-4}=\frac{\dfrac{16}{3}-4\left(-\dfrac{7}{8}\right)}{\dfrac{16-12}{3}}=\frac{\dfrac{16}{3}-\dfrac{7}{2}}{\dfrac{4}{3}}=\frac{\dfrac{32+21}{6}}{\dfrac{4}{3}}=\frac{51\cdot 3}{4\cdot 6}=\boxed{\frac{51}{8}}.$$

b) $$\frac{10^{-5}\cdot 5^{20}}{25^9\cdot 0.01^3}=\frac{10^{-5}\cdot 5^{20}}{(5^2)^9\cdot(10^{-2})^3}=\frac{10^{-5}\cdot 5^{20}}{5^{18}\cdot 10^{-6}}=\frac{5^2}{10^{-1}}=25\cdot 10=\boxed{250}.$$

c) $$\sqrt{1875}-\frac{225}{\sqrt{27}}=\sqrt{25^2\cdot 3}-\frac{225}{3\sqrt{3}}=25\sqrt{3}-\frac{225\sqrt{3}}{3\sqrt{3}\sqrt{3}}=25\sqrt{3}-\frac{225\sqrt{3}}{9}=25\sqrt{3}-25\sqrt{3}=\boxed{0}.$$

d) $$\frac{\sqrt[5]{a^3\,b}\,\sqrt{a\,b}}{\sqrt[10]{a^4\,b}}=\sqrt[10]{\frac{a^6b^2a^5b^5}{a^4b}}=\boxed{\sqrt[10]{a^7b^6}}.$$

2. L'excés de demanda d'un producte ha provocat una pujada del seu preu inicial del 32%. Això ha provocat una forta baixada de la demanda, la qual s'ha volgut equilibrar baixant el preu del producte un 16% sobre el preu pujat.
Si el preu final del producte és de 498.96€, quin era el seu preu inicial?

	Inicial	Excés de demanda	Falta de demanda
Preu	x €	Puja un 32%	Baixa un 16% sobre el preu anterior i en resulten 498.96€

La pujada del 32% es tradueix en una multiplicació per 1.32. La posterior baixada del 16% es tradueix en una multiplicació per $1-0.16=0.84$. Per tant,

$$0.84\cdot 1.32\cdot x=498.96\Longrightarrow x=\frac{498.96}{0.84\cdot 1.32}=\frac{498.96}{1.1088}=\boxed{450€}.$$

3. Trobeu els valors de k tals que l'equació $2x^2 + 8k^2x - k = 0$ té solució única.

Que hi hagi solució única equival a dir que el discriminant, $b^2 - 4ac$, és igual a zero.

$$\left(8k^2\right)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-k) = 0 \Longrightarrow 64k^4 + 8k = 0 \Longrightarrow 8k(8k^3 + 1) = 0.$$

Aquí es presenten dues possibilitats, o bé $\boxed{k = 0}$, o bé $8k^3 + 1 = 0 \Longrightarrow \boxed{k = \sqrt[3]{\dfrac{-1}{8}} = -\dfrac{1}{2}}$.

4. Resoleu: a) $\dfrac{4-x}{3} + 5 = \dfrac{x}{2} - \dfrac{x-1}{4}$. b) $6x^2 + 7x + 2 = 0$. c) $(x+2)(x-2) = (x-1)^2 + 1$. d) $4x^4 - 9x^2 + 2 = 0$.

a) $\dfrac{4-x}{3} + 5 = \dfrac{x}{2} - \dfrac{x-1}{4} \overset{(\times 12)}{\Longleftrightarrow} 16 - 4x + 60 = 6x - 3x + 3 \Longleftrightarrow (-4-6+3)x = 3 - 16 - 60$

$$\Longleftrightarrow -7x = -73 \Longleftrightarrow 7x = 73 \Longleftrightarrow \boxed{x = \frac{73}{7}}.$$

b) $6x^2 + 7x + 2 = 0 \Longleftrightarrow x = \dfrac{-7 \pm \sqrt{49 - 48}}{12} = \dfrac{-7 \pm 1}{12} = \begin{cases} -\dfrac{6}{12} = \boxed{-\dfrac{1}{2}} \\ -\dfrac{8}{12} = \boxed{-\dfrac{2}{3}}. \end{cases}$

c) $(x+2)(x-2) = (x-1)^2 + 1 \Longleftrightarrow x^2 - 4 = x^2 - 2x + 1 + 1 \Longleftrightarrow -6 = -2x \Longleftrightarrow \boxed{x = \dfrac{6}{2} = 3}$.

d) Si fem $x^2 = t$ llavors, $x^4 = t^2$ i, per tant, $4t^2 - 9t + 2 = 0$. D'aquesta obtenim,

$$t = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 32}}{8} = \frac{9 \pm 7}{8} = \begin{cases} 2 \Longrightarrow \boxed{x = \sqrt{t} = \pm\sqrt{2}} \\ \dfrac{1}{4} \Longrightarrow \boxed{x = \sqrt{t} = \sqrt{\dfrac{1}{4}} = \pm\dfrac{1}{2}}. \end{cases}$$

5. Resoleu: a) $3x - \sqrt{9x+1} - 13 = 0$. b) $\dfrac{1}{x-3} + \dfrac{1}{x} = \dfrac{7}{2x}$. c) $\begin{cases} x\,y + x = \dfrac{8}{15} \\ \dfrac{x}{2} + 6y = \dfrac{11}{5}. \end{cases}$

a) $3x - \sqrt{9x+1} - 13 = 0 \Longleftrightarrow 3x - 13 = \sqrt{9x+1} \Longrightarrow (3x-13)^2 = 9x + 1$

$$\Longrightarrow 9x^2 - 78x + 169 = 9x + 1 \Longrightarrow 9x^2 - 87x + 168 = 0$$

$$\Longrightarrow x = \frac{87 \pm \sqrt{7569 - 6048}}{18} = \frac{87 \pm 39}{18} = \begin{cases} \dfrac{126}{18} = 7 \\ \dfrac{48}{18} = \dfrac{8}{3}. \end{cases}$$

Es comprova que l'única solució bona és $\boxed{x = 7}$.

b) $\dfrac{1}{x-3} + \dfrac{1}{x} = \dfrac{7}{2x} \Longrightarrow \dfrac{2x}{x-3} + 2 = 7 \Longrightarrow 2x = 5(x-3) \Longrightarrow 5x - 2x = 15$

$$\Longrightarrow 3x = 15 \Longrightarrow \boxed{x = 5}.$$

$$\text{c)} \left\{\begin{array}{l} x\,y + x = \dfrac{8}{15} \\ \dfrac{x}{2} + 6y = \dfrac{11}{5}\,. \end{array}\right. \Longrightarrow x = \frac{22}{5} - 12y \Longrightarrow \frac{22}{5}\,y - 12y^2 + \frac{22}{5} - 12y = \frac{8}{15}$$

$$\Longrightarrow -12y^2 - \frac{38}{5}\,y + \frac{58}{15} = 0 \Longrightarrow 180y^2 + 114y - 58 = 0 \Longrightarrow 90y^2 + 57y - 29 = 0$$

$$\Longrightarrow \boxed{y} = \frac{-57 \pm \sqrt{3249 + 10440}}{180} = \frac{-57 \pm 117}{180} = \begin{cases} \dfrac{60}{180} = \boxed{13} \Longrightarrow \boxed{x = \dfrac{2}{5}} \\ \dfrac{-174}{180} = \boxed{\dfrac{-29}{30}} \Longrightarrow \boxed{x = 16}\,. \end{cases}$$

6. Un triangle isòsceles té costats que mesuren 5.6 cm, 5.3 cm i 5.3 cm. Calculeu el radi de la seva circumferència inscrita. (Recordeu que el centre d'aquesta coincideix amb el punt on es tallen les bisectrius dels angles del triangle.)

Anomenem x la longitud del radi. Dibuixem les bisectrius dels tres angles que es tallen en O, centre de la circumferència inscrita. Dibuixem les perpendiculars des de O als tres costats, les quals els toquen en M, S i T. Observem que:

- Els triangles $\triangle BMO$ i $\triangle BTO$ són iguals perquè $OM = OT$, OB és comú i tenen un angle igual a 90°.
- Consegüentment $BT = BM = 2.8$, $AT = 5.3 - 2.8 = 2.5$ i, pel teorema de Pitàgores sobre $\triangle AMB$,
$$AM = \sqrt{AB^2 - BM^2} = \sqrt{5.3^2 - 2.8^2} = 4.5$$
- Finalment, pel teorema de Pitàgores sobre $\triangle ATO$,

$$AT^2 + OT^2 = AO^2 \iff 2.5^2 + x^2 = (4.5 - x)^2 \iff 6.25 + x^2 = 20.25 - 9x + x^2$$

$$\iff 9x = 20.25 - 6.25 \iff \boxed{x = \frac{14}{9} = 1.\widehat{5} \;\approx 1.56\,\text{cm}}\,.$$